Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

S-pakovací barvení a jeho varianty

Plzeň, 2020 Karolína Kamenická

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracovala samostatně za použití uvedených pramenů a literatury.

V Plzni dne .... Podpis autora ....

Poděkování

Ráda bych touto cestou vyjádřila poděkování Doc. RNDr. Přemyslu Holubovi, Ph.D. za jeho cenné rady a trpělivost při vedení mé diplomové práce, za vstřícnost a pomoc při získání potřebných informací a podkladů a za veškerý čas, který mi ochotně věnoval. Dále bych ráda poděkovala red. prof. dr. Boštjanovi Brešarovi za cenné rady a poskytnuté konzultace k mé diplomové práci.

Abstrakt

Tato práce se zabývá oblastí S-pakovacího barvení grafu. Nechť $S = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ je neklesající posloupnost přirozených čísel. Funkci f, která přiřazuje barvy vrcholům grafu G v závislosti na dané sekvenci S, nazveme S-pakovacím barvením grafu, jsou-li vrcholy obarvené barvou i ve vzájemné vzdálenosti větší než $a_i, i = 1, 2, 3, \ldots$. Zaměříme se na obecné S-pakovací barvení a jeho některé speciální varianty, konkrétně na pakovací barvení a distanční barvení.

V této práci jsou shrnuty známé poznatky z oblasti distančního, pakovacího a S-pakovacího barvení grafů, a uvedeny nové výsledky pro S-pakovací barvení distančních grafů s distanční množinou $D = \{2, t\}$ pro sekvence S obsahující pouze jedničky a dvojky. Distančním grafem přitom míníme graf G s $V(G) = \mathbb{Z}$, v němž jsou hranou spojeny každé dva vrcholy $i, j \in \mathbb{Z}$ s $|i - j| \in D$.

Abstract

This thesis deals with an S-packing coloring of graphs. Let $S = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ be a non-decreasing sequence of positive integers. The mapping f which assigns colors to vertices of a graph G depending on the given sequence S is an S-packing coloring of a graph, if the pairwise distance of the vertices colored with a color i is bigger than $a_i, i = 1, 2, 3, \dots$. We focus on a general S-packing coloring and its some special variations, specifically on a packing coloring and a distance coloring.

The thesis sumarizes known results on a distance coloring, a packing coloring and an S-packing coloring and some new results for an S-packing coloring of distance graphs with a distance set $D = \{2, t\}$ for sequences S that contain $1s$ and $2s$. The distance graph is a graph G with $V(G) = \mathbb{Z}$ and two vertices $i, j \in \mathbb{Z}$ are adjacent if and only if $|i - j| \in D$.

Obsah

1 Úvod

Nechť $S = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ je neklesající posloupnost přirozených čísel. Pojmem S-pakovací barvení grafu míníme funkci f, která přiřazuje vrcholům grafu G barvy z množiny $\{1, 2, 3, \dots\}$ v závislosti na dané sekvenci S. Vrcholy obarvené barvou i jsou ve vzájemné vzdálenosti větší než a_i. Nejmenší přirozené číslo k, pro které má graf G S-pakovací barvení barvami $1, 2, \dots, k$, nazveme S-pakovacím chromatickým číslem $\chi_S(G)$. Toto barvení zobecňuje některé typy vrcholového barvení, například přípustné barvení (je-li $S = (1, 1, 1, \dots)$), d-distanční barvení (je-li $S = (d, d, d, \dots)$) nebo pakovací barvení (je-li $S = (1, 2, 3, \dots)$).

V přípustném barvení grafu G požadujeme, aby sousední vrcholy byly obarvené odlišnou barvou. Z pohledu S-pakovacího barvení tedy vrcholy obarvené stejnou barvou musí být ve vzájemné vzdálenosti větší než 1. Přípustné barvení grafů se intenzivně studuje již několik desetiletí, my se jím zde však zabývat nebudeme. V této práci uvažujeme barvení se silnější podmínkou na vzájemnou vzdálenost vrcholů obarvených stejnou barvou.

Jeden z přirozených způsobů jak zesílit požadavek na vzdálenost je ten, že vrcholy obarvené stejnou barvou musí být ve vzdálenosti větší něž d. Potom se z hlediska S-pakovacího barvení jedná o již zmíněné distanční barvení.

Jiný způsob jak změnit požadavky na vzdálenost dvou vrcholů se stejnou barvou je zohlednění typu barvy. Pro vrcholy obarvené barvou i lze požadovat vzájemnou vzdálenost větší než i. Tento koncept byl představen Goddardem a spol. v článku [24] pod názvem přenosové barvení (anglicky *Broadcast coloring*). Vycházel z aplikace přiřazování kmitočtů. Mějme danou síť vysílačů, ve které nějaké dva vysílače používají stejnou vysílací frekvenci. Signály těchto dvou vysílačů se budou rušit, nebudou-li umístěny dostatečně daleko od sebe. Vzdálenost, v jaké budou vysílače umístěny, přímo souvisí s výkonem jejich signálů. Vysílače lze reprezentovat vrcholy v grafu a výkon signálu typem barvy. Další aplikací by mohlo být umístění zdrojů nebo výzkum biologické rozmanitosti. Například dva různé biologické druhy v dané oblasti mohou vyžadovat odlišné velikosti teritorií. Později bylo toto barvení Brešarem a spol. [9] přejmenováno na pakovací barvení. Tyto a další typy vrcholového barvení zobecnili Goddard a Xu v [26] pod pojem S-pakovací barvení.

Tato práce je rozdělena na dvě hlavní části. V první části jsou shrnuty známé výsledky o pakovacím, distančním a S-pakovacím barvení. Je-li sekvence S tvaru $(1, 2, 3, \dots)$, jedná se o pakovací barvení, kterému je věnována kapitola 4. V kapitole 5 jsou shrnuty známé poznatky o d-distančním barvení, které odpovídá S-pakovacímu barvení se sekvencí $S = (d, d, d, \dots)$. Známé výsledky S-pakovacího barvení jsou zpracovány v kapitole 6.

Ve druhé části jsou sepsány vlastní výsledky S-pakovacího barvení a distančního barvení na distančních grafech s distanční množinou $D = \{2, t\}$. Kapitola 7.1 se zabývá sekvencemi S tvořenými jedničkami a dvojkami, neboť tyto sekvence se nachází mezi přípustným barvením a 2-distančním barvením. V kapitole 7.2 jsou uvedeny vlastní výsledky z oblasti distančního barvení.

2 Definice pojmů

V této kapitole uvedeme některé pojmy a značení z teorie grafů, které budeme v práci používat. Další značení je převzato především z [13], kde lze nalézt i základní definice z oblasti teorie grafů.

V celé této práci se zabýváme souvislými neorientovanými a tzv. prostými grafy, tedy grafy bez smyček a násobných hran. V grafu G používáme značení $V(G)$ pro množinu vrcholů a $H(G)$ pro množinu hran. Hranu mezi vrcholy x a y zapisujeme xy.

Pro maximální stupeň grafu G užíváme symbol $\Delta(G)$ a pro stupeň vrcholu x je používáno značení $d_G(x)$. Délkou cesty rozumíme počet hran cesty. Vzdálenost dvou vrcholů x, y v grafu G značíme $\mathrm{dist}_G(x, y)$ a rozumíme jí délku nejkratší cesty mezi vrcholy x a y. Průměr grafu je maximální vzdálenost dvou vrcholů v grafu G, značíme $\mathrm{diam}(G)$. Klikovost grafu $\omega(G)$ je číslo udávající velikost největší kliky (tj. úplného podgrafu) v daném grafu G. Množina $B \subset V(G)$ se nazývá pokrytí grafu G, jestliže pro každou hranu $xy \in H(G)$ je $x \in B$ nebo $y \in B$. Pokrývací číslo $\beta(G)$ grafu G je počet prvků nejmenšího pokrytí grafu G. Množina $A \subset V(G)$ se nazývá nezávislá množina grafu G, jestliže žádné dva vrcholy množiny A nejsou spojeny hranou. Nezávislost $\alpha(G)$ grafu G je počet prvků největší nezávislé množiny grafu G. Souvislý graf nazveme k-vrcholově souvislý (zkráceně k-souvislý), pokud i po odebrání libovolných nejvýše $k-1$ vrcholů z G zůstane výsledný graf souvislý. Graf nazveme d-regulární, má-li všechny vrcholy stupně d. Graf nazveme d-irregulární, nemá-li žádné sousední vrcholy stupně d. Subkubickým grafem rozumíme graf, ve kterém má každý vrchol stupeň nejvýše 3. Graf nazveme kubickým, má-li každý vrchol stupeň právě 3. Podrozdělení grafu G, značíme $S(G)$, vznikne z grafu G nahrazením každé hrany $xy \in H(G)$ původního grafu G cestou délky 2. Bipartitním grafem rozumíme graf, jehož množinu vrcholů lze rozdělit na dvě skupiny vrcholů X a Y takové, že $X \cap Y = \emptyset$ a zároveň $X \cup Y = V(G)$, a pro každou hranu xy platí $x \in X$ a $y \in Y$ (nebo naopak). Graf G lze uložit do roviny, jestliže existuje nějaké jeho rovinné nakreslení, tj. jestliže jej lze znázornit pomocí vrcholů a hran do roviny tak, že žádné dvě hrany nemají společný vnitřní bod. Graf G je rovinný, pokud ho lze uložit do roviny. Potom se oblasti (části roviny), které jsou vymezeny hranami, nazývají stěny grafu G. Vnější stěnou nazveme stěnu, která není omezená.

Kolem W_n rozumíme graf, který vznikne z kružnice C_{n-1} přidáním jednoho dalšího vrcholu, který je spojen se všemi vrcholy kružnice C_{n-1}. Graf nazveme stromem, je-li souvislý a neobsahuje žádnou kružnici. Nekonečná cesta P_∞ je graf s množinou vrcholů $V(P_\infty) = \mathbb{Z}$ a množinou hran $H(P_\infty) = \{\{i, i+1\}, i \in \mathbb{Z}\}$. Nechť G_1 a G_2 jsou grafy. Kartézským součinem $G = G_1 \square G_2$ je graf s množinou vrcholů $V(G) = \{(x_1, x_2) : x_1 \in V(G_1), x_2 \in V(G_2)\}$, kde $(x_1, x_2)(y_1, y_2) \in H(G) \Leftrightarrow (x_1 = y_1 \wedge x_2 y_2 \in H(G_2))$ nebo $(x_1 y_1 \in H(G_1) \wedge x_2 = y_2) : x_1, y_1 \in V(G_1)$ a $x_2, y_2 \in V(G_2)$. Kartézský součin $P_\infty \square P_\infty$ nazveme nekonečnou čtvercovou sítí a značíme jej $\mathbb{Z}^2$. Nekonečnou trojúhelníkovou síť značíme $\mathcal{T}$ a nekonečnou šestiúhelníkovou síť značíme $\mathcal{H}$. Poznamenejme, že nekonečná čtvercová síť je 4-regulární graf, nekonečná trojúhelníková síť je 6-regulární graf a nekonečná šestiúhelníková síť je 3-regulární graf. Symbolem G^k značíme graf k-té mocniny grafu G. Tento graf má množinu vrcholů $V(G^k) = V(G)$ a $xy \in H(G^k)$ právě tehdy, když $\mathrm{dist}_G(x, y) \leq k$.

Vrcholové barvení je funkce, která přiřazuje vrcholům grafu G barvy v závislosti na dané podmínce. Nejvíce zkoumaným vrcholovým barvením je tzv. přípustné barvení, kde sousední vrcholy jsou obarveny různými barvami. Pakovací barvení je vrcholové barvení, kde vrcholy s barvou i jsou ve vzdálenosti větší než i. Distanční barvení s parametrem d je vrcholové barvení, kde vrcholy se stejnou barvou jsou ve vzdálenosti větší než d. Všechny zmíněné typy vrcholového barvení zobecňuje S-pakovací barvení, kde vrcholy se stejnou barvou i jsou ve vzdálenosti větší než a_i. Hodnoty a_i závisí na dané posloupnosti $S = (a_1, a_2, \ldots)$.

Cílem této práce je mimo jiné výzkum S-pakovacího barvení distančních grafů. Distanční graf $G(D)$ s distanční množinou $D = \{d_1, \ldots, d_k\}, d_i \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, k$, je graf s množinou $\mathbb{Z}$ jakožto množinou vrcholů a hrany jsou mezi vrcholy i, j právě tehdy, když $|i - j| \in D$, kde $i, j \in \mathbb{Z}$. Poznamenejme, že distanční graf s distanční množinou $D = \{1\}$ je nekonečná cesta P_∞ a distanční graf s $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ je k-tá mocnina nekonečné cesty P_∞.

V této práci budeme rovněž používat tato značení: Symbolem e značíme Eulerovo číslo. Největší společný dělitel $nsd(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ čísel $x_1, x_2, \ldots, x_k$ je největší přirozené číslo takové, že beze zbytku dělí čísla $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Symbolem $a \mid b$ (resp. $a \nmid b$) míníme, že číslo b lze (resp. nelze) dělit číslem a beze zbytku.

3 Typy barvení

V této kapitole jsou popsány typy barvení, na které se tato práce zaměřuje. Konkrétně se jedná o pakovací barvení, distanční barvení a S-pakovací barvení, které zobecňuje předchozí typy barvení.

3.1 Pakovací barvení

Pakovacím barvením míníme funkci f, která přiřazuje množině vrcholů $V(G)$ barvy (hodnoty) z množiny $\mathbb{N}$ tak, že vrcholy obarvené barvou i jsou ve vzdálenosti větší než i. Tedy platí $\forall x, y \in V(G) : f(x) = f(y) = i \Rightarrow \mathrm{dist}_G(x, y) > i$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$. Řekneme, že pakovací barvení grafu G je řádu k, pokud barvení využívá barvy (hodnoty) $\{1, 2, \ldots, k\}$. Nejmenší číslo k, pro které existuje pakovací barvení řádu k grafu G nazveme pakovacím chromatickým číslem grafu G a značíme jej $\chi_\rho(G)$.

Toto barvení lze též definovat pomocí pakovacích tříd. Pakovací třídou X_i, $i = 1, 2, \ldots$, označíme množinu obsahující vrcholy, které jsou ve vzájemné vzdálenosti větší než i. Pakovacím barvením řádu k grafu G rozumíme rozklad množiny vrcholů $V(G)$ grafu G na pakovací třídy $X_1, X_2, \ldots, X_k$, kde vrcholy třídy X_i jsou obarveny barvou i ($i = 1, \ldots, k$). Pakovací třídy $X_1, \ldots, X_k$ jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = V(G)$.

3.2 Distanční barvení

Distančním barvením s parametrem d (zkráceně d-distančním barvením) míníme funkci f, která přiřazuje množině vrcholů $V(G)$ barvy (hodnoty) z množiny $\mathbb{N}$ tak, že vrcholy obarvené stejnou barvou jsou ve vzájemné vzdálenosti větší než d. Tedy platí $\forall x, y \in V(G) : f(x) = f(y) \Rightarrow \mathrm{dist}_G(x, y) > d$, kde $d \in \mathbb{N}$. Číslo d nazveme parametr distančního barvení. Řekneme, že distanční barvení s parametrem d grafu G je řádu k, pokud barvení využívá barvy (hodnoty) $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Nejmenší číslo k, pro které existuje distanční barvení s parametrem d grafu G pomocí k barev, nazveme d-distančním chromatickým číslem a značíme jej $\chi_d(G)$.

3.3 S-pakovací barvení

S-pakovací barvení zobecňuje mnoho vrcholových barvení (například přípustné barvení, pakovací barvení a distanční barvení).

Nechť $S = (a_1, a_2, \dots)$ je neklesající sekvence přirozených čísel $a_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots$. Potom S-pakovacím barvením grafu G rozumíme funkci f, která přiřazuje množině vrcholů $V(G)$ barvy (hodnoty) z množiny $\mathbb{N}$ tak, že vrcholy s barvou i musí být ve vzdálenosti větší než a_i. Tedy platí $\forall x, y \in V(G) : f(x) = f(y) = i \Rightarrow \mathrm{dist}_G(x, y) > a_i$ pro $i = 1, 2, 3, \dots$. Graf G nazveme S-obarvitelný, jestliže existuje S-pakovací barvení grafu G pro danou sekvenci S. Řekneme, že S-pakovací barvení grafu G je řádu k, pokud barvení využívá barvy (hodnoty) $1, 2, \dots, k$. Nejmenší číslo k, pro které existuje S-pakovací barvení řádu k grafu G, nazveme S-pakovacím chromatickým číslem grafu G a značíme jej $\chi_S(G)$.

Toto barvení lze též definovat pomocí pakovacích tříd. Pakovací třídou X_{a_i}, $i = 1, 2, \dots$, označíme množinu obsahující vrcholy, které jsou ve vzájemné vzdálenosti větší než a_i; často takovou pakovací třídu nazýváme a_i-pakovací třídou. Pakovacím barvením řádu k rozumíme rozklad množiny vrcholů $V(G)$ grafu G na pakovací třídy $X_{a_1}, X_{a_2}, \dots, X_{a_k}$, kde vrcholy třídy X_{a_i} jsou obarveny barvou i ($i = 1, \dots, k$). Pakovací třídy $X_{a_1}, \dots, X_{a_k}$ jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{i=1}^{k} X_{a_i} = V(G)$.

Poznamenejme, jak již bylo řečeno dříve, že je-li $S = (1, 1, \dots)$, potom se jedná o klasické přípustné barvení, je-li $S = (1, 2, 3, \dots)$, potom se jedná o pakovací barvení a je-li $S = (d, d, d, \dots)$, potom se jedná o distanční barvení s parametrem d.

4 Zpracování známých výsledků v oblasti pakovacího barvení

Pakovací barvení je speciální typ S-pakovacího barvení, ve kterém je S ve tvaru aritmetické posloupnosti $(1, 2, 3, \dots)$. Na začátku této kapitoly uvedeme některá zřejmá tvrzení.

Pakovací chromatické číslo $\chi_\rho(G)$ grafu G lze zespoda odhadnout chromatickým číslem $\chi(G)$ grafu G, tedy pro libovolný graf G platí $\chi(G) \le \chi_\rho(G)$ [24]. Dále lze pro spodní odhad pakovacího chromatického čísla grafu G využít pakovacího chromatického čísla jeho podgrafu H.

Tvrzení 4.1 [24]. *Nechť G je graf a H jeho podgraf. Potom $\chi_\rho(H) \le \chi_\rho(G)$.*

Triviální horní mezí pakovacího chromatického čísla grafu G řádu n je n, neboť každému vrcholu lze přiřadit jednoznačně celé číslo mezi 1 až n. Tedy platí $\chi_\rho(G) \le n$. Této horní meze nabývá například pakovací chromatické číslo úplných grafů K_n [9]. Většina grafů má výrazně nižší pakovací chromatické číslo než n. Pro přesnější odhad pakovacího chromatického čísla lze využít pokrývací číslo β.

Tvrzení 4.2 [24]. *Nechť G je graf a $\beta(G)$ pokrývací číslo grafu G. Potom $\chi_\rho(G) \le \beta(G) + 1$. Rovnost nastává pro graf s průměrem 2.*

Bipartitní grafy s průměrem 3 mají hodně blízké pakovací chromatické číslo pakovacímu chromatickému číslu grafů s průměrem 2 a jeho hodnota téměř odpovídá pokrývacímu číslu β.

Tvrzení 4.3 [24]. *Nechť G je bipartitní graf průměru 3. Potom $\beta(G) \le \chi_\rho(G) \le \beta(G) + 1$.*

Nyní se budeme věnovat pakovacímu barvení základních tříd grafů. Tímto tématem se zabývali především Goddard a spol. v článku [24]. Pro cestu P_n na n vrcholech dokázali, že $\chi_\rho(P_n) = 2$ pro $2 \le n \le 3$ a $\chi_\rho(P_n) = 3$ pro $n \ge 4$ [24]. Pro kružnici C_n určili pakovací chromatické číslo rovno 3, je-li $n = 3$ nebo $n = 4l$ pro $l \in \mathbb{N}$, a rovno 4 v ostatních případech [24]. Dále dokázali, že graf G má pakovací chromatické číslo 2 právě tehdy, když G je hvězda $K_{1,n}$ [24]. Poznamenejme, že tento výsledek vyhovuje tvrzení 4.2, neboť hvězdy jsou grafy průměru 2 a pokrývací číslo $\beta(K_{1,n}) = 1$. Tedy $\chi_\rho(K_{1,n}) = 1 + 1 = 2$.

Další skupinou grafů, kterou se Goddard a spol. zabývali, byly stromy. Určili horní mez pakovacího chromatického čísla libovolného stromu T.

Věta 4.4 [24]. *Nechť T je strom řádu n. Potom*

$$\chi_\rho(T) \begin{cases} \leq (n+7)/4, & \text{je-li } n \neq 4; 8, \\ < n/4 + 2, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dalším jejich výsledkem jsou následující věty pro stromy s průměrem 3, respektive 4.

Tvrzení 4.5 [24]. *Nechť T je strom průměru 3. Potom $\chi_\rho(T) = 3$.*

Klíčovým aspektem pro určení pakovacího chromatického čísla stromů s průměrem 4 je počet těžkých a lehkých sousedů takzvaného centrálního vrcholu (vrchol, který má od všech ostatních vrcholů vzdálenost nejvýše 2). Poznamenejme, že vrchol je těžký, má-li stupeň 4 nebo více, a lehký v ostatních případech.

Tvrzení 4.6 [24]. *Nechť T je strom průměru 4 s centrálním vrcholem v. Nechť n_i značí počet sousedů vrcholu v stupně i $(i = 1, 2, 3)$, a nechť L značí počet těžkých sousedů vrcholu v. Je-li $L = 0$, potom*

$$\chi_\rho(T) = \begin{cases} 4, & \text{je-li } n_3 \geq 2 \text{ a } n_1 + n_2 + n_3 \geq 3, \\ 3, & \text{jinak,} \end{cases}$$

a pokud $L > 0$, potom

$$\chi_\rho(T) = \begin{cases} L + 3, & \text{je-li } n_3 \geq 1 \text{ a } n_1 + n_2 + n_3 \geq 2, \\ L + 1, & \text{je-li } n_1 = n_2 = n_3 = 0, \\ L + 2, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Další, kdo se zabýval problematikou pakovacího chromatického čísla stromů byl Sloper [41]. Úplný binární (resp. ternární) strom je strom, kde každý vrchol s výjimkou listů a speciálního vrcholu - tzv. kořene - má právě tři (resp. čtyři) sousedy, kořen má právě dva (resp. tři) sousedy a všechny listy mají stejnou vzdálenost ke kořenovému vrcholu. Sloper dokázal, že každý úplný binární strom řádu $n \geq 7$ lze obarvit nejvýše 7 barvami [41]. Oproti tomu nekonečný úplný ternární strom T, nelze obarvit konečným počtem barev, tedy $\chi_\rho(T) = \infty$ [41].

Goddard a spol. [24] se dále zabývali pakovacím chromatickým číslem hyperkrychlí Q_n. Pro $n = 1, \ldots, 5$ určili přesné hodnoty - viz následující věta 4.7. Poznamenejme, že $Q_1 \cong P_2$ a $Q_2 \cong C_4$.

Tvrzení 4.7 [24]. *Nechť Q_n je hyperkrychle dimenze n. Potom $\chi_\rho(Q_1) = 2$, $\chi_\rho(Q_2) = 3$, $\chi_\rho(Q_3) = 5$, $\chi_\rho(Q_4) = 7$ a $\chi_\rho(Q_5) = 15$.*

původní meze χ_ρ z [24]	vylepšené meze χ_ρ z [45]
$132 \leq \chi_\rho(Q_9) \geq 219$	$198 \leq \chi_\rho(Q_9)$
$285 \leq \chi_\rho(Q_{10}) \geq 441$	$395 \leq \chi_\rho(Q_{10})$
$610 \leq \chi_\rho(Q_{11}) \geq 881$	$794 \leq \chi_\rho(Q_{11})$

Tabulka 1: Porovnání odhadů $\chi_\rho(Q_n)$ pro $n = 9, 10$ a 11 z [24] a [45].

Přesné pakovací chromatické číslo hyperkrychlí Q_6, Q_7 a Q_8 bylo určeno Torresem a Valencia-Pabonem [45]. Dokázali, že $\chi_\rho(Q_6) = 25$, $\chi_\rho(Q_7) = 49$ a $\chi_\rho(Q_8) = 95$. Dalším jejich výsledkem bylo zlepšení spodní meze pakovacího chromatického čísla pro Q_9, Q_{10} a Q_{11} z článku [24]. Původní a vylepšené meze pakovacího chromatického čísla hyperkrychle Q_n pro $n = 9, 10$ a 11 jsou uvedeny v tabulce 1.

Nyní uvažujme hyperkrychli Q_n libovolné dimenze n. S rostoucím n se zvětšuje i hodnota pakovacího chromatického čísla. Goddard a spol. určili asymptotickou horní mez pakovacího chromatického čísla hyperkrychle Q_n. Dokázali, že $\chi_\rho(Q_n) \leq 2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4n})2^n$ [24]. Torres a Valencia-Pabon [45] tento výsledek zlepšili.

Věta 4.8 [45]. *Nechť Q_n je hyperkrychle dimenze alespoň 4. Potom $\chi_\rho(Q_n) \leq 3 + 2^n(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{\lceil \log_2 n \rceil}}) - 2\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor$.*

4.1 Pakovací barvení Kartézských součinů a nekonečných sítí

Tato kapitola se věnujme Kartézskému součinu nekonečné cesty P_∞ a libovolného grafu G, respektive cesty P_n, a dále se věnuje nekonečným sítím, konkrétně čtvercové síti $\mathbb{Z}^2$ jakožto Kartézskému součinu $P_\infty \square P_\infty$, krychlové síti $\mathbb{Z}^3$ jakožto Kartézskému součinu $P_\infty \square P_\infty \square P_\infty$, trojúhelníkové síti $\mathcal{T}$, šestiúhelníkové síti $\mathcal{H}$ a dalším Kartézským součinům již zmíněných grafů.

Fiala a spol. [20] dokázali, že pro Kartézský součin nekonečné cesty P_∞ a libovolného grafu G je pakovací chromatické číslo konečné. Kartézský součin $P_2 \square P_\infty$ lze dokonce obarvit pouze pěti barvami.

Tvrzení 4.9 [24]. *Nechť $P_2 \square P_\infty$ je Kartézský součin cesty P_2 a nekonečné cesty P_∞. Potom $\chi_\rho(P_2 \square P_\infty) = 5$.*

Kartézský součin dvou nekonečných cest $\mathbb{Z}^2 = P_\infty \square P_\infty$ (tj. nekonečná čtvercová síť) je velmi zkoumaným grafem z hlediska určení různých chromatických čísel, včetně pakovacího. Pro pakovací chromatické číslo $\mathbb{Z}^2$ zatím není známa přesná hodnota. První odhad pakovacího chromatického čísla grafu $\mathbb{Z}^2$ pochází od Goddarda a spol.. Dokázali, že $9 \leq \chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \leq 23$ [24]. Fiala, Klavžar a Lidický [20] zlepšili spodní hranici na 10. Následně ji Ekstein a spol. [16] zlepšili na 12. Soukal a Holub dokázali, že $\chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \leq 17$ [42]. Pomocí jejich výsledku, autoři Martin a spol. [36] zúžili odhad pakovacího chromatického čísla na $13 \leq \chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \leq 15$.

Věta 4.10 [36]. *Nechť $\mathbb{Z}^2$ je nekonečná čtvercová síť. Potom* $13 \leq \chi_\rho(\mathbb{Z}^2) \leq 15$.

Nyní uvažujme Kartézský součin $P_n \square \mathbb{Z}^2$. Fiala a spol. [20] dokázali, že již dvě vrstvy nekonečné čtvercové sítě (tedy Kartézský součin $P_2 \square \mathbb{Z}^2$), nelze obarvit konečným počtem barev.

Věta 4.11 [20]. *Nechť $\mathbb{Z}^2$ je nekonečná čtvercová síť a P_n cesta s $n \geq 2$. Potom $\chi_\rho(P_n \square \mathbb{Z}^2) = \infty$.*

Poznamenejme, že výše zmíněná věta 4.11 zahrnuje i graf nekonečné krychlové sítě $\mathbb{Z}^3$ (zvolíme-li $n = \infty$), neboť $\mathbb{Z}^3 = P_\infty \square \mathbb{Z}^2$.

Následující věty se zabývají pakovacím barvením nekonečných sítí, konkrétně trojúhelníkové $\mathcal{T}$ a šestiúhelníkové $\mathcal{H}$.

Věta 4.12 [21]. *Nechť $\mathcal{T}$ je nekonečná trojúhelníková síť. Potom $\chi_\rho(\mathcal{T}) = \infty$.*

Na rozdíl od nekonečné trojúhelníkové sítě $\mathcal{T}$, pakovací chromatické číslo nekonečné šestiúhelníkové sítě $\mathcal{H}$ konečné je. Brešar, Klavžar a Rall [9] dokázali jeho spodní a horní odhad.

Věta 4.13 [9]. *Nechť $\mathcal{H}$ je nekonečná šestiúhelníková síť. Potom* $6 \leq \chi_\rho(\mathcal{H}) \leq 8$.

Fiala a spol. [20] snížili horní mez na 7 a tuto hodnotu následně Korže a Vesel [32] potvrdili jako přesnou hodnotu, tedy $\chi_\rho(\mathcal{H}) = 7$. Dále Fiala a spol. dokázali, že nelze obarvit šest vrstev nekonečné šestiúhelníkové sítě (tedy Kartézský součin $P_6 \square \mathcal{H}$) konečným počtem barev.

Věta 4.14 [20]. *Nechť $\mathcal{H}$ je nekonečná šestiúhelníková síť a P_n cesta s $n \geq 6$. Potom $\chi_\rho(P_n \square \mathcal{H}) = \infty$.*

Brešar a spol. [9] dokázali následující spodní odhad pakovacího chromatického čísla Kartézského součinu grafu G a úplného grafu K_n pomocí pakovacího chromatického čísla grafu G.

Věta 4.15 [9]. *Nechť G je souvislý graf, $\chi_\rho(G)$ pakovací chromatické číslo grafu G a K_n úplný graf řádu alespoň 3. Potom $\chi_\rho(G \square K_n) \geq n\chi_\rho(G) - (n-1)diam(G)$.*

Zmíněnou větu 4.15 lze využít i pro spodní odhad pakovacího chromatického čísla hyperkrychlí Q_n. Nahlížíme-li na Q_n jako na Kartézský součin $Q_{n-1} \square K_2$, potom $\chi_\rho(Q_n) \geq 2\chi_\rho(Q_{n-1}) - (n-1)$ pro $n \geq 2$ [9].

4.2 Pakovací barvení podrozdělení grafů

Další skupinou grafů, pro kterou uvádíme známé výsledky ohledně pakovacího chromatického čísla jsou podrozdělení grafů. Podrozdělení grafu G, které značíme $S(G)$,
vznikne z grafu G nahrazením každé hrany xy grafu G cestou délky 2. Přesnou hodnotu pakovacího chromatického čísla pro podrozdělení $S(G)$ bipartitního grafu G dokázali Goddard a spol. v [24].

Tvrzení 4.16 [24]. *Nechť $S(G)$ je podrozdělení bipartitního grafu G. Potom $\chi_\rho(S(G)) = 3$.*

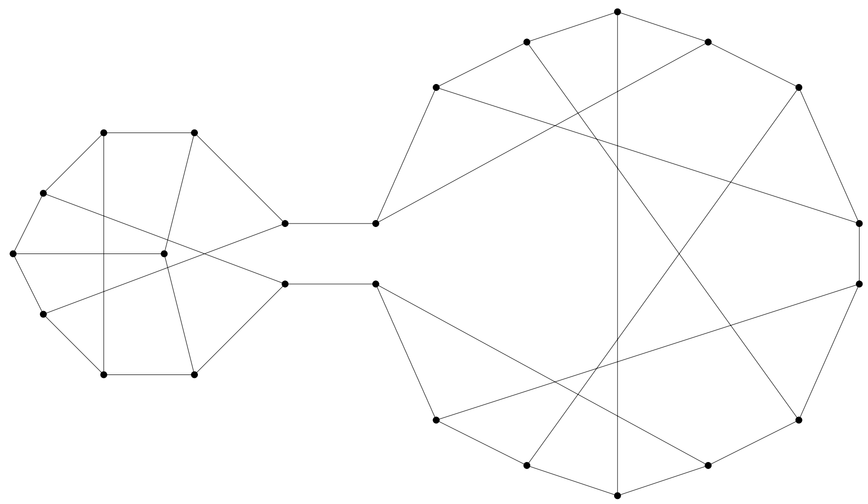
Vrcholy podrozdělení $S(G)$ bipartitního grafu G (s disjunktními množinami A, B) rozdělíme do tří pakovacích tříd V_1, V_2 a V_3, tak aby $\forall x, y \in V(V_i)$: $\mathrm{dist}_{S(G)}(x, y) > i$. Vrcholy pakovací třídy V_i obarvíme barvou i. Pakovací třídu V_1 tvoří vrcholy, které obsahuje podrozdělení $S(G)$, ale ne G (mají od sebe vzdálenost vždy 2). Pakovací třídy V_2 a V_3 tvoří vrcholy biparitního grafu, množina $V_2 = A$ a $V_3 = B$ (vrcholy v množinách V_2, V_3 v podrozdělení $S(G)$ mají od sebe vzdálenost vždy alespoň 4). Další, kdo se zabýval problematikou pakovacího barvení podrozdělení grafů byl Brešar a spol. [9]. Dokázali přesnou hodnotu pakovacího chromatického čísla podrozdělení úplných grafů K_n.

Tvrzení 4.17 [9]. *Nechť K_n je úplný graf řádu alespoň 3 a $S(K_n)$ je jeho podrozdělení. Potom $\chi_\rho(S(K_n)) = n + 1$.*

Poznamenejme, že pro $n = 2$ výše uvedené tvrzení neplatí, jelikož $\chi_\rho(S(K_2)) = 2$.

Dalším jejich výsledkem byl odhad pakovacího chromatického čísla podrozdělení $S(G)$ obecného grafu G. Pro spodní odhad využili klikovosti $\omega(G)$ grafu G a pro horní odhad pakovacího chromatického čísla $\chi_\rho(G)$ grafu G.

Věta 4.18 [9]. *Nechť G je graf řádu alespoň 3 a $S(G)$ je jeho podrozdělení. Potom $\omega(G) + 1 \leq \chi_\rho(S(G)) \leq \chi_\rho(G) + 1$.*



Obrázek 1: Kubický graf řádu 24 s pakovacích chromatickým číslem 11 [23].

4.3 Pakovací barvení kubických a subkubických grafů

Tato kapitola se zabývá pakovacím barvením kubických a subkubických grafů. Připomeňme, že graf nazveme kubickým, mají-li všechny jeho vrcholy stupeň právě 3, a subkubickým, jsou-li stupně všech vrcholů nejvýše 3.

Otázka, zda kubické grafy mají konečné pakovací chromatické číslo nebo ne, byla zkoumána Goddardem a spol. [24], nicméně nedokázali najít odpověď. Gastineau a Togni [23] našli kubický graf řádu 24 s pakovacím chromatickým číslem 11 (viz obrázek 1) a dále dokázali existenci kubického grafu s pakovacím chromatickým číslem 13 [23].

Brešar a spol. [11] dokázali, že existuje kubický graf G s $\chi_\rho(G) \geq 14$. Existenci kubických grafů s libovolně velikým pakovacích chromatickým číslem dokázali Balogh a spol. [2], kteří navíc dokázali, že „mnoho“ kubických grafů má „vysoké“ pakovací chromatické číslo.

Věta 4.19 [2]. *Nechť $k \geq 12$ a $g \geq 2k + 2$. Potom téměř každý kubický graf G řádu n s obvodem alespoň g má $\chi_\rho(G) > k$.*

Subkubickým grafům se věnovali Brešar a Ferme v [8], kteří zkonstruovali třídu subkubických grafů s neomezeným pakovacím chromatickým číslem. Balogh a spol. v [3] dokázali, že pakovací chromatické číslo podrozdělení subkubického grafu je nejvýše 8.

Dalšími podtřídami subkubických grafů, které mají konečné pakovací chromatické číslo, jsou například nekonečná hexagonální síť $\mathcal{H}$ (viz věta 4.13), subkubické stromy [41] nebo tzv. Sierpińského grafy základu 3, kterými se zabývají články [10] a [14]. Sierpińského graf základu 3 značíme symbolem S^k. Pro $k = 0$ je

$S^0 = K_1$. Pro $k \geq 1$ má graf S^k množinu vrcholů $V(S^k) = \{0,1,2\}^k$ a množina hran je definována rekurzivně jako $H(S^k) = \{\{is, it\} : i \in \{0,1,2\}, \{s,t\} \in H(S^{k-1})\} \cup \{\{ij^{k-1}, ji^{k-1}\} : i,j \in \{0,1,2\}, i \neq j\}$. Brešar a spol. [10] dokázali, že $\chi_\rho(S^1) = 3, \chi_\rho(S^2) = 5$ a $\chi_\rho(S^3) = \chi_\rho(S^4) = 7$. Pro $k \geq 5$ pouze omezili pakovací chromatické číslo hodnotami 8 a 9. Přesnou hodnotu $\chi_\rho(S^k)$ dokázali Deng a spol..

Věta 4.20 [14]. *Nechť S^k je Sierpińského graf základu 3 a $k \geq 5$. Potom $\chi_\rho(S^k) = 8$.*

Subkubické vnějškově rovinné grafy též patří do skupiny grafů s konečným pakovacím chromatickým číslem. Vnějškově rovinný graf G je graf, který má rovinné nakreslení takové, že všechny jeho vrcholy leží na vnější stěně. Pokud je graf G 2-souvislý, potom ho lze znázornit pomocí hraniční kružnice C, na které leží všechny vrcholy grafu G a zároveň se žádné dvě chordy (tj.hrany mezi dvěma vrcholy G, které nesousedí na vnější stěně) nekříží. Chordy rozdělují vnitřek kružnice C na stěny grafu. Stěnu F nazveme vnitřní stěnou, pokud obsahuje více než dvě chordy.

Gastineau, Holub a Togni [22] se věnovali pakovacímu barvení subkubických vnějškově rovinných grafů. Dokázali, že pakovací chromatické číslo subkubického vnějškově rovinného grafu G lze omezit funkcí počtu vnitřních stěn grafu G.

Věta 4.21 [22]. *Nechť G je souvislý subkubický vnějškově rovinný graf s r (bez vnější) stěnami. Potom $\chi_\rho(G) \leq 9 \cdot 6^r - 2$.*

Dále pro 2-souvislé subkubické vnějškově rovinné grafy (s r vnitřními stěnami) shora omezili pakovací chromatické číslo funkcí $17 \cdot 6^{3r} - 2$ [22]. Uvedenou horní mez v předchozí větě lze snížit pro speciální podtřídy 2-souvislých subkubických vnějškově rovinných grafů na 51, resp. 15.

Věta 4.22 [22]. *Nechť G je 2-souvislý subkubický vnějškově rovinný graf s přesně 1 vnitřní stěnou. Potom $\chi_\rho(G) \leq 51$.*

Tvrzení 4.23 [22]. *Nechť G je 2-souvislý subkubický vnějškově rovinný graf bez vnitřní stěny. Potom $\chi_\rho(G) \leq 15$.*

4.4 Pakovací barvení distančních grafů $G(D)$

Následující věty se týkají pakovacího barvení distančních grafů. Připomeňme, že distanční graf $G(D)$ s distanční množinou D má množinu $\mathbb{Z}$ jakožto množinu vrcholů a hrany jsou mezi vrcholy $i, j \in \mathbb{Z}$ právě tehdy, když $|i - j| \in D$.

Pakovacím barvením distančních grafů se zabýval jako první Togni [44]. Dokázal, že pro distanční graf $G(D)$ s D jakožto konečnou podmnožinou $\mathbb{N}$ je pakovací chromatické číslo konečné [44].

Poznamenejme, že v případě $D = \{1\}$, je distančním grafem $G(D)$ nekonečná cesta, jejíž pakovací chromatické číslo je 3 [24]. Pro distanční graf $G(D)$ s distanční množinou $D = \{1, t\}$ určuje horní mez pakovacího chromatického čísla následující věta.

Věta 4.24 [44]. *Nechť t, q jsou celá čísla. Potom*

$$\chi_\rho(G(\{1,t\})) \leq \begin{cases} 89, \ \textit{je-li } t = 2q+1, q \geq 35, \\ 40, \ \textit{je-li } t = 2q+1, q \geq 223, \\ 179, \ \textit{je-li } t = 2q, q \geq 89, \\ 81, \ \textit{je-li } t = 2q, q \geq 224, \\ 29, \ \textit{je-li } t = 96q \pm 1, q \geq 1, \\ 59, \ \textit{je-li } t = 96q + 1 \pm 1, q \geq 1. \end{cases}$$

Ekstein, Holub a Lidický [17] zlepšili některé horní odhady čísla $\chi_\rho(G(\{1,t\}))$ z věty 4.24.

Věta 4.25 [17]. *Nechť $t \geq 575$ je liché celé číslo. Potom $\chi_\rho(G(\{1,t\})) \leq 35$. Nechť $t \geq 648$ je sudé celé číslo. Potom $\chi_\rho(G(\{1,t\})) \leq 56$.*

Dále dokázali spodní mez pakovacího chromatického čísla distančního grafu $G(D)$ s $D = \{1, t\}$ pro $t \geq 9$ [17].

Věta 4.26 [17]. *Nechť $D = \{1, t\}$ je distanční množina grafu $G(D)$ a $t \geq 9$. Potom $\chi_\rho(G(\{1,t\})) \geq 12$.*

V následující větě jsou uvedeny odhady, respektive přesné hodnoty pakovacího chromatického čísla distančního grafu $G(\{1,t\})$ pro malé t.

Věta 4.27 [17], [44]. *Nechť $G(D)$ je distanční graf. Potom*

$\chi_\rho(G(\{1,2\})) = 8$,
$\chi_\rho(G(\{1,3\})) = 9$,
$14^a \leq \chi_\rho(G(\{1,4\})) \leq 15^a$,
$12^a \leq \chi_\rho(G(\{1,5\})) \leq 12$ $(\chi_\rho(G(\{1,5\})) = 12)$,
$15^a \leq \chi_\rho(G(\{1,6\})) \leq 23$,
$14^a \leq \chi_\rho(G(\{1,7\})) \leq 15$,
$15^a \leq \chi_\rho(G(\{1,8\})) \leq 25$,
$13^a \leq \chi_\rho(G(\{1,9\})) \leq 18$.

Hodnoty označené symbolem [a] *jsou výsledky autorů Ekstein, Holub a Lidický [17], ostatní hranice pochází z [44].*

Další, kdo se zabýval velikostí pakovacího chromatického čísla distančních grafů s distanční množinou $D = \{1, t\}$ byli Shao a Vesel [39]. Snížili horní mez pakovacího chromatického čísla grafu $G(\{1, 4\})$ z 15 (viz věta 4.27) na 14, a tedy dokázali, že $\chi_\rho(G(\{1, 4\})) = 14$ [39]. Dále snížili horní mez $\chi_\rho(G(\{1, 6\}))$ z 23 (viz věta 4.27) na 16 [39].

Nyní uvažujme distanční množinu $D = \{2, t\}$. Pro $t = 3$ Togni [44] dokázal, že $11 \leq \chi_\rho(G(\{2, 3\})) \leq 13$. Tento odhad zlepšili Ekstein, Holub a Togni [18], kteří dokázali přesnou hodnota pakovacího chromatického čísla grafu $G(\{2, 3\})$.

Věta 4.28 [18]. *Nechť $G(\{2, 3\})$ je distanční graf. Potom $\chi_\rho(G(\{2, 3\})) = 13$.*

Shao a Vesel [39] shora omezili $\chi_\rho(G(\{2, 5\}))$ na 15. Spodní odhad $\chi_\rho(G(\{2, 5\}))$ hodnotou 14 je výsledkem autorů Ekstein a spol. [18], tedy $14 \leq \chi_\rho(G(\{2, 5\})) \leq 15$.

Nyní uvažujme obecnou dvouprvkovou distanční množinu $D = \{k, t\}$ pro $t \geq 9$. Ekstein a spol. [18] dokázali, že pakovací chromatické číslo $\chi_\rho(G(D))$ je alespoň 12 a dále shora omezili pakovací chromatické číslo distančních grafů $G(D)$.

Věta 4.29 [18]. *Nechť $G(D)$ je distanční graf s distanční množinou $D = \{k, t\}$, kde k a t jsou nesoudělná. Potom $\chi_\rho(G(\{k, t\})) \leq 56$, je-li k liché a $t \geq 898$ sudé, nebo je-li k sudé a $t \geq 923$ liché.*

Pro speciální volbu k a t lze odhady ve větě 4.29 snížit. Ekstein, Holub a Togni [18] dokázali, že jsou-li k, t lichá nesoudělná čísla a $t \geq 825$, potom $\chi_\rho(G(\{k, t\})) \leq 30$. Poznamenejme, že pro $k = 1$ zmíněné tvrzení zlepšuje výsledek uvedený ve větě 4.25.

V následující větě jsou uvedeny horní odhady pakovacího chromatického čísla distančních grafů $G(D)$ pro malá k, t.

Věta 4.30 [39]. *Nechť $G(D)$ je distanční graf. Potom*

$\chi_\rho(G(\{3, 4\})) \leq 15$,
$\chi_\rho(G(\{3, 8\})) \leq 15$,
$\chi_\rho(G(\{4, 5\})) \leq 15$,
$\chi_\rho(G(\{5, 6\})) \leq 17$,
$\chi_\rho(G(\{7, 9\})) \leq 16$.

Pakovacím barvením distančních grafů $G(D)$ s tříprvkovou distanční množinou $D = \{1, 2, 3\}$ se zabýval Togni, který dokázal, že $17 \leq \chi_\rho(G(D)) \leq 23$ [44].

5 Zpracování známých výsledků v oblasti distančního barvení

Distanční barvení s parametrem d, neboli d-distanční barvení je speciální případ S-pakovacího barvení se sekvencí $S = (d, d, d, d, \dots, d)$. Pro $d = 1$ se jedná o klasické přípustné barvení grafu a 1-distanční chromatické číslo χ_1 odpovídá chromatickému číslu χ. Poznamenejme, že přípustné barvení grafu G^2, kde G^2 značí druhou mocninu grafu G, odpovídá 2-distančnímu barvení grafu G, a tedy pro libovolný graf G platí $\chi_2(G) = \chi(G^2)$. Přípustnému barvení, jak již bylo řečeno dříve, se zde věnovat nebudeme. V následujícím textu uvažujeme $d \geq 2$.

Pro spodní odhad d-distančního chromatického čísla grafu G lze využít $(d-1)$-chromatického čísla grafu G nebo d-distančního chromatického čísla podgrafu H grafu G (viz následující tvrzení, která jsou důsledky pozorování 6.2 a 6.1, uvedených v kapitole 6).

Tvrzení 5.1 [26]. *Nechť G je graf. Potom $\chi_{d-1}(G) \leq \chi_d(G)$.*

Tvrzení 5.2 [26]. *Nechť G je graf a H jeho podgraf. Potom $\chi_d(H) \leq \chi_d(G)$.*

Stejně jako u pakovacího barvení, i zde je horní mez distančního chromatického čísla grafu G řádu n rovna n a této meze se nabývá pro úplné grafy K_n. Přirozenou spodní hranicí 2-distančního chromatického čísla grafu G je $\Delta(G)+1$, neboť každý vrchol a jeho sousedé musí být obarveni vzájemně různými barvami. Poznamenejme, že tato hranice platí i pro d-distanční chromatické číslo, kde $d > 2$.

5.1 Distanční barvení s parametrem $d = 2$

Tato kapitola se zabývá 2-distančním barvením grafů. Připomeňme, že 2-distanční barvení odpovídá S-pakovacímu barvení se sekvencí $S = (2, 2, 2, \dots)$. Distančnímu barvení s parametrem $d = 2$ základních tříd grafů se věnovali Goddard a Xu v článku [26]. Pro cestu P libovolné délky a kružnici C délky $3l$ ($l \in \mathbb{N}$) dokázali, že $\chi_2(P) = \chi_2(C) = 3$.

Antonucci [1] dokázal spodní mez 2-distančního chromatického čísla grafu G, neobsahující kružnice délky 3 a 4, jako funkci počtu hran a řádu grafu G.

Věta 5.3 [1]. *Nechť G je graf řádu n s m hranami, a nechť G neobsahuje kružnice délky 3 a 4. Potom $\chi_2(G) \geq n^3/(n^3 - 4m^2)$.*

5.1.1 Distanční barvení s parametrem $d = 2$ rovinných a subkubických rovinných grafů

Problematika 2-distančního barvení je intenzivně zkoumána již několik desítek let, především pro rovinné grafy. Wegner [46] se zabýval 2-distančním barvením rovinných a subkubických rovinných grafů. V roce 1977 dokázal, že $\chi_2(G) \leq 8$ pro subkubické rovinné grafy G a vyslovil následující hypotézu pro rovinné grafy.

Hypotéza 5.4 [46]. *Nechť G je rovinný graf. Potom*

$$\chi_2(G) \leq \begin{cases} 7, \text{ je-li } \Delta(G) = 3, \\ \Delta(G) + 5, \text{ je-li } 4 \leq \Delta(G) \leq 7, \\ \lfloor 3\Delta(G)/2 \rfloor, \text{ je-li } \Delta(G) \geq 8, \end{cases}$$

Tato hypotéza byla pro subkubické rovinné grafy dokázána roku 2017 v článku [27].

Věta 5.5 [27]. *Nechť G je subkubický rovinný graf. Potom $\chi_2(G) \leq 7$.*

Horní mez 2-distančního chromatického čísla subkubických rovinných grafů s dostatečně velikým obvodem lze snížit na 5 (resp. 4). Borodin a Ivanova [6] (resp. [7]) dokázali, že $\chi_2(G) \leq 5$ (resp. ≤ 4) pro subkubický rovinný graf s obvodem alespoň 12 (resp. 24). Poznamenejme, že 4 je nejlepší možná horní hranice, neboť vrchol stupně 3 a jeho sousedé musí být obarveni vzájemně různými barvami.

Další, kdo se zabýval 2-distančním barvením rovinných grafů byl Wong [47]. Dokázal horní mez 2-distančního chromatického čísla pro libovolný rovinný graf jako funkci maximálního stupně grafu.

Věta 5.6 [47]. *Nechť G je rovinný graf s maximálním stupněm $\Delta(G)$. Potom $\chi_2(G) \leq 3\Delta(G) + 5$.*

Autoři van den Heuvel a McGuinness [28] vylepšili horní odhad $\chi_2(G)$ pro rovinný graf G s $\Delta(G) \geq 20$ na $2\Delta(G)+25$. Molloy a Salavatipour [37] snížili horní odhad 2-distančního chromatického čísla rovinného grafu G na $\lceil 5/3\Delta(G) \rceil + 78$. Navíc pro $\Delta(G) \geq 241$ dokázali, že $\chi_2(G) \leq \lceil 5/3\Delta(G) \rceil + 25$. Bu a Lv [12] shora omezili $\chi_2(G)$ rovinných grafů s $\Delta(G) \geq 15$ a bez kružnic délky3, 4 a 7 na $\Delta(G)+4$. Borodin a spol. [5] a Dvořák a spol. [15] snížili horní mez 2-distančního chromatického čísla na $\Delta(G) + 1$ pro rovinné grafy G s dostatečně velkým maximálním stupněm $\Delta(G)$ a obvodem alespoň 7.

5.1.2 Distanční barvení s parametrem $d = 2$ Kartézských součinů a sítí

Tato kapitola se zabývá 2-distančním barvením r-dimenzionálních sítí $G_r(n_1, \dots, n_r)$ jakožto Kartézkým součinem $P_{n_1} \square P_{n_2} \square \dots P_{n_r}$, kde $n_i \geq 2$ pro $i = 1, 2, \dots r$. Dále barvením nekonečných sítí, konkrétně čtvercové $\mathbb{Z}^2$, trojúhelníkové $\mathcal{T}$ a šestiúhelníkové $\mathcal{H}$.

Fertin a spol. [19] určili 2-distanční chromatické číslo grafu $G_r(n_1, \dots, n_r)$ s využitím parametru r.

Věta 5.7 [19]. *Nechť $G_r(n_1, \dots, n_r)$ je r-dimenzionální síť s $r \geq 1$. Potom $\chi_2(G_r(n_1, \dots, n_r)) = 2r + 1$.*

Důsledkem věty 5.7 pro $r = 2$ je $\chi_2(\mathbb{Z}^2) = 5$ [19]. Pro nekonečnou trojúhelníkovou síť $\mathcal{T}$ je 2-distanční chromatické číslo rovno 7 a pro nekonečnou šestiúhelníkovou síť $\mathcal{H}$ rovno 4. Tyto hodnoty jsou získány jako důsledky vět 5.19 a 5.20 pro $d = 2$, které budou uvedeny v kapitole 5.2.

5.1.3 Distanční barvení s parametrem $d = 2$ distančních grafů G(D)

Tato kapitola se zabývá 2-distančním barvením distančních grafů $G(D)$. Připomeňme, že 2-distanční barvení grafu G odpovídá přípustnému barvení grafu G^2, kde G^2 je druhá mocnina grafu G.

Distanční graf $G(D)$ s distanční množinu $D = \{1, \dots, k\}$ odpovídá grafu P_∞^k, tedy k-té mocnině nekonečné cesty. Pro tyto grafy dokázali Benmedjdoub a spol. [4], že 2-distanční chromatické číslo nabývá nejnižší možné hodnoty, tedy $\Delta + 1$.

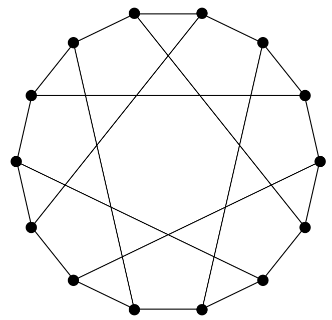
Věta 5.8 [4]. *Nechť $G(D)$ je distanční graf s distanční množinou $D = \{1, 2, \dots, k\}$, kde $k \geq 2$. Potom $\chi_2(G(D)) = 2k + 1 = \Delta(G(D)) + 1$.*

Stejní autoři se zabývali též distančními grafy s distanční množinu $D = \{1, a\}$, kde $a \geq 3$ (případ $a = 2$ zahrnuje věta 5.8).

Věta 5.9 [4]. *Nechť $G(D)$ je distanční graf s distanční množinou $D = \{1, a\}$, kde $a \geq 3$. Potom*

$$\chi_2(G(D)) = \begin{cases} 5, \text{ je-li } a \equiv 2 \ (mod\ 5) \text{ nebo } a \equiv 3 \ (mod\ 5), \\ 6, \text{ jinak.} \end{cases}$$

Dále uvažujme distanční množinu tvaru $D = \{1, a, a + 1\}$, kde $a \geq 3$ (případ $a = 2$ opět zahrnuje věta 5.8). Dalším výsledkem Benmedjdouba a spol. byl horní odhad 2-distančního chromatického čísla grafu $G(D)$. Dokázali, že $\chi_2(G(D)) \leq 9$



Obrázek 2: Heawoodův graf.

pro $a \geq 3$ [4]. A pro $a \equiv 2 \pmod 7$, $a \equiv 4 \pmod 7$ určili přesnou hodnotu 2-distančního chromatického čísla grafu $G(D)$.

Věta 5.10 [4]. *Nechť $G(D)$ je distanční graf s distanční množinou $D = \{1, a, a+1\})$, kde $a \geq 3$. Potom $\chi_2(G(D)) = 7$ právě tehdy, když $a \equiv 2$ (mod 7) nebo $a \equiv 4$ (mod 7).*

Dále se zabývali distančními grafy s distanční množinou $D = \{1, \ldots, m, a\}$, kde $2 \leq m < a$ (poznamenejme, že případ $a = m + 1$ je opět zahrnut ve větě 5.8) a shora odhadli $\chi_2(G(D))$. Dokázali, že $\chi_2(G(D)) \leq 4m + 2$ [4]. A pro $a \equiv m + 1 \pmod{2m + 3}$, $a \equiv m + 2 \pmod{2m + 3}$ určili přesnou hodnotu χ_2.

Věta 5.11 [4]. *Nechť $G(D)$ je distanční graf s distanční množinou $D = \{1, \ldots, m, a\}$, kde $2 \leq m < a$. Potom $\chi_2(G(D)) = 2m + 3$ právě tehdy, když $a \equiv m + 1$ (mod $2m + 3$) nebo $a \equiv m + 2$ (mod $2m + 3$).*

5.2 Distanční barvení s parametrem $d \geq 3$

První část této kapitoly obsahuje známé výsledky pro 3-distanční chromatické číslo a druhá část je věnována d-distančnímu chromatickému číslu.

F. Kramer a H. Kramer [33] se zabývali 3-distančním chromatickým číslem. Dokázali, že pro bipartitní graf G lze shora odhadnout 3-distanční chromatické číslo pomocí maximálního stupně grafu $\Delta(G)$ na $2(1 + \Delta(G)(\Delta(G) - 1))$. Dalším jejich výsledkem byl horní odhad 3-distančního chromatického čísla bipartitního subkubického grafu hodnotou 14 [33]. Tato hranice nelze v jistém smyslu vylepšit. Příkladem je Heawoodův graf (kubický graf na 14 vrcholech s průměrem 3, viz obrázek 2), který má 3-distanční chromatické číslo rovno 14.

Pro bipartitní subkubické rovinné grafy lze shora odhadnout 3-distanční chromatické číslo 8 [33]. Tato hranice opět nelze v jistém smyslu vylepšit. Existují totiž kubické rovinné grafy s $\chi_3(G) = 8$. Příkladem je 3-rozměrná hyperkrychle Q_3, jejíž průměr je 3, a tudíž každý z osmi vrcholů musí být obarven jinou barvou. Předchozí výsledky jsou shrnuty do následující věty.

Věta 5.12 [33]. *Nechť G je graf.*

(1) Je-li G bipartitní, potom $\chi_3(G) \leq 2(1 + \Delta(G)(\Delta(G) - 1))$.

(2) Je-li G bipartitní (sub)kubický, potom $\chi_3(G) \leq 14$.

(3) Je-li G bipartitní (sub)kubický a rovinný, potom $\chi_3(G) \leq 8$.

F. Kramer a H. Kramer se též zabývali d-distančním barvením. Jsou autory úvodního článku [34] z roku 1969, ve kterém charakterizovali grafy s d-distančním chromatickým číslem $d + 1$.

Věta 5.13 [34]. *Nechť G je graf. Potom $\chi_d(G) = d + 1$ právě tehdy, když graf G splňuje jednu z následujících podmínek:*

(1) $|V| = d + 1$,

(2) G je cesta délky větší než d,

(3) G je kružnice délky násobku $d + 1$.

Poznamenejme, že tato věta určuje d-distanční chromatické číslo cesty P_n pro $n \geq d + 1$ a kružnice C_n pro $n = l(d + 1), l \in \mathbb{N}$. Přesnou hodnotu d-distančního chromatického čísla libovolné kružnice C dokázali Niranjan a Srinivasa [38].

Věta 5.14 [38]. *Nechť C_n je kružnice na n vrcholech a r a l jsou celá čísla taková, že $n = l(d + 1) + r$, $0 \leq r < d + 1$. Potom $\chi_d(C_n) = d + 1 + \lceil \frac{r}{l} \rceil$.*

Jendroľ a Skupień [31] odhadli d-distanční chromatické číslo rovinných grafů na $6 + \frac{3M+3}{M-2}((M - 1)^{d-1} - 1)$, kde $M = \max\{8, \Delta(G)\}$. Madaras a Marcinová v [35] vylepšili horní odhad d-distančního chromatického čísla rovinných grafů na $6 + \frac{2M+12}{M-2}((M - 1)^{d-1} - 1)$, kde $M = \max\{12, \Delta(G)\}$. Následně Holub v článku [29] uvedl řádově lepší odhad d-distančního chromatického čísla pro m-souvislé rovinné grafy G průměru $\mathrm{diam}(G)$.

Věta 5.15 [29]. *Nechť G je m-souvislý rovinný graf řádu n průměru $diam(G)$. Nechť $d < diam(G)$. Potom*

$$\chi_d(G) \leq \begin{cases} n - 1, \text{ je-li } d = diam(G) - 1, \\ n - (diam(G) - d - 2)m - 2, \text{ je-li } d < diam(G) - 1. \end{cases}$$

Sharp [40] jako první uvedl spodní hranici d-distančního chromatického čísla obecného grafu G. Jeho výsledek byl vylepšen autory Niranjanem a Srinivasou [38] - viz následující věta 5.16. Poznamenejme, že G^r_x (resp. G^r_{xy}) značí podgraf grafu G, indukovaný na vrcholech ve vzdálenosti nejvýše $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ od x (resp. x nebo y).

Věta 5.16 [38]. *Nechť G je graf. Potom*

$$\chi_d(G) \geq \begin{cases} \max_{x \in V(G)} |V(G_x^{\frac{d}{2}})|, & \text{je-li } d \text{ sudé}, \\ \max_{xy \in H(G)} |V(G_{xy}^{\frac{d-1}{2}})|, & \text{je-li } d \text{ liché}. \end{cases}$$

Dále Niranjan a Srinivasa [38] určili spodní odhad d-distančního chromatického čísla stromů.

Věta 5.17 [38]. *Nechť T je strom. Potom*

$$\chi_d(T) \geq \begin{cases} \max_{x \in V(G)} |V(T_x^{\frac{d}{2}})|, & \text{je-li } d \text{ sudé}, \\ \max_{xy \in H(G)} |V(T_{xy}^{\frac{d-1}{2}})|, & \text{je-li } d \text{ liché}. \end{cases}$$

5.2.1 Distanční barvení s parametrem d sítí

Tato kapitola se zabývá d-distančním barvením 2-dimenzionální sítě $G_2(n_1, n_2)$ a nekonečných sítí, konkrétně čtvercové $\mathbb{Z}^2$, trojúhelníkové $\mathcal{T}$ a šestiúhelníkové $\mathcal{H}$. Fertin a spol. [19] se zabývali d-distančním chromatickým číslem těchto grafů.

Věta 5.18 [19]. *Nechť $G_2(n_1, n_2)$ je 2-dimenzionální síť a n_1, n_2 jsou dostatečně veliká. Potom*

$$\chi_d(G_2(n_1, n_2)) = \begin{cases} \frac{(d+1)^2+1}{2}, & \text{je-li } d \text{ sudé}, \\ \frac{(d+1)^2}{2}, & \text{je-li } d \text{ liché}. \end{cases}$$

Poznamenejme, že věta 5.18 platí i pro nekonečnou čtvercovou síť $\mathbb{Z}^2$. Ševčíková [43] dokázala přesnou hodnotu d-distančního chromatického čísla nekonečné trojúhelníkové sítě $\mathcal{T}$.

Věta 5.19 [43]. *Nechť $\mathcal{T}$ je nekonečná trojúhelníková síť. Potom $\chi_d(\mathcal{T}) = \lceil \frac{3}{4}(d+1)^2 \rceil$.*

Jacko a Jendroľ [30] se zabývali d-distančním chromatickým číslem nekonečné šestiúhelníkové sítě $\mathcal{H}$.

Věta 5.20 [30]. *Nechť $\mathcal{H}$ je nekonečná šestiúhelníková síť. Potom*

(1) $\chi_d(\mathcal{H}) = [\frac{3}{8}(d+1)^2]$, *je-li* d *liché,*

(2) $\chi_2(\mathcal{H}) = 4$,

(3) $\chi_4(\mathcal{H}) = 11$,

(4) $\chi_6(\mathcal{H}) = 20$,

(5) $\frac{3}{8}d^2 + \frac{3}{4}d + 2 \leq \chi_d(\mathcal{H}) \leq [\frac{3}{8}(d+\frac{4}{3})^2]$, *je-li* $d \geq 8$ *sudé.*

Poznamenejme, že symbol $[x]$ ve větě 5.20 značí celé číslo splňující $x - \frac{1}{2} < [x] \leq x + \frac{1}{2}$. Dále se domnívají, že $\chi_d(\mathcal{H})$ nabývá horní meze ve větě 5.20 (5), tedy $\chi_d(\mathcal{H}) = [\frac{3}{8}(d+\frac{4}{3})^2]$, kde $d = 2k, k \in \mathbb{N}$ [30].

6 Zpracování známých výsledků v oblasti S-pakovacího barvení

Nyní se budeme věnovat nejobecnějšímu barvení v naší práci, tedy S-pakovacímu barvení. Toto barvení zobecňuje mimo jiné předešlá dvě barvení - pakovací a distanční. Definici jsme uvedli v kapitole 3 a zde připomeňme, že S je neklesající posloupnost přirozených čísel $a_i, i \in \mathbb{N}$ a S-pakovacím barvením grafu G rozumíme funkci f, která přiřazuje množině vrcholů $V(G)$ barvy (hodnoty) z množiny $\mathbb{N}$ tak, že vrcholy s barvou i musí být ve vzdálenosti větší než a_i. Nejmenší číslo k, pro které existuje S-pakovací barvení grafu G pomocí barev $1, 2, \ldots, k$ nazýváme S-pakovací chromatické číslo a značíme jej $\chi_S(G)$.

Spodní hranici $\chi_S(G)$ lze odhadnout S-pakovacím číslem podgrafu H grafu G.

Pozorování 6.1 [26]. *Nechť H je podgraf grafu G a S neklesající sekvence přirozených čísel. Potom $\chi_S(H) \leq \chi_S(G)$.*

Horní hranici S-pakovacího chromatického čísla lze odhadnout pomocí S'-pakovacího chromatického čísla, je-li S ve všech členech menší nebo rovna S'.

Pozorování 6.2 [26]. *Nechť G je graf, $S = (a_1, a_2, \ldots)$, $S' = (b_1, b_2, \ldots)$, $\chi_{S'}(G) = k$ a $a_i \leq b_i$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots, k$. Potom $\chi_S(G) \leq k$.*

Poznamenejme, že je-li sekvence S ve všech složkách větší nebo rovna S', potom S'-pakovací chromatické číslo bude spodním odhadem χ_S. Obecnou horní hranicí S-pakovacího chromatického čísla pro libovolnou sekvenci S a graf G řádu n je n (viz pozorování 6.3 (1)). Této hodnoty opět nabývá S-pakovací chromatické číslo úplných grafů K_n nezávisle na tvaru sekvence S. Následující tvrzení charakterizuje grafy v závislosti na dané sekvenci S s minimální (resp. maximální) možnou hodnotou S-pakovacího chromatického čísla.

Pozorování 6.3 [26]. *Nechť G je graf řádu n a $S = (a_1, a_2, \ldots)$. Potom*

(1) $1 \leq \chi_S(G) \leq n$,

(2) $\chi_S(G) = 1$ *právě tehdy, když G nemá hrany,*

(3) $\chi_S(G) = n$ *právě tehdy, když $a_1 \geq diam(G)$.*

Dále Goddard a Xu charakterizovali grafy s S-pakovacím chromatickým číslem 2 v závislosti na dané sekvenci S.

Tvrzení 6.4 [26]. *Nechť G je graf a $S = (a_1, a_2, \ldots)$.*

(1) Je-li $a_1 = a_2 = 1$, potom $\chi_S(G) = 2$ právě tehdy, když G je bipartitní.

(2) Je-li $a_1 = 1, a_2 > a_1$, potom $\chi_S(G) = 2$ právě tehdy, když G je hvězda.

(3) Je-li $a_1 > 1$, potom $\chi_S(G) = 2$ právě tehdy, když G je K_2.

Nyní uvažujme sekvenci S délky 3 a s prvním členem 1, tedy $S = (1, a_2, a_3)$. Goddard a Xu [26] dokázali následující tvrzení.

Tvrzení 6.5 [26]. *Nechť G je graf, $S = (1, a_2, a_3)$ a $4 \leq a_2 \leq a_3$. Potom G má S-pakovací barvení právě tehdy, když $\beta(G) \leq 2$.*

Dalším jejich výsledkem bylo dokázání přesné hodnoty S-pakovacího chromatického čísla úplného bipartitního grafu $K_{m,n}$ a kola W_n.

Důsledek 6.6 [26]. *Nechť $K_{m,n}$ je úplný bipartitní graf s $m \leq n$ a $S = (a_1, a_2, \dots)$. Potom*

$$\chi_S(K_{m,n}) = \begin{cases} 2, & \text{je-li } a_1 = a_2 = 1, \\ m+1, & \text{je-li } a_1 = 1 \text{ a } a_2 > a_1, \\ m+2, & \text{je-li } a_1 > 1. \end{cases}$$

Tvrzení 6.7 [26]. *Nechť W_n je kolo a $S = (a_1, a_2, \dots)$. Potom*

$$\chi_S(W_n) = \begin{cases} 3, & \text{je-li } a_1 = a_2 = 1 \text{ a } n \text{ liché}, \\ 4, & \text{je-li } a_1 = a_2 = 1 \text{ a } n \text{ sudé}, \\ \lfloor n/2 \rfloor + 2, & \text{je-li } a_1 = 1 \text{ a } a_2 > a_1, \\ n, & \text{je-li } a_1 > 1. \end{cases}$$

Je-li graf G průměru 2 a mezi jeho chromatickým číslem $\chi(G)$, řádem n a nezávislostí $\alpha(G)$ platí vztah $\chi(G) = n/\alpha(G)$, potom lze určit S-pakovací chromatické číslo v závislosti na členech posloupnosti S.

Tvrzení 6.8 [26]. *Nechť G je graf řádu n s průměrem 2, $\chi(G) = s = n/\alpha(G)$ a $S = (a_1, a_2, \dots)$. Potom*

$$\chi_S(G) = \begin{cases} s, & \text{je-li } a_s = 1, \\ n - (\alpha(G) - 1)k, & \text{je-li } a_1 = \dots = a_k = 1 \text{ a } a_{k+1} > 1 \text{ pro nějaké } 1 \leq k < s, \\ n, & \text{je-li } a_1 > 1. \end{cases}$$

6.1 S-pakovací barvení nekonečné cesty P_∞

Tato kapitola se věnuje S-pakovacímu barvení nekonečné cesty P_∞. Pro spodní odhad S-pakovacího chromatického čísla nekonečné cesty P_∞ lze využít tzv. metody hustot. Nechť je dána sekvence $S = (a_1, a_2, \dots)$. Hustota barvy i je definována poměrem $1/(a_i+1)$, neboť nejvýše $1/(a_i+1)$ vrcholů cesty P_∞ může obdržet barvu i (viz [20], [24]). Je-li $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i+1} < 1$, potom jednoduchým pozorováním lze odvodit, že S-pakovací chromatické číslo musí být větší než k. Tedy opačně, je-li $\chi_S(P_\infty) \leq k$, potom $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i+1} \geq 1$ [26]. Pomocí hustot barev lze též rozhodnout, zda je S-pakovací chromatické číslo konečné, či nikoli.

Pozorování 6.9 [26]. *Nechť P_∞ je nekonečná cesta a $S = (a_1, a_2, \dots)$. Je-li $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i+1} \leq 1$, potom $\chi_S(P_\infty) = \infty$.*

Upozorněme, že opačná implikace pozorování 6.9 neplatí. Uvažujeme-li sekvence $S = (1, 2, 4, 8, \dots)$, potom $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i+1} > 1$, ale $\chi_S(P_\infty) = \infty$ (viz tvrzení 6.14 níže).

Nyní se zaměříme na posloupnosti S, pro které je $\chi_S(P_\infty)$ malé. Goddard a Xu v článku [26] charakterizovali sekvence S, pro které je $\chi_S(P_\infty) = 2$.

Pozorování 6.10 [26]. *Nechť P_∞ je nekonečná cesta a $S = (a_1, a_2, \dots)$. Potom $\chi_S(P_\infty) = 2$ právě tehdy, když $a_1 = a_2 = 1$.*

Poznamenejme, že P_∞ je zřejmě bipartitní graf. Dále dokázali, že nekonečná cesta P_∞ má S-pakovací chromatické číslo rovno 3 právě tehdy, když posloupnost $S = (a_1, a_2, a_3)$ je tvaru $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 3)$ a $(2, 2, 2)$ [26].

Nyní uvažujme sekvenci S ve tvaru aritmetické posloupnosti. Je-li $S = (1, 2, 3, \dots)$, potom se jedná o pakovací barvení a graf nekonečné cesty P_∞ lze obarvit 3 barvami (viz pod tvrzením 4.3). Goddard a Xu dokázali, že na S-pakovací barvení nekonečné cesty P_∞ s danou posloupností $S = (2, 3, 4 \dots)$ stačí 6 barev [26].

Nyní uvažujme obecnější aritmetickou posloupnost S s prvním členem a a diferencí 1. Potom lze S-pakovací chromatické číslo odhadnout pomocí prvního členu a.

Tvrzení 6.11 [26]. *Nechť $S = (a, a+1, a+2, \dots)$, P_∞ je nekonečná cesta a e značí Eulerovo číslo. Potom $(e-1)a \leq \chi_S(P_\infty) \leq 2a + 3$.*

Poznamenejme, že Goddard a spol. [24] obarvili nekonečnou cestu P_∞ barvami $l, \dots, 3l+2$, kde $3l+2$ je hodnota největší použité barvy, zatímco v tvrzení 6.11 je uveden počet barev, kterým lze nekonečnou cestu obarvit.

Dále Goddard a Xu [26] dokázali, že pro každou aritmetickou posloupnost je χ_S konečné - viz následující tvrzení.

Tvrzení 6.12 [26]. *Nechť S je aritmetická posloupnost a P_∞ je nekonečná cesta. Potom $\chi_S(P_\infty)$ je konečné číslo.*

V článku [26] byl rovněž uveden i spodní odhad S-pakovacího chromatického čísla grafu P_∞.

Tvrzení 6.13 [26]. *Nechť $S = (a, a+d, a+2d, \dots)$, P_∞ je nekonečná cesta a e značí Eulerovo číslo. Potom*

$$\chi_S(P_\infty) \geq \begin{cases} (e^d - 1)(a - d + 1)/d, & \text{je-li } a \geq d \\ ((a+1)e^{\frac{d}{1+1/a}} - (a - d + 1))/d, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro posloupnost S ve tvaru geometrické posloupnosti $(1, 2, 4, 8, \dots)$ již S-pakovací chromatické číslo grafu P_∞ není konečné - viz následující tvrzení.

Tvrzení 6.14 [26]. *Nechť $S = (1, 2, 4, 8, \dots)$ a P_∞ je nekonečná cesta. Potom $\chi_S(P_\infty) = \infty$.*

V úvodu této podkapitoly jsme zmínili, že pro konečné S-pakovací chromatické číslo nekonečné cesty P_∞ platí $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i+1} \geq 1$. Naopak je zřejmé, že jsou-li členy a_i, $i = 1, 2, 3, \dots$ sekvence S omezené číslem n, potom lze nekonečnou cestu obarvit barvami $1, 2, \dots, n+1$ použitím vzoru $123 \dots (n+1)$ v periodickém barvení[1] [26].

Goddard a Xu [26] dokázali, že pro posloupnost S se členy $a_i = 2^i$ pro $i = 1, 2, \dots, k$ a $a_{k+1} = 2^k - 1$ je S-pakovací chromatické číslo nekonečné cesty P_∞ konečné.

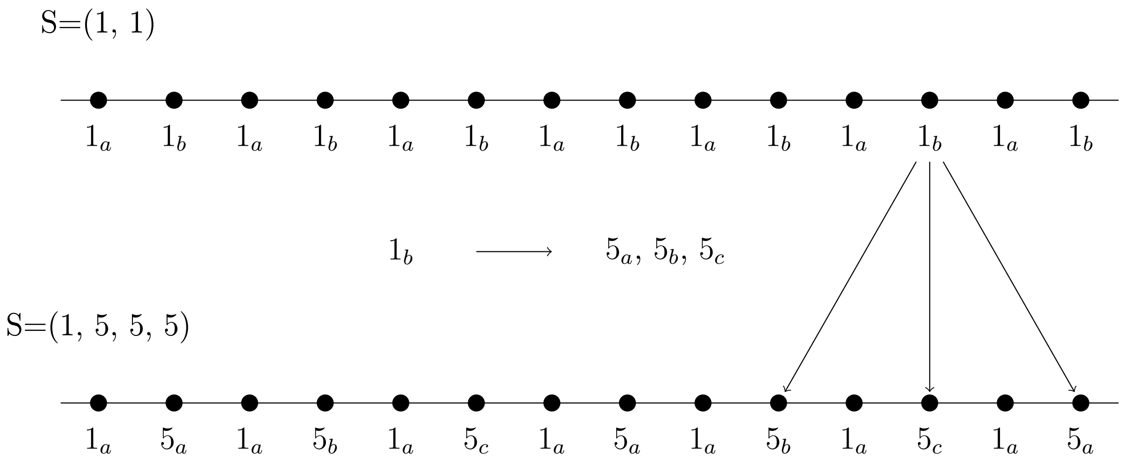
Tvrzení 6.15 [26]. *Nechť P_∞ je nekonečná cesta, $S = (a_1, a_2, \dots)$, kde $a_i = 2^i - 1$ pro $i = 1, 2, \dots, k$ a $a_{k+1} = 2^k - 1$. Potom $\chi_S(P_\infty) = k + 1$.*

Z výše uvedených tvrzení je patrné, že zlom v konečnosti S-pakovacího chromatického čísla grafu P_∞ nastává mezi aritmetickou a geometrickou posloupností. Přesná hranice zatím není známa.

Jiný postup pro S-pakovací barvení nekonečné cesty P_∞ je z pohledu roztříštěných sekvencí. Definujme sekvenci (0) jako počáteční sekvenci. Poznamenejme, že tato sekvence (0) nepatří mezi roztříštěné sekvence, je pouze výchozí sekvencí pro generování roztříštěných sekvencí. Pro počáteční sekvenci (0) graf obsahuje, z pohledu pakovacích tříd, pouze jednu pakovací třídu X_0.

Definujme roztříštěnou sekvenci jako takovou, kterou lze získat z počáteční sekvence (0) nebo jiné roztříštěné sekvence roztříštěním. Roztříštění je iterační

[1]Periodické barvení je takové, kde existuje celé číslo p takové, že vrcholy a a $p + a$ mají stejnou barvu pro všechna a. Například 123 tvoří vzor periodického barvení $\dots 123123 \dots$.



Obrázek 3: Vznik roztříštěné sekvence $S = (1, 5, 5, 5)$ ze sekvence $S = (1, 1)$.

proces, kdy pakovací třídu X_{a_i} rozdělíme na r pakovacích tříd $X_{r(a_i+1)-1}$. Například uvažujeme-li roztříštěnou sekvenci $(1, 1)$, potom lze pakovací třídu X_1 rozdělit do 3 pakovacích tříd $X_{3(1+1)-1} = X_5$. Získaná roztříštěná sekvence je tvaru $(1, 5, 5, 5)$ (viz obrázek 3).

Poznamenejme, že součet hustot barev v S-pakovacím barvení grafu P_∞, kde S je roztříštěná sekvence, je vždy roven 1.

Roztříštěné sekvence délky nejvýše 5 pro nekonečnou cestu P_∞ jsou následovné: $(1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(3, 3, 3, 3)$, $(2, 2, 5, 5)$, $(1, 5, 5, 5)$, $(1, 3, 7, 7)$, $(4, 4, 4, 4, 4)$, $(3, 3, 5, 5, 5)$, $(3, 3, 3, 7, 7)$, $(2, 5, 5, 5, 5)$, $(2, 2, 8, 8, 8)$, $(2, 2, 5, 11, 11)$, $(1, 7, 7, 7, 7)$, $(1, 5, 5, 11, 11)$, $(1, 3, 11, 11, 11)$, a $(1, 3, 7, 15, 15)$ [25].

Dále definujme pojem minimální pakovací chromatické sekvence ($MPCS$). Je to konečná sekvence S, pro kterou je graf S-obarvitelný, ale při zvětšení libovolného členu sekvence S už není. Následující tvrzení dává do souvislosti roztříštěné a $MPCS$ sekvence.

Tvrzení 6.16 [25]. *Pro graf P_∞ je každá roztříštěná sekvence $MPCS$ sekvencí.*

Následující věta určuje všechny $MPCS$ sekvence délky nejvýše 5 pro nekonečnou cestu P_∞.

Tvrzení 6.17 [25]. *Pro graf P_∞ a sekvenci délky nejvýše 5, jsou všechny roztříštěné sekvence (uvedeny v odstavci nad tvrzením 6.16) $MPCS$ sekvencemi a navíc sekvence $(2, 4, 4, 4, 6), (2, 3, 4, 4, 9), (2, 3, 3, 8, 8)$ a $(2, 3, 3, 4, 12)$ jsou též $MPCS$.*

6.2 S-pakovací barvení Kartézských součinů a nekonečných sítí

Tato kapitola se věnuje S-pakovacímu barvení Kartézského součinu $P_2 \square P_\infty$ a dále S-pakovacímu barvení nekonečných sítí, konkrétně čtvercové $\mathbb{Z}^2$, trojúhelníkové $\mathcal{T}$ a šestiúhelníkové $\mathcal{H}$.

Následující věta určuje $MPCS$ sekvence délky nejvýše 5 pro Kartézský součin $P_2 \square P_\infty$.

Tvrzení 6.18 [25]. *Nechť G je Kartézský součin $P_2 \square P_\infty$ a sekvence S je délky nejvýše 5. Potom sekvence $MPCS$ jsou sekvence* $(1,1), (2,2,2,2), (1,3,3,3)$, $(2,2,2,3,3)$ *a* $(1,3,3,5,5)$.

Poznamenejme, že sekvence v právě uvedeném tvrzení 6.18 jsou též roztříštěnými sekvencemi. Ve větě 4.9 je uvedeno, že pakovací chromatické číslo Kartézského součinu $P_2 \square P_\infty$ je 5 [24]. Z tvrzení 6.18 je zřejmé, že některé členy sekvence S lze zvětšit a graf $P_2 \square P_\infty$ bude stále S-obarvitelný 5 barvami. Proto se lze dívat na $MPCS$ sekvence jako na optimální sekvence z hlediska S-pakovacího barvení daného grafu.

Nyní uvažujme obecnější aritmetickou posloupnost S s prvním členem a a diferencí 1. Potom lze též S-pakovací chromatické číslo Kartézského součinu $P_2 \square P_\infty$ omezit.

Tvrzení 6.19 [25]. *Nechť $S = (a, a+1, a+2, a+3, \dots)$ a e značí Eulerovo číslo. Potom $(e^2 - 1)(a-1) \leq \chi_S(P_2 \square P_\infty) \leq 8a + 12$.*

Pro speciální případ $S = (2, 3, 4, \dots)$ lze vylepšit spodní odhad z tvrzení 6.19 na 10 a horní odhad na 14 [25].

Goddard a Xu [25] dokázali, že pro libovolnou aritmetickou postupnost S a pro libovolný konečný graf G platí $\chi_S(G \square P_\infty) < \infty$.

Stejní autoři se věnovali i S-pakovacímu barvení nekonečných sítí. Charakterizovali sekvence S, pro které je S-pakovací chromatické číslo nekonečné čtvercové sítě $\mathbb{Z}^2$ nejvýše 6.

Tvrzení 6.20 [25]. *Nechť $\mathbb{Z}^2$ je nekonečná čtvercová síť a $S = (a_1, a_2, \dots)$. Potom*

$$\chi_S(\mathbb{Z}^2) = \begin{cases} 2, & \text{právě tehdy, když } a_1 = a_2 = 1, \\ 5, & \text{právě tehdy, když } a_1 = 1, a_2 \geq 2 \text{ a } a_5 \leq 3, \text{ nebo } S = (2,2,2,2,2), \\ 6, & \text{právě tehdy, když } S = (2,2,2,2,3,3) \text{ nebo } (1,2,2,2,4,4). \end{cases}$$

Dále neexistuje žádná sekvence S taková, že $\chi_S(\mathbb{Z}^2) = 3$ nebo $\chi_S(\mathbb{Z}^2) = 4$.

Ve větě 4.10 je uvedeno, že pakovací chromatické číslo nekonečné čtvercové sítě $\mathbb{Z}^2$ je mezi 13 a 15 [36]. Následující věta říká, že je-li S nekonstantní aritmetická posloupnost jiná než $(1, 2, 3, \dots)$, potom S-pakovací chromatické číslo grafu $\mathbb{Z}^2$ není konečné.

Tvrzení 6.21 [25]. *Nechť $\mathbb{Z}^2$ je nekonečná čtvercová síť a S nekonstantní aritmetická posloupnost jiná než $(1, 2, 3, \dots)$. Potom $\chi_S(\mathbb{Z}^2) = \infty$.*

Tedy uvažujeme-li aritmetickou posloupnost $S = (2, 3, 4, \dots)$, podle tvrzení 6.21 není S-pakovací chromatické číslo grafu $\mathbb{Z}^2$ konečné. Přirozený způsob modifikace posloupnosti S pro dosažení konečnosti S-pakovacího chromatického čísla je přidání dvojek na začátek sekvence. Goddard a Xu [25] dokázali, že pro $S = (2, 2, 3, 4, \dots)$ je stále $\chi_S(\mathbb{Z}^2) = \infty$. Tedy přidání jedné dvojky nestačí na to, aby S-pakovací chromatické číslo bylo konečné. Omezenost S-pakovacího chromatického čísla $\chi_S(\mathbb{Z}^2)$ nastává až pro posloupnost $S = (2, 2, 2, 2, 3, 4, \dots)$ [25]. Pro sekvenci $S = (2, 2, 2, 3, 4, \dots)$ není známá odpověď, zda je S-pakovací chromatické číslo konečné [25].

Článek [25] se dále zabývá $MPCS$ sekvencemi nekonečné trojúhelníkové sítě $\mathcal{T}$ délky nejvýše 6.

Tvrzení 6.22 [25]. *Nechť $\mathcal{T}$ je nekonečná trojúhelníková síť a sekvence S je délky nejvýše 6. Potom $MPCS$ sekvence jsou $(1, 1, 1), (1, 1, 2, 2, 2)$ a $(1, 1, 3, 3, 3, 3)$.*

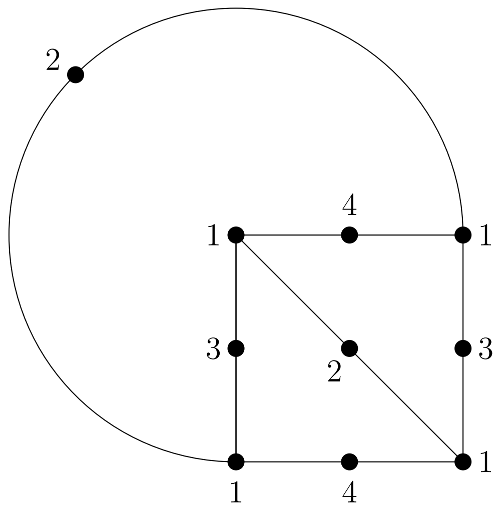
Sekvence uvedené ve tvrzení 6.22 jsou opět i roztříštěnými sekvencemi. Dále poznamenejme, že pro aritmetickou posloupnost $S = (1, 2, 3, \dots)$ je $\chi_S(\mathcal{T}) = \infty$ (viz věta 4.12). V následujícím tvrzení jsou uvedeny $MPCS$ sekvence délky nejvýše 5 pro nekonečnou šestiúhelníkovou sít $\mathcal{H}$.

Tvrzení 6.23 [25]. *Nechť $\mathcal{H}$ je nekonečná šestiúhelníková síť a sekvence S je délky nejvýše 5. Potom $MPCS$ sekvence jsou $(1, 1), (2, 2, 2, 2), (1, 3, 3, 3)$ a $(2, 2, 2, 3, 3)$.*

Sekvence uvedené v tvrzení 6.23 jsou opět i roztříštěnými sekvencemi. Ve větě 4.13 jsme uvedli, že pro $S = (1, 2, 3, \dots)$ je $\chi_S(\mathcal{H}) = 7$. Pro nekonstantní aritmetickou posloupnost S odlišnou od $(1, 2, 3, \dots)$ platí $\chi_S(\mathcal{H}) = \infty$ [25].

6.3 S-pakovací barvení podrozdělení grafů a subkubických grafů

První část této kapitoly obsahuje známé výsledky S-pakovacího barvení podrozdělení grafů a druhá část je věnována S-pakovacímu barvení subkubických grafů.



Obrázek 4: $(1,3,3,3)$-pakovací barvení grafu $S(K_4)$. Poznamenejme, že barvy $2,3$ a 4 jsou typu 3, tedy vrcholy obarvené těmito barvami jsou ve vzájemné vzdálenosti alespoň 4.

Gastineau a Togni se v článku [23] věnovali S-pakovacímu barvení podrozdělení $S(G)$ grafu G. Dokázali, že S-obarvitelnosti grafu G lze využít pro určení sekvence S', pro kterou je podrozdělení $S(G)$ grafu G S'-obarvitelné.

Tvrzení 6.24 [23]. *Nechť G je graf a $S = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Je-li graf G S-obarvitelný, potom i podrozdělení $S(G)$ grafu G je $(1, 2a_1 + 1, \ldots, 2a_k + 1)$-obarvitelné.*

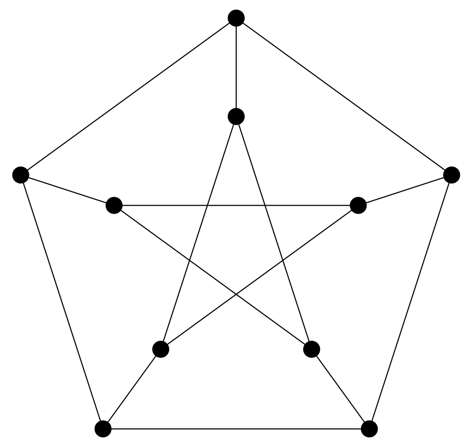
Podle Brooksovy věty[2] je každý subkubický graf G $(1,1,1)$-obarvitelný, kromě grafu K_4. Tedy podle tvrzení 6.24 je každé podrozdělení $S(G)$ grafu G $(1,3,3,3)$-obarvitelné, kromě $S(K_4)$. Obarvení grafu $S(K_4)$ vyhovující $(1,3,3,3)$-pakovacímu barvení je ilustrováno obrázkem 4. Zřejmě tedy platí:

Důsledek 6.25 [23]. *Nechť G je subkubický graf a $S(G)$ jeho podrozdělení. Potom graf $S(G)$ je $(1,3,3,3)$-obarvitelný.*

Důsledek 6.25 nelze v jistém smyslu vylepšit. Existuje mnoho subkubických grafů, jejichž podrozdělení nejsou $(1,3,3)$-obarvitelná. Příkladem je $S(C_3) = C_6$.

Uvažujme nyní S-pakovací barvení subkubických grafů se sekvencemi $S = (1,2,\ 2,\ldots,2)$ a $S = (1,1,2,\ldots,2)$. Uvědomme si, že vrchol stupně alespoň 3 v $(1,2,2)$-obarvitelném grafu nemůže být obarven barvou 1. Z toho $(1,2,2)$-obarvitelný graf neobsahuje tři vrcholy stupně alespoň 3 ve vzájemné vzdálenosti nejvýše 2. Tedy konkrétně žádný kubický graf není $(1,2,2)$-obarvitelný [23].

[2] Brooksova věta: Nechť G je souvislý graf různý od úplného grafu a liché kružnice. Pak existuje přípustné barvení G pomocí $\Delta(G)$ barev.



Obrázek 5: Petersenův graf.

Nicméně existuje $(1, 2, 2)$-obarvitelný subkubický graf [23].

Gastineau a Togni [23] dokázali následující výsledky:

Věta 6.26 [23].

(1) Každý subkubický graf je $(1, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$*-obarvitelný.*

(2) Každý subkubický graf je $(1, 1, 2, 2, 2)$*-obarvitelný.*

(3) Každý 3*-irregulární subkubický graf je* $(1, 2, 2, 2)$*-obarvitelný.*

(4) Každý 3*-irregulární subkubický graf je* $(1, 1, 2)$*-obarvitelný.*

Petersenův graf (viz obrázek 5) je příkladem kubického grafu, který není $(1, 2, 2, 2, 2, 2)$-obarvitelný ani $(1, 1, k, k')$-obarvitelný pro žádné $k, k' \geq 2$. Počítačové výsledky z [23] naznačují, že Petersenův graf může být jediný subkubický graf, který není $(1, 2, 2, 2, 2, 2)$-obarvitelný ani $(1, 1, 2, 3)$-obarvitelný [23]. Zároveň Gastineau a Togni [23] dokázali, že existuje bipartitní kubický graf, který není $(1, 2, 2, 2, 2, 3)$-obarvitelný. Tedy větu 6.26 (1) a (2) nelze v jistém smyslu vylepšit. Dále si všimněme, že kružnice C_5 je 3-irregulární graf, který není $(1, 2, 2)$-obarvitelný, což ukazuje, že ani větu 6.26 (3) nelze v jistém smyslu vylepšit.

7 Vlastní výsledky v oblasti S-pakovacího barvení distančních grafů $G(\{2, t\})$

Tato část se zaměřuje na S-pakovací chromatické číslo χ_S distančního grafu $G(D)$ s distanční množinou $D = \{2, t\}$ a sekvencí $S = (a_1, a_2, \dots)$, kde $a_i \in \{1, 2\}$. Jak již bylo definováno dříve, distanční graf $G(\{2, t\})$ je nekonečný graf s množinou vrcholů $\mathbb{Z}$ a každé dva odlišné vrcholy $i, j \in \mathbb{Z}$ jsou sousední právě tehdy, když $|i - j| = 2$ nebo $|i - j| = t$. Poznamenejme, že je-li t sudé, potom graf $G(\{2, t\})$ obsahuje dvě komponenty, obě isomorfní s grafem $G(\{1, t/2\})$. Tedy vždy uvažujeme t liché přirozené číslo. Pro každé liché přirozené číslo t je graf $G(\{2, t\})$ 4-regulární rovinný graf. Lze jej zakreslit do roviny pomocí 2 vrcholově disjunktních nekonečných spirál a t přímek $\ell_0, \ell_1 \dots, \ell_{t-1}$, které jsou ortogonální ke spirálám - viz obrázek 6 [18]. V důkazech horních hranic S-pakovacího čísla grafu $G(\{2, t\})$ často užíváme barvení $f : \mathbb{Z} \to \{1, 2, \dots, k\}$ používající vzor

$$c_1 \dots c_t,$$

kde $c_i \in \{1, 2, \dots, k\}$ pro $\forall i \in \{1, 2, \dots, t\}$. Míníme tím, že vrcholy $\mathbb{Z}$ jsou opakovaně obarvovány sekvencí barev $c_1 \dots c_t$ a platí $f(jt + i) = c_i$ pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ a všechna $j \in \mathbb{Z}$.

7.1 S-pakovací barvení grafů $G(\{2, t\})$

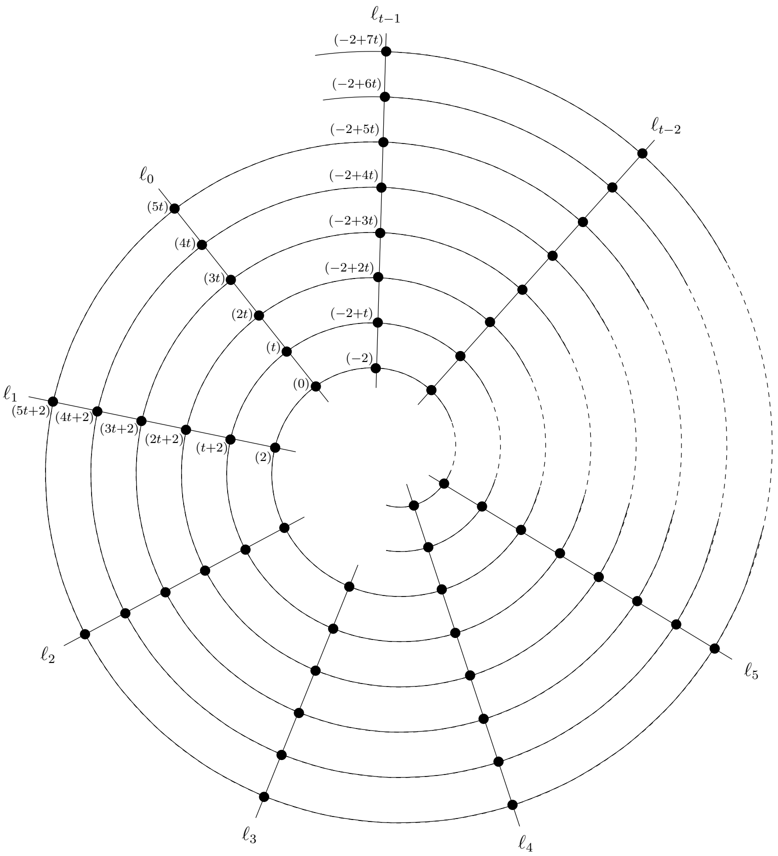
V této kapitole určíme S-pakovací chromatické číslo grafu $G(\{2, t\})$ pro sekvence $S = (a_1, a_2, a_3, \dots)$, kde $a_1 = 1$.

První případ uvažujeme $a_i = 1$ pro $i = 1, 2, 3, \dots$. Jedná se o klasické přípustné barvení (viz. kapitola 7.1.1). Dokážeme, že $\chi(G(\{2, t\})) = 3$. V dalších dvou případech budeme zkoumat sekvence S, kdy S začíná dvěma jedničkami, a kdy S začíná jednou jedničkou. Případu, kdy $a_1 = a_2 = 1$ a $a_i = 2$ pro $i \geq 3$, se věnuje kapitola 7.1.2 a případ, kdy $a_1 = 1$ a $a_i = 2$ pro $i \geq 2$, je uveden v kapitole 7.1.3.

7.1.1 $S = (1, 1, 1)$

V této kapitole dokážeme přesnou hodnotu chromatického čísla distančního grafu $G(\{2, t\})$ pro $t \geq 3$. Poznamenejme, že chromatické číslo přípustného barvení odpovídá S-pakovacímu chromatickému číslu pro $S = (1, 1, 1)$.

Věta 7.1. *Nechť $t \geq 3$ je liché a $G(\{2, t\})$ je distanční graf. Potom $\chi(G(\{2, t\})) =$ 3.*



Obrázek 6: Rovinné zakreslení distančního grafu $G(\{2,t\})$ pomocí dvou vrcholově disjunktních nekonečných spirál a t přímek ortogonálních ke spirálám. Čísla v závorkách označují vrcholy grafu $G(\{2,t\})$.

Důkaz. Nechť G je graf $G(\{2,t\})$. K prokázání dolní meze $\chi(G) \geq 3$ využijeme faktu, že každý graf G obsahuje kružnici liché délky. Kružnice $C: 0, 2, \ldots, 2t, t, 0$ má $t+2$ vrcholů, což je liché číslo, a tedy $\chi(G) \geq 3$.

Nyní prokážeme horní mez $\chi(G) \leq 3$. Použijeme hladový algoritmus. Začneme v libovolném vrcholu (bez ztráty na obecnosti řekněme v 0) a obarvujeme vrcholy ve vzrůstajícím pořadí (tedy $0, 1, 2, \ldots$) pomocí nejmenší možné barvy, která nebyla dána již jeho obarveným sousedům. Barva vrcholu i závisí na barvách vrcholů $i-2$ a $i-t$ (sousední vrcholy vlevo od vrcholu i). V nejhorším případě jsou tyto barvy odlišné, ale stále máme jednu barvu k dispozici pro obarvení vrcholu i. Po obarvení všech kladných vrcholů, uděláme totéž pro záporné vrcholy v klesajícím pořadí. Poznamenejme, že v tomto případě barva vrcholu i závisí na barvách vrcholů $i+2$ a $i+t$. V nejhorším případě jsou tyto barvy odlišné, ale stále máme jednu barvu k dispozici pro obarvení vrcholu i. $\square$

7.1.2 $S = (1, 1, 2, 2)$

V této kapitole dokážeme, že S-pakovací chromatické číslo distančního grafu $G(\{2, t\})$ se sekvencí $S = (1, 1, 2, 2, \dots)$ je 4.

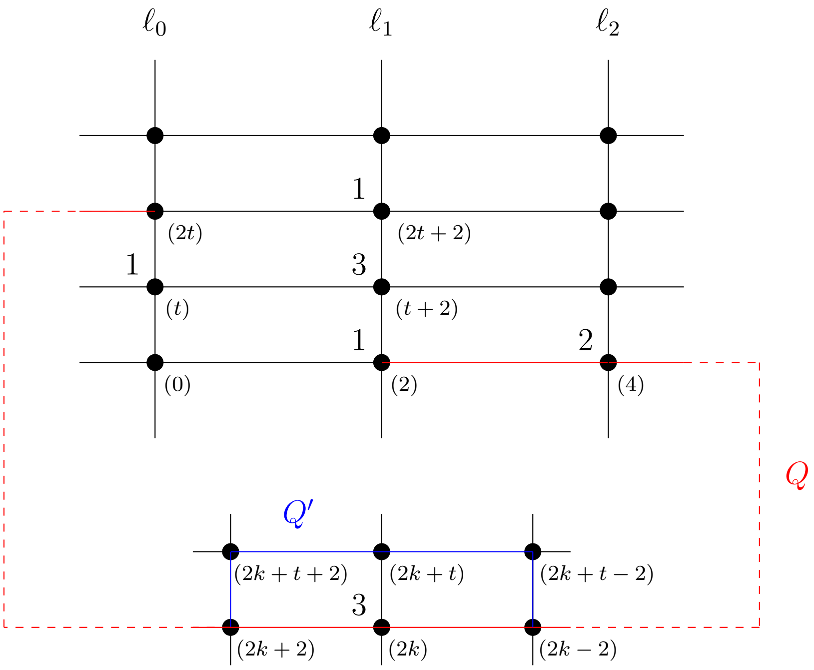
Věta 7.2. *Nechť $t \geq 3$ je liché, $G(\{2, t\})$ je distanční graf a $S = (1, 1, 2, 2, \dots)$. Potom $\chi_S(G(\{2, t\})) = 4$.*

Důkaz. Nechť G je graf $G(\{2, t\})$. Nejprve dokážeme spodní hranici $\chi_S(G) \geq 4$ pro $S = (1, 1, 2, 2, \dots)$. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že distanční graf G je $(1, 1, 2)$-obarvitelný a nechť $f : V(G) \to \{1, 2, 3\}$ je $(1, 1, 2)$-pakovací barvení grafu G. Poznamenejme, že množina všech vrcholů v, pro něž $f(v) = 1$ (vrcholy obarvené barvou 1 pomocí f) resp. $f(v) = 2$ (vrcholy obarvené barvou 2 pomocí f), je nezávislá množina, zatímco množina vrcholů v, pro něž $f(v) = 3$ (vrcholy obarvené barvou 3 pomocí f), tvoří 2-pakovací třídu grafu G (libovolné dva vrcholy stejné barvy jsou ve vzdálenosti větší než 2). Bez ztráty na obecnosti předpokládejme, že $f(t + 2) = 3$. Protože existuje cesta $P : 4, 2, 0, t, 2t, 2t + 2$ v G, jejíž vrcholy jsou ve vzdálenosti nejvýše 2 od vrcholu $t + 2$, jsou vrcholy cesty P obarvené barvou odlišnou od 3. Dále předpokládejme, opět bez ztráty na obecnosti, že $f(2) = f(t) = f(2t+2) = 1$. Cesta $Q : 2, 4, \dots, 2t$ je sudé délky (t je liché) a kde $f(2) = 1$ a $f(4) = 2$ (vrchol 4 leží na cestě P, tedy nemůže mít barvu 3 a je sousední s vrcholem 2, který je obarven barvou 1). Je možné, že pro nějaké $k \in \{3, \dots, t-1\}$ existuje vrchol $x = 2k$, pro který platí $f(2k) = 3$. Potom existuje cesta $Q' = 2k-2, 2k+t-2, 2k+t, 2k+t+2, 2k+2$ (viz obrázek 7), jejíž vrcholy jsou ve vzdálenosti nejvýše 2 od vrcholu $2k$, z čehož plyne, že pomocí f nemohou být obarveny barvou 3. A tedy platí $f(2k-2) = f(2k+t) = f(2k+2)$. To ale znamená, že $f(2) = f(6) = f(10) = \dots = 1$ a $f(4) = f(8) = f(12) = \dots = 2$, až na vrcholy, které mají barvu 3. Protože Q je sudé délky, dostáváme $f(2) = f(2t) = 1$. To je ale spor s tím, že $f(t) = 1$, neboť vrcholy t a $2t$ jsou sousední.

Nyní dokážeme horní hranici $\chi_S(G) \leq 4$ pro $S = (1, 1, 2, 2, \dots)$ vytvořením S-pakovacího 4-barvení f vrcholů grafu G. Uvažujme 2 případy.

Případ 1. $t = 4k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.
Nechť $f(j(4k + 1)) = 3$ pro všechna lichá $j \in \mathbb{Z}$ a nechť $f(j(4k + 1)) = 4$ pro všechna sudá $j \in \mathbb{Z}$. Dále nechť $f(j(4k + 1) + \ell) = 1$ a $f(j(4k + 1) + m) = 2$ pro libovolné $j \in \mathbb{Z}$, $\ell \equiv 1, 2 \pmod 4$, $1 \leq \ell < 4k + 1$, a $m \equiv 0, 3 \pmod 4$, $3 \leq m < 4k + 1$. Z popsaného barvení jsou po sobě jdoucí celá čísla (vrcholy grafu G) ze $\mathbb{Z}$ obarvována podle následujícího vzoru barev:

$$(1122)^k 3 (1122)^k 4,$$



Obrázek 7: Červeně vyznačená cesta Q a modře cesta Q' v distančním grafu G.

kde $(1122)^k$ znamená opakování 1122 k-krát. Tvrdíme, že popsané barvení je S-pakovací 4-barvení, kde $S = (1, 1, 2, 2, \dots)$.

Nejdříve uvažujme dva libovolné vrcholy $a, b \in V(G)$ takové, že $f(a) = f(b) = 1$, tedy obarvené barvou 1 pomocí f. Z toho plyne, že existují $j, j' \in \mathbb{Z}$ a $\ell, \ell' \in \mathbb{Z}$ s vlastnostmi, že $1 \leq \ell < (4k+1)$, $1 \leq \ell' < (4k+1)$, $\ell \equiv 1, 2 \pmod 4$, $\ell' \equiv 1, 2 \pmod 4$ taková, že $a = j(4k+1) + \ell$ a $b = j'(4k+1) + \ell'$. Předpokládejme, že $\text{dist}_G(a, b) = 1$ a bez ztráty na obecnosti předpokládejme, že $a > b$. Tedy $a - b \in \{2, t\}$, jelikož předpokládáme jejich vzájemnou vzdálenost 1 v G. Je-li $j = j'$, potom $a - b = j'(4k+1) + \ell - j'(4k+1) - \ell' = \ell - \ell'$. Protože $|\ell - \ell'| \leq 1$ a $a - b \notin \{2, t\}$, dostáváme spor s naším předpokladem, že $a - b \in \{2, t\}$. Dále uvažujme případ, kdy $j = j' + 1$. Potom $a - b = 4k + 1 + \ell - \ell'$, což je očividně větší než 2, protože $|\ell - \ell'| \leq 1$ a $k \in \mathbb{N}$. Je-li $a - b = t$, pak z toho plyne, že $\ell' - \ell = 2$, ale to není možné, protože $\ell \equiv 1, 2 \pmod 4$ a $\ell' \equiv 1, 2 \pmod 4$. Dále nechť $j \geq j' + 2$. V tomto případě $a - b \geq (j'+2)(4k+1) + \ell - j'(4k+1) - \ell' = 8k + 2 + \ell - \ell' \geq 8k + 1 > t > 2$, protože $\ell - \ell' \geq -1$. Tedy $a - b \notin \{2, t\}$ a opět nastává spor s naším předpokladem, že $a - b \in \{2, t\}$. Z těchto úvah plyne, že libovolné dva odlišné vrcholy grafu G, oba obarvené stejnou barvou 1, jsou ve vzdálenosti nejméně 2 v grafu G. Analogicky lze dokázat, že to samé platí pro libovolné dva vrcholy grafu G, oba obarvené barvou 2.

Dále předpokládejme, že existují dva odlišné vrcholy $a = j(4k+1)$ a $b = j'(4k+1)$ grafu G takové, že $j > j'$, $f(a) = f(b) = s \in \{3, 4\}$ (oba obarvené barvou

3, nebo oba obarvené barvou 4) a jejich vzájemná vzdálenost $\mathrm{dist}_G(a,b) \le 2$, tedy $a-b \in \{2, t, 4, t-2, t+2, 2t\}$. Potom $a-b = (j-j')(4k+1) \in \{2, t, 4, t-2, t+2, 2t\}$. Je zřejmé, že $a-b \notin \{2,4\}$, neboť z definice f je $a-b$ kladným sudým násobkem $(4k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, a tedy $a-b \ge 10$. Dále nechť $a-b = (j-j')(4k+1) \in \{t-2, t, t+2\}$. Z toho, že každé číslo z $\{t-2, t, t+2\}$ je liché (t je liché), je i $a-b$ liché, a tedy i $j-j'$ musí být liché (neboť $(4k+1)$ je také liché). Ale to je spor s faktem, že $f(a) = f(b)$, protože z definice f jsou j a j' buď obě sudá nebo lichá, a tedy $j-j'$ je sudé. V posledním případě, je-li $a-b = 2t$, potom $2t = (j-j')(4k+1)$. Víme, že $t = 4k-1$, potom dosazením za t získáme $2(4k-1) = (j-j')(4k+1)$, po roznásobení získáme $8k-2 = 4kj - 4kj' + j - j'$. Dále po přeuspořádání členů rovnice dostaneme $4kj - 4kj' - 8k = -j + j' - 2$ a po vytknutí výrazu $4k$ dostaneme $(j-j'-2)4k = -j+j'-2$. Protože víme, že $j \ge j'+2$ (neboť $j > j'$, a protože j, j' jsou buď obě lichá nebo obě sudá, nelze, aby $j = j'+1$), potom $(j-j'-2)4k \ge 0$ (jelikož $k > 0$) a $-j+j'-2 < 0$ a opět dostáváme spor. Tedy libovolné dva odlišné vrcholy grafu G, oba obarvené barvou $s \in \{3,4\}$ jsou ve vzdálenosti nejméně 3 v grafu G.

Případ 2. $t = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$.
Nechť $f(j(4k+3)) = 3$ pro všechna lichá $j \in \mathbb{Z}$, a $f(j(4k+3)) = 4$ pro všechna sudá $j \in \mathbb{Z}$. Dále nechť $f(j(4k+3)+\ell) = 1$ a $f(j(4k+3)+m) = 2$ pro libovolné $j \in \mathbb{Z}$, $\ell \equiv 2,3 \pmod 4$, $2 \le \ell < 4k+3$ a $m \equiv 0,1 \pmod 4$, $1 \le m < 4k+3$. Z popsaného barvení jsou po sobě jdoucí celá čísla (vrcholy grafu G) ze $\mathbb{Z}$ obarvována podle následujícího vzoru barev:

$$(1122)^k 132 (1122)^k 142,$$

kde $(1122)^k$ znamená opakování 1122 k-krát. Dokážeme, že popsané barvení je S-pakovací 4-barvení grafu G, kde $S = (1, 1, 2, 2, \ldots)$.

Nejdříve, nechť jsou vrcholy $a, b \in V(G)$ takové, že $f(a) = f(b) = 1$, tedy oba obarvené barvou 1. Z toho lze usuzovat, že existují $j, j' \in \mathbb{Z}$ a ℓ, ℓ' s vlastnostmi, že $2 \le \ell < 4k+3$, $2 \le \ell' < 4k+3$, $\ell \equiv 2,3 \pmod 4$ a $\ell' \equiv 2,3 \pmod 4$ taková, že $a = j(4k+3)+\ell$ a $b = j'(4k+3)+\ell'$. Dokážeme, že $\mathrm{dist}_G(a,b) > 1$. Předpokládejme opak, že $\mathrm{dist}_G(a,b) = 1$ a bez ztráty na obecnosti předpokládejme, že $a > b$. Z toho plyne, že a a b jsou sousední vrcholy v G, a tedy $a-b \in \{2, t\}$. Je-li $j = j'$, potom $a-b = j'(4k+3)+\ell-j'(4k+3)-\ell' = \ell-\ell'$. Je zřejmé, že $\ell-\ell' \notin \{2,t\}$, protože $|\ell-\ell'| \le 1 < 2 < t$. To je spor s naším předpokladem, že $a-b \in \{2,t\}$. Dále uvažujme případ, kdy $j = j'+1$. Potom $a-b = (j'+1)(4k+3)+\ell-j'(4k+3)-\ell' = 4k+3+\ell-\ell'$, ale $|\ell-\ell'| \le 1$, proto $a-b \neq 2$. Je-li $a-b = t$, potom $\ell'-\ell = 2$ ($t = 4k+1$ a $j = j'+1$), ale to není možné, protože $\ell \equiv 2,3 \pmod 4$ a $\ell' \equiv 2,3 \pmod 4$. Dále nechť $j \ge j'+2$, potom

$a-b \geq (j'+2)(4k+3)+\ell-j'(4k+3)-\ell' = 8k+6+\ell-\ell' \geq 8k+5 > t > 2$, neboť $\ell-\ell' \geq -1$, a tedy $a-b \notin \{2,t\}$ a to je opět spor s naším předpokladem. Tedy dva libovolné odlišné vrcholy grafu G, oba obarvené barvou 1, jsou ve vzdálenosti nejméně 2 v grafu G. Analogicky lze dokázat, že to samé platí pro libovolné dva odlišné vrcholy grafu G, oba obarvené barvou 2.

Nyní předpokládejme, že existují dva odlišné vrcholy $a = j(4k+3)$ a $b = j'(4k+3)$ grafu G takové, že $j > j'$, $f(a) = f(b) = s \in \{3,4\}$ (oba obarvené barvou 3 nebo oba obarvené barvou 4) a $\mathrm{dist}_G(a,b) \leq 2$. Tedy $a-b \in \{2,t,4,t-2,t+2,2t\}$. Potom $a-b = (j-j')(4k+3) \in \{2,t,4,t-2,t+2,2t\}$. Je zřejmé, že $a-b \notin \{2,4\}$ neboť z definice f je $a-b$ kladným sudým násobkem $(4k+3)$, $k \in \mathbb{N}$, a tedy $a-b \geq 14$. Dále nechť $a-b = (j-j')(4k+3) \in \{t-2,t,t+2\}$. Protože každé číslo z $\{t-2,t,t+2\}$ je liché (t je liché), je i $a-b$ liché, a tedy $j-j'$ musí být také liché (neboť $(4k+3)$ je také liché). Ale to je spor s faktem, že $f(a) = f(b)$, protože z definice f jsou j a j' buď obě sudá nebo lichá, a tedy $j-j'$ je sudé. V posledním případě, je-li $a-b = 2t$, potom $2t = (j-j')(4k+3)$. Víme, že $t = 4k+1$, potom dosazením za t získáme $2(4k+1) = (j-j')(4k+3)$, po roznásobení dostaneme $8k+2 = 4kj-4kj'+3j-3j'$. Dále po přeuspořádání členů rovnice získáme $4kj-4kj'-8k = -3j+3j'+2$ a po vytknutí výrazu $4k$ na levé straně rovnice a -3 na pravé straně rovnice dostaneme $(j-j'-2)4k = -3(j-j')+2$. Protože víme, že $j \geq j'+2$ (neboť $j > j'$, a protože j,j' jsou buď obě lichá nebo obě sudá, nelze aby $j = j'+1$), potom $(j-j'-2)4k \geq 0$ (jelikož $k > 0$) a $-3(j-j')+2 < 0$ a opět dostáváme spor. Tedy libovolné dva odlišné vrcholy v grafu G obarvené stejnou barvou $s \in \{3,4\}$ jsou ve vzdálenosti nejméně 3 v grafu G. $\square$

7.1.3 $S = (1,2,2,\dots)$

V této kapitole určíme přesnou hodnotu $\chi_S(G(\{2,t\}))$ se sekvencí $S = (1,2,2,\dots)$.

Tvrzení 7.3. *Nechť $G(\{2,3\})$ je distanční graf a $S = (1,2,2,\dots)$. Potom $\chi_S(G(\{2,3\})) = 6$.*

Důkaz. Nechť G je graf $G(\{2,3\})$. Nejdříve dokážeme spodní hranici $\chi_S(G) \geq 6$. Uvažujme opak, že $\chi_S(G) \leq 5$, a nechť $f : V(G) \to \{1,2,3,4,5\}$ je S-pakovací 5-barvení grafu G pro $S = (1,2,2,2,2)$. Poznamenejme, že množina všech vrcholů v, pro něž $f(v) = 1$ (vrcholy obarvené barvou 1 pomocí f) tvoří nezávislou množinu a množina všech vrcholů v, pro něž $f(v) = s \in \{2,3,4,5\}$, tvoří 2-pakovací třídu v G. Předpokládejme, že existuje vrchol $i \in V(G)$ takový, že $f(i) = f(i+1) = 1$. Potom pro libovolná dvě celá čísla j,k z množiny $A = \{i-2,i-1,i+2,i+3,i+4\}$

máme $|j-k| \in \{1,2,3,\dots,6\}$, z čehož plyne, že $\mathrm{dist}_G(j,k) \leq 2$. Poznamenejme, že množina A obsahuje sousední vrcholy vrcholů $i, i+1$ v grafu G, proto žádný z vrcholů množiny A nelze obarvit barvou 1. Kvůli tomu, že f je S-pakovací barvení, musí být každý vrchol z A ($|A| = 5$) obarven jinou barvou z $\{2,3,4,5\}$, což je spor.

Ve výše uvedeném odstavci jsme dokázali, že žádná dvě po sobě jdoucí celá čísla (vrcholy) nemohou obdržet barvu 1 od f. Dále nechť $i \in \mathbb{Z}$ je takový, že $f(i) = 1$, potom nejvýše jeden z vrcholů $i+1,\dots,i+6$ může obdržet barvu 1. Tedy nejvýše 2 vrcholy z množiny $B = \{i,\dots,i+6\}$ jsou obarveny barvou 1. Pět zbylých vrcholů z B neobarvených barvou 1 musí dostat odlišné barvy z $\{2,3,4,5\}$, protože vzájemné vzdálenosti vrcholů z B jsou nejvýše 2. Toto je opět spor, z čehož plyne, že $\chi_S(G) \geq 6$.

Nyní dokažme, že $\chi_S(G) \leq 6$. Vytvoříme S-pakovací 6-barvení grafu G tak, že obarvujeme po sobě jdoucí celá čísla (vrcholy grafu G) ze $\mathbb{Z}$ užitím následujícího vzoru barev:

$$1123411562113451162311456.$$

Je zřejmé, že libovolné dva odlišné vrcholy grafu G, oba obarvené barvou 1, nejsou sousední (vrcholy $i, j \in \mathbb{Z}$ jsou sousední v G právě tedy, když $|j-i| \in \{2,3\}$). Dále pro libovolné dva odlišné vrcholy $a, b \in V(G)$, oba obarvené stejnou barvou $s \in \{2,3,4,5,6\}$, máme $|a-b| \geq 7$, což implikuje, že jsou ve vzdálenosti nejméně 3 v grafu G. Tedy popsané barvení je S-pakovací 6-barvení grafu G, a tedy $\chi_S(G) \leq 6$. $\square$

Věta 7.4. *Nechť $t > 3$ je liché, $G(\{2,t\})$ je distanční graf a $S = (1,2,2,2,\dots)$. Potom $\chi_S(G(\{2,t\})) = 5$.*

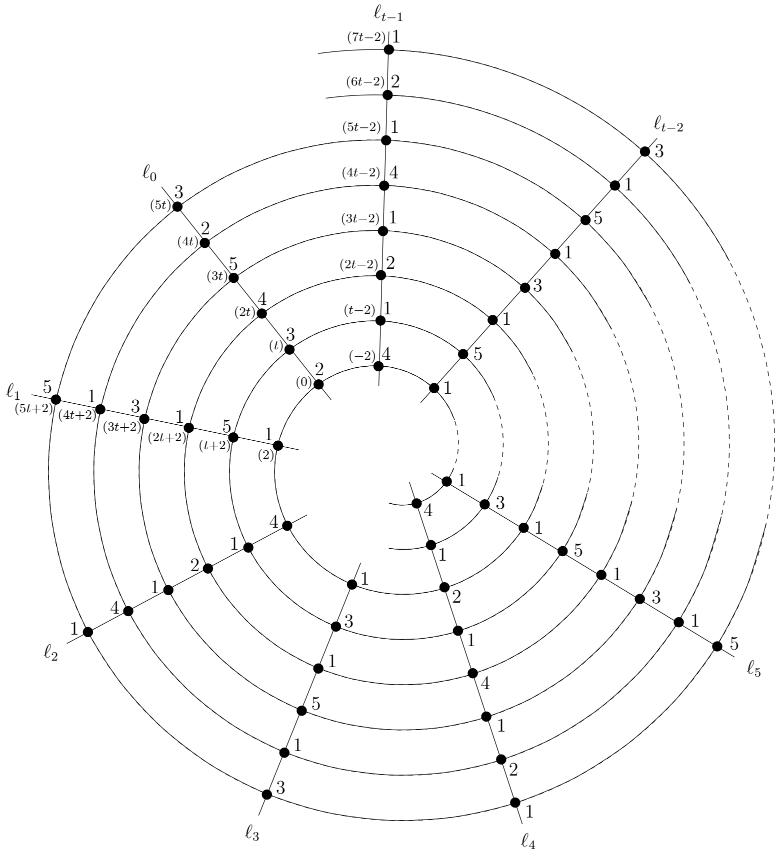
Důkaz. Nechť G je graf $G(\{2,t\})$. Spodní hranice $\chi_S(G) \geq 5$ je velmi triviální. Nechť f je S-pakovací 5-barvení grafu G a nechť $a \in \mathbb{Z}$ je takové, že $f(a) = 1$. Graf G je 4-regulární, a tedy a má 4 sousedy v G, jejichž vzájemná vzdálenost je 2. Žádný z nich nemůže být obarven barvou 1 a jejich barvy musí být vzájemně odlišné, proto $\chi_S(G) \geq 5$.

Dále dokážeme, že $\chi_S(G) \leq 5$ vytvořením S-pakovacího 5-barvení grafu G. Uvažujme 3 případy.

Případ 1. $t = 4k+1$ pro $k \in \mathbb{N}$.
V případě, že $k = 1$ (tedy $G = G(\{2,5\})$), obarvujeme po sobě jdoucí celá čísla (vrcholy grafu G) ze $\mathbb{Z}$ užitím následujícího vzoru barev:

$$11221331144155.$$

Je zřejmé, že libovolné dva odlišné vrcholy G, oba obarvené barvou 1, nejsou sousední (vrcholy $i, j \in \mathbb{Z}$ jsou sousední v G právě tehdy, když $|i-j| \in \{2,5\}$). Dále nechť $a, b \in V(G)$, oba jsou obarvené stejnou barvou $s \in \{2,3,4,5\}$. Bez ztráty na obecnosti předpokládejme, že $a > b$. Pokud by vrcholy a a b byly ve vzdálenosti nejvýše 2, potom by platilo $a - b \in \{2,3,4,5,7,10\}$. Ale z uvedeného vzoru o délce 14 plyne, že $a - b \in \{1, 14\ell - 1, 14\ell, 14\ell + 1\}$ pro $\ell \in \mathbb{N}$. Tedy z toho usuzujeme, že a a b jsou ve vzdálenosti alespoň 3. Tedy popsané barvení je S-pakovací 5-barvení grafu G.



Obrázek 8: Rovinné zakreslení grafu $G(\{2,t\})$ pomocí dvou disjunktních spirál a t přímek ortogonálních ke spirálám. V závorkách jsou uvedeny vrcholy grafu $G(\{2,t\})$ a celá čísla bez závorek značí barvu, kterou je daný vrchol obarven. Uvedené barvení odpovídá barvení f popsaném ve větě 7.4 (případ 1.) pro $k \geq 2$.

Dále nechť $k \geq 2$. Uvažujeme graf G jako graf skládající se ze 2 vrcholově disjunktních nekonečných spirál a z t přímek kolmých na spirály (viz obrázek 8). Přímky označíme $l_0, l_1, \ldots, l_{t-1}$ a množinu průsečíků každé přímky l_i pro $i = 0, \ldots, t-1$ se spirálami označíme $L_i = \{jt + 2i, j \in \mathbb{Z}\}$. Poznamenejme, že $L_0 = \{\ldots, -2t, -t, 0, t,$

$2t, \dots\}$ a $L_{t-1} = \{\dots, -2, t-2, 2t-2, 3t-2, 4t-2, \dots\}$. Nyní popíšeme barvení f v tomto nakreslení grafu G. Bez ztráty na obecnosti předpokládejme, že všechny vrcholy množiny L_0 jsou obarveny jeden po druhém užitím následujícího vzoru barev:

$$2345,$$

a že $f(0) = 2$. Dále pro všechna $i \in \{2, 4, \dots, t-1\}$ a všechna lichá čísla j platí $f(jt + 2i) = 1$, a pro všechna $i \in \{1, 3, \dots, t-3\}$ a všechna sudá čísla j platí $f(jt + 2i) = 1$. Je zřejmé, že libovolné dva různé vrcholy G obarvené barvou 1 nejsou sousední. Dále rozdělíme množinu zbylých vrcholů grafu G, tedy vrcholy množin $L_1, L_2, \dots, L_{t-1}$ neobarvené barvou 1, do 8 následujících podmnožin:

$$V_1 = \{kt + 2i; i \equiv 1 \pmod 4, k \equiv 1 \pmod 4\};$$
$$V_2 = \{kt + 2i; i \equiv 1 \pmod 4, k \equiv 3 \pmod 4\};$$
$$V_3 = \{kt + 2i; i \equiv 2 \pmod 4, k \equiv 2 \pmod 4\};$$
$$V_4 = \{kt + 2i; i \equiv 2 \pmod 4, k \equiv 0 \pmod 4\};$$
$$V_5 = \{kt + 2i; i \equiv 3 \pmod 4, k \equiv 1 \pmod 4\};$$
$$V_6 = \{kt + 2i; i \equiv 3 \pmod 4, k \equiv 3 \pmod 4\};$$
$$V_7 = \{kt + 2i; i \equiv 0 \pmod 4, k \equiv 2 \pmod 4\};$$
$$V_8 = \{kt + 2i; i \equiv 0 \pmod 4, k \equiv 0 \pmod 4\};$$

Je zřejmé, že množiny $V_1, V_2, \dots, V_8$ jsou disjunktní a $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_8$ obsahuje všechny vrcholy G neobarvené barvou 1 (tedy vrcholy množin L_i pro $i = 1, 2, 3, \dots, t-1$, které nejsou obarveny barvou 1). Dále platí, že všechny vrcholy $V_1 \cup V_6$ mají barvu 5, všechny vrcholy $V_2 \cup V_5$ mají barvu 3, všechny vrcholy $V_3 \cup V_8$ mají barvu 2 a všechny vrcholy $V_4 \cup V_7$ mají barvu 4.

Nyní dokážeme, že každé dva odlišné vrcholy $a, b \in V(G)$ obarvené stejnou barvou $s = \{2, 3, 4, 5\}$ mají vzájemnou vzdálenost alespoň 3. Je zřejmé, že jsou-li $a, b \in L_i$ pro nějaké $i \in \{0, 1, \dots, t-1\}$, potom je jejich vzájemná vzdálenost alespoň 4. Tedy předpokládejme, že $a \in L_m$ a $b \in L_n$, kde $0 \leq m < n \leq t-1$. Je-li $n - m \pmod t > 2$, potom $\mathrm{dist}_G(a, b) \geq 3$.

Je-li $n - m \pmod t = 1$, potom stačí uvažovat případ $m = 0, n = 1$ nebo $m = 0, n = t-1$, protože pro ostatní m, n nejsou v množinách L_m, L_n použity stejné barvy (samozřejmě kromě barvy 1). Nechť $m = 0, n = 1$, tedy $a \in L_0$ a $b \in L_1$. Potom $a = j_m t$ a $b = j_n t + 2$, $j_m \in \mathbb{Z}, j_n \in \mathbb{Z}$. Z toho, že $f(a) = f(b)$ a $f(b) = 3$ (resp. 5) pro $j_n \equiv 3$ (resp. 1) $\pmod 4$ a $f(a) = 2 + (j_m \pmod 4)$, dostáváme, že $|j_m - j_n| \geq 2$, a tedy $\mathrm{dist}_G(a, b) \geq 3$. Nechť $m = 0, n = t-1$, potom $a \in L_0$ a $b \in L_{t-1}$. Potom $a = j_m t$ a $b = j_n t - 2$, $j_m \in \mathbb{Z}, j_n \in \mathbb{Z}$. Z toho, že $f(a) = f(b)$ a $f(b) = 4$ (resp. 2) pro $j_n \equiv 0$ (resp. 2) $\pmod 4$ a $f(a) = 2 + (j_m \pmod 4)$, dostáváme, že $|j_m - j_n| \geq 2$, a tedy $\mathrm{dist}_G(a, b) \geq 3$.

Nyní uvažujme $n-m=2$. Potom $a=2m+j_mt$ a $b=2n+j_nt$, $j_m \in \mathbb{Z}, j_n \in \mathbb{Z}$. Z toho, že $f(a)=f(b)$, máme $|j_m-j_n| \geq 2$, a tedy $\mathrm{dist}_G(a,b) \geq 4$. Je-li $m=1, n=t-1$, barvy vrcholů z L_m a L_n jsou disjunktní (kromě barvy 1). Nakonec uvažujme $m=0, n=t-2$. Potom $a=j_mt$ a $b=j_nt-4$, $j_m \in \mathbb{Z}, j_n \in \mathbb{Z}$. Kvůli tomu, že $f(a)=f(b)$, máme $|j_m-j_n| \geq 2$, a tedy $\mathrm{dist}_G(a,b) \geq 4$. Proto f je S-pakovací 5-barvení.

Případ 2. $t=4k-1$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $3 \nmid t$.
V tomto případě obarvujeme po sobě jdoucí celá čísla (vrcholy grafu G) ze $\mathbb{Z}$ podle následujícího vzoru barev:

$$123145.$$

Pro dva libovolné vrcholy $a,b \in V(G)$, $a>b$, oba obarvené barvou 1, máme $a-b=3m$ pro $m \in \mathbb{Z}$. Z toho plyne, že vrcholy a a b nejsou sousední v G (neboť předpokládáme, že $3 \nmid t$). Dále, jsou-li dva libovolné vrcholy $c,d \in V(G), c>d$, oba obarvené stejnou barvou $s \in \{2,3,4,5\}$, potom $c-d=6j$ pro $j \in \mathbb{Z}$. Je zřejmé, že $c-d \notin \{2;4\}$, protože $2;4 \neq 6j$ pro každé $j \in \mathbb{Z}$, a $c-d \notin \{t-2,t,t+2\}$, protože $t-2, t$ a $t+2$ jsou lichá čísla, ale $c-d$ je sudé. Dále $c-d \neq 2t$, protože $3 \nmid t$. Tedy vzdálenost mezi c a d v G je větší než 2, z čehož plyne, že popsané barvení je S-pakovací 5-barvení.

Případ 3. $t=4k-1$ pro $k \in \mathbb{N}, k \geq 4$ a $3 \mid t$.
V tomto případě definujme barvení f vrcholů grafu G následovně. Nechť $f(j(4k-3))=1$ a $f(j(4k-3)+\ell)=1$ pro každé $j \in \mathbb{Z}, \ell \equiv 1 \pmod 3, 1 \leq \ell < 4k-3$. Dále pro každé $m \in \mathbb{Z}, m \equiv 2,3 \pmod 6, 1 \leq m < 4k-3$, nechť $f(j(4k-3)+m)=2$, je-li j sudé, a jinak $f(j(4k-3)+m)=4$. Nakonec pro každé $p \in \mathbb{Z}, p \equiv 0,5 \pmod 6, 1 \leq p < 4k-3$, nechť $f(j(4k-3)+p)=3$, je-li j sudé, a jinak $f(j(4k-3)+p)=5$. Z popsaného barvení jsou po sobě jdoucí celá čísla (vrcholy grafu G) ze $\mathbb{Z}$ obarvována podle následujícího vzoru barev délky $8k-6$:

$$1(122133)^v 1(144155)^v,$$

kde $v=\frac{2(k-1)}{3}$.

Nyní dokážeme, že f je S-pakovací 5-barvení grafu G. Jako první uvažujme vrchol $a \in V(G)$ obarvený barvou 1. Je-li $a=j(4k-3)$ pro nějaké $j \in \mathbb{Z}$, potom jeho sousedé jsou $j(4k-3) \pm 2$ a $j(4k-3) \pm t$. Z definice f je zřejmé, že $f(j(4k-3) \pm 2) \neq 1$. Každá sekvence $(122133)^v$ (resp. $(144155)^v$) obsahuje $t-3$ celých čísel, proto $f(j(4k-3) \pm t) \neq 1$. Dále předpokládejme, že $a=j(4k-3)+\ell$ pro nějaké $j \in \mathbb{Z}, \ell \equiv 1 \pmod 3, 1 \leq \ell < 4k-3$. Opět je zřejmé, že $a \pm 2$ neobdrží barvu 1 v f. Z toho, že $a+t=j(4k-3)+\ell+4k-1=(j+1)(4k-3)+(\ell+2)$ a $\ell+2 \equiv 0 \pmod 3$ plyne, že $f(a+t) \neq 1$. Analogicky, $a-t=(j-1)(4k-3)+(\ell-2)$

a $\ell - 2 \equiv 2 \pmod 3$, tedy $f(a-t) \neq 1$. Z těchto zjištění plyne, že libovolné dva vrcholy grafu G, oba obarvené barvou 1, jsou ve vzdálenosti nejméně 2.

Dále nechť $b \in V(G)$ je takový vrchol, že $f(b) \in \{2,3,4,5\}$. Dokážeme, že $f(b) \neq \{f(b\pm 2), f(b\pm t), f(b\pm 4), f(b\pm(t-2)), f(b\pm(t+2)), f(b\pm 2t)\}$. Z definice f je zřejmé, že $f(b\pm 2) \neq f(b)$ a $f(b\pm 4) \neq f(b)$. Dále kvůli tomu, že každá sekvence $(122133)^v$ (resp. $(144155)^v$) obsahuje $t-3$ celých čísel, máme $f(b\pm(t-2)) \neq f(b)$, $f(b\pm t) \neq f(b)$. Nyní uvažujme $f(b\pm(t+2))$. Z definice f plyne, že je-li absolutní hodnota rozdílu dvou čísel (vrcholů grafu G) z množiny $\{4k-8, \dots, 4k+2\}$, potom je jejich barva odlišná (platí pro barvy $2,3,4,5$). Protože $|b-(b\pm(t+2))| = t+2 = 4k+1 \in \{4k-8, \dots, 4k+2\}$ dostáváme, že $f(b\pm(t+2)) \neq f(b)$. Jelikož $f(b) \in \{2,3,4,5\}, b = j(4k-3)+x$ pro nějaká přirozená čísla j, x, platí, že $b \pm 2t = j(4k-3) + x \pm (8k-2) = j(4k-3) + x \pm (8k-6) \pm 4$. Z toho plyne, že barva vrcholu $b+2t$ (resp. $b-2t$) je stejná jako barva vrcholu $b+4$ (resp. $b-4$), protože délka uvedeného vzoru je $8k-6$. Z definice f jsou barvy vrcholů b a $b\pm 4$ odlišné. Tedy $f(b\pm 2t) \neq f(b)$ a f je S-pakovací 5-barvení grafu G. $\square$

7.2 Distanční barvení grafů $G(\{2,t\})$

Jak již bylo definováno dříve, distanční barvení grafu G závislé na parametru d je funkce, která množině vrcholů $V(G)$ přiřadí barvy z množiny $\{1,2,3,\dots\}$ tak, že každé dva vrcholy grafu G, jejichž vzdálenost není větší než d, mají odlišné barvy. Poznamenejme, že distanční barvení odpovídá S-pakovacímu barvení s $S = (d,d,d,\dots)$. Spodním odhadem d-distančního chromatického čísla grafu $G(\{2,t\})$ se zabývá kapitola 7.2.1. Kapitola 7.2.2 se věnuje hornímu odhadu d-distančního chromatického čísla grafu $G(\{2,t\})$. Přesná hodnota čísla $\chi_d(G(\{2,t\}))$ pro $d \geq t-3$ je dokázána v kapitole 7.2.3. Dále kapitola 7.2.4 se věnuje 2-distančnímu barvení grafů $G(\{2,t\})$, tedy S-pakovacímu barvení s $S = (2,2,2,2,\dots)$.

7.2.1 Spodní hranice d-distančního chromatického čísla grafů $G(\{2,t\})$

V této kapitole dokážeme spodní hranici pro $\chi_d(G(\{2,t\}))$, konkrétně pro $d \geq \frac{t+1}{2}$.

Věta 7.5. *Nechť $t \geq 3$ je liché, $G(\{2,t\})$ je distanční graf a $d \geq \frac{t+1}{2}$. Potom*

$$\chi_d(G(\{2,t\})) \geq 1 + t\left(d - \frac{t-3}{2}\right).$$

Důkaz. Nechť G je graf $G(\{2,t\})$. Tvrdíme, že každých $1 + t(d - \frac{t-3}{2})$ po sobě jdoucích celých čísel (vrcholů grafu G) ze $\mathbb{Z}$ má vzájemnou vzdálenost nejvýše

d v grafu G. Je zřejmé, že z tohoto tvrzení vyplývá dokazovaná věta. Bez ztráty na obecnosti předpokládejme podsekvenci $1+t(d-\frac{t-3}{2})$ po sobě jdoucích celých čísel (vrcholů grafu G) začínajících v 0. K prokázání tohoto tvrzení je potřeba ukázat, že všechny vrcholy množiny $V = \{1, 2, 3, \ldots, t(d - \frac{t-3}{2})\}$ jsou ve vzdálenosti nejvýše d od vrcholu 0 v grafu G. Nechť $k = d - \frac{t-3}{2}$, tedy $V = \{1, 2, 3, \ldots, kt\}$.

Případ 1. $y \in \{1, 2, \ldots, kt\}$ je liché číslo.
Nechť $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je takové, že $t(2i-1) < y \leq t(2i+1)$. Poznamenejme, že $i \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$. Uvažujme nyní dva případy; $y < 2it + 2$ a $y > 2it + 2$ (pro $y = 2i + 2$ je y sudé).

Případ 1a. $y < 2it + 2$.
Potom existuje $r \in \{0, 1, 2, \ldots, \frac{t+1}{2}\}$ takové, že $y = (2i-1)t + 2r$ a

$$P : 0, t, \ldots, (2i-2)t, (2i-1)t, (2i-1)t + 2, \ldots, (2i-1)t + 2(r-1), y$$

je cesta mezi vrcholy 0 a y, jejíž délka je $2i - 1 + r$. Protože

$$2i - 1 + r \leq k - 1 + \frac{t+1}{2} = d - \frac{t-3}{2} - 1 + \frac{t+1}{2} = d + 1,$$

plyne z toho, že $\mathrm{dist}_G(0, y) \leq d$, kromě případu, kdy $2i - 1 = k - 1$ a $r = \frac{t+1}{2}$. Nicméně, je-li $y = (k-1)t + 2(\frac{t+1}{2}) = kt + 1$, potom $y \notin \{1, 2, \ldots, kt\}$.

Případ 1b. $y > 2it + 2$.
Potom existuje $r \in \{0, 1, 2, \ldots, \frac{t-3}{2}\}$ takové, že $y = (2i+1)t - 2r$ a

$$P : 0, t, \ldots, 2it, (2i+1)t, (2i+1)t - 2, \ldots, (2i+1)t - 2(r-1), y$$

je cesta mezi 0 a y, jejíž délka je $2i + 1 + r$. Jelikož $y \in \{1, 2, \ldots, kt\}$, potom $2i + 1 \leq k$, a tedy

$$2i + 1 + r \leq k + \frac{t-3}{2} = d - \frac{t-3}{2} + \frac{t-3}{2} = d.$$

Z toho vyplývá, že $\mathrm{dist}_G(0, y) \leq d$.

Případ 2. $y \in \{1, 2, \ldots, kt\}$ je sudé.
Nechť $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je takové, že $2jt < y \leq (2j+2)t$. Poznamenejme, že $j \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor\}$. Uvažujme nyní dva případy; $y < (2j+1)t + 2$ a $y > (2j+1)t + 2$ (pro $y = (2j+1)t + 2$ je y liché).

Případ 2a. $y < (2j+1)t + 2$.
Potom existuje $r \in \{0, 1, 2, \ldots, \frac{t+1}{2}\}$ takové, že $y = 2jt + 2r$ a

$$P : 0, t, \ldots, (2j-1)t, 2jt, 2jt + 2, \ldots, 2jt + 2(r-1), y$$

je cesta mezi vrcholy 0 a y, jejíž délka je $2j+r$. Protože

$$2j+r \leq k-1+\frac{t+1}{2} = d-\frac{t-3}{2}-1+\frac{t+1}{2} = d+1,$$

plyne z toho, že $\operatorname{dist}_G(0,y) \leq d$, kromě případu, kdy $2j = k-1$ a $r = \frac{t+1}{2}$. Nicméně, je-li $y = (k-1)t + 2(\frac{t+1}{2}) = kt+1$, potom $y \notin \{1,2,\dots,kt\}$.

Případ 2b. $y > (2j+1)t+2$.
Potom existuje $r \in \{0,1,2,\dots,\frac{t-3}{2}\}$ takové, že $y = (2j+2)t - 2r$ a

$$P: 0, t, \dots, (2j+1)t, (2j+2)t, (2j+2)t-2, \dots, (2j+2)t-2(r-1), y$$

je cesta mezi 0 a y, jejíž délka je $2j+2+r$. Jelikož $y \in \{1,2,\dots,kt\}$, potom $2j+2 \leq k$, a tedy

$$2j+2+r \leq k+\frac{t-3}{2} = d-\frac{t-3}{2}+\frac{t-3}{2} = d,$$

z toho vyplývá, že $\operatorname{dist}_G(0,y) \leq d$.

Tedy z toho plyne, že každých $1 + t(d-\frac{t-3}{2})$ po sobě jdoucích celých čísel (vrcholů grafu G) ze $\mathbb{Z}$ je ve vzájemné vzdálenosti nejvýše d a musí obdržet odlišné barvy. $\square$

7.2.2 Horní hranice d-distančního chromatického čísla grafů $G(\{2,t\})$

V této kapitole dokážeme horní hranici d-distančního chromatického čísla grafu $G(\{2,t\})$.

Věta 7.6. *Nechť $t \geq 3$ je liché a $G(\{2,t\})$ je distanční graf. Potom*

$$\chi_d(G(\{2,t\}))) \leq \begin{cases} 1+d(d+1), & \text{je-li } d \leq \frac{t+1}{2}, \\ td + \frac{1}{4}(-t^2+2t+7), & \text{je-li } d \geq \frac{t+1}{2}. \end{cases}$$

Důkaz. Nechť G je graf $G(\{2,t\})$. Nejdříve dokážeme horní hranici $1+d(d+1)$ pro $d \leq \frac{t+1}{2}$. Pro obarvování vrcholů použijeme tzv. hladový algoritmus. Začneme v libovolném vrcholu (bez ztráty na obecnosti řekněme v 0) a obarvujeme vrcholy ve vzrůstajícím pořadí (tedy $0,1,2,\dots$) pomocí nejmenší možné barvy, která nebyla dána již obarveným vrcholům ve vzdálenosti nejvýše d od právě obarvovaného vrcholu. Tedy barva vrcholu i závisí nejvýše na barvách vrcholů z následujících množin (poznamenejme, že vzdálenost vrcholu i od vrcholu grafu G, který nenáleží ani do jedné z množin V_1, V_2 nebo V_3, je větší než d):

$V_1 = \{i-2, i-4, i-6, \ldots, i-2d\},$
$V_2 = \{i-t, i-2t, i-3t, \ldots, i-td\},$
$V_3 = \{i-kt \pm 2\ell\colon k = 1,2,\ldots,d-1,\ \ell = 1,2,\ldots,d-1 \text{ a } k+\ell \leq d\}.$

Je zřejmé, že všechny vrcholy z $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ jsou vlevo od i, $|V_1| = |V_2| = d$ a $|V_3| = \sum_{k=1}^{d-1} 2(d-k) = d(d-1)$. Tedy barva vrcholu i závisí nejvýše na barvách $d(d+1)$ vrcholů vlevo od i. V nejhorším případě jsou tyto barvy odlišné, ale stále máme jednu barvu k dispozici pro obarvení vrcholu i. Po obarvení všech kladných vrcholů, uděláme totéž pro záporné vrcholy v klesajícím pořadí. Poznamenejme, že v tomto případě barva vrcholu i závisí na barvách vrcholů z množin:

$V_1 = \{i+2, i+4, i+6, \ldots, i+2d\},$
$V_2 = \{i+t, i+2t, i+3t, \ldots, i+td\},$
$V_3 = \{i+kt \pm 2\ell\colon k = 1,2,\ldots,d-1,\ \ell = 1,2,\ldots,d-1 \text{ a } k+\ell \leq d\}.$

Opět $|V_1| = |V_2| = d$ a $|V_3| = \sum_{k=1}^{d-1} 2(d-k) = d(d-1)$. Tedy barva vrcholu i závisí na barvách $d(d+1)$ vrcholů vpravo od i. V nejhorším případě jsou tyto barvy odlišné, ale stále máme jednu barvu k dispozici pro obarvení vrcholu i.

Nyní dokážeme, že $\chi_d(G) \leq\ td + \frac{1}{4}(-t^2+2t+7)$ pro $d \geq \frac{t+1}{2}$. Opět použijeme hladový algoritmus, začneme v libovolném vrcholu (řekněme ve vrcholu 0) a obarvujeme vrcholy ve vzrůstajícím pořadí (tedy $0, 1, 2, \ldots$) použitím nejmenší možné barvy, která nebyla dána již obarveným vrcholům ve vzdálenosti nejvýše d od obarvovaného vrcholu. Je zřejmé, že barva vrcholu i závisí nejvýše na barvách vrcholů $\{i-1, i-2, i-3, \ldots, i-td\}$. Nechť $V = \{i-t(d-1)-2(x+1) : x = 1, 2, \ldots, \frac{t+1}{2}-2\}$ a $W = \{i-t(d-y)+2(y+z); y = 0, 1, \ldots, \frac{t-3}{2}-1; z = 1, 2, \ldots, t-3; z \leq t-3-2y\}$. Je zřejmé, že pro každý vrchol $v \in V$ platí $\mathrm{dist}_G(i,v) > d$ (viz obrázek 9), a že $|V| = \frac{t+1}{2} - 2$. Dále dokážeme, že $\mathrm{dist}_G(i,w) > d$ pro každé $w \in W$. Uvažujeme následující dvě cesty:

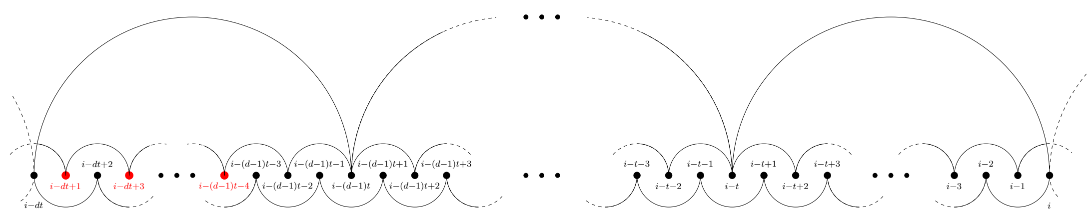
$$R = \{i, i-t, \ldots, i-t(d-y), i-t(d-y)+2, \ldots, i-t(d-y)+2y = r\}$$

a

$$S = \{i, i-t, \ldots, i-t(d-y-2), i-t(d-y-2)-2, \ldots, i-t(d-y-2)-2(y+2) = s\}.$$

Poznamenejme, že každá odlišná cesta od $R \cup S$ délky nejvýše d s počátečním vrcholem i v grafu G neobsahuje vrchol u takový, že $r < u < s$ kromě množiny cest T, kde

$$T = \{i, i-t, \ldots, i-t(d-y)-1, i-t(d-y-1)\pm 2, \ldots, i-t(d-y-1)\pm 2(j+1), j \leq y\}.$$



Obrázek 9: Část grafu $G(\{2,t\})$ s červeně vyznačenými vrcholy, jenž odpovídají vrcholům množiny V z důkazu věty 7.6

Ale potom vrcholy $t \in T : r < t < s$ jsou liché a vrcholy množiny W sudé, nebo naopak (v závislosti na y). Tedy nelze, aby cesta z množiny T obsahovala vrchol w. Nyní dokážeme, že platí $r < w$ a $w < s$ pro každé $w \in W$. Protože $r = i - t(d-y) + 2y$ a $w = i - t(d-y) + 2y + 2z$, dostáváme $0 < 2z$, a tedy platí $r < w$, neboť z je kladné číslo. V důkazu nerovnosti $w < s$ využijeme toho, že $z \leq t-3-2y$ a získáváme $w = i-t(d-y)+2y+2z \leq i-t(d-y)+2y+2(t-3-2y)$. Po roznásobení a přeuspořádání dostáváme $w \leq (i - td + ty + 2t - 2y - 4) - 2 < i - td + ty + 2t - 2y - 4 = s$.

Protože platí $r < w < s$ pro $\forall w \in W$, neexistuje cesta délky d s počátečním vrcholem i obsahující vrchol w v grafu G, a tedy barva vrcholu i nezávisí na barvách vrcholů množiny W. Poznamenejme, že $|W| = \sum_{y=0}^{\frac{t-3}{2}-1} 2(\frac{t-3}{2} - y) = \frac{t-3}{2}(\frac{t-3}{2} + 1)$.

Tedy barva vrcholu i závisí nejvýše na barvách $dt-|V|-|W| = dt-(\frac{t+1}{2}-2)-\frac{t-3}{2}(\frac{t-3}{2}+1) = td + \frac{1}{4}(-t^2 + 2 + 3)$ vrcholů. V nejhorším případě jsou tyto barvy odlišné, ale stále máme jednu barvu k dispozici pro obarvení vrcholu i, neboť $td+\frac{1}{4}(-t^2+2t+3)+1 = td+\frac{1}{4}(-t^2+2t+7)$. Po obarvení všech kladných vrcholů, uděláme totéž pro záporné vrcholy v klesajícím pořadí. Poznamenejme, že v tomto případě barva vrcholu i závisí na barvách vrcholů $\{i+1, i+2, i+3, \ldots, i+td\} - V - W$, kde množina $V = \{i + t(d-1) + 2(x+1) : x = 1, 2, \ldots, \frac{t+1}{2} - 2\}$ a $W = \{i+t(d-y)-2(y+z); y = 0, 1, \ldots, \frac{t-3}{2}-1; z = 1, 2, \ldots, t-3; z \leq t-3-2y\}$. Opět $|\{i+1, i+2, i+3, \ldots, i+td\}| - |V| - |W| = td + \frac{1}{4}(-t^2+2+3)$, a tedy barva vrcholu i závisí na barvách $td + \frac{1}{4}(-t^2 + 2 + 3)$ vrcholů. V nejhorším případě jsou tyto barvy odlišné, ale stále máme jednu barvu k dispozici pro obarvení vrcholu i. $\square$

7.2.3 Přesná hodnota d-distančního chromatického čísla grafů $G(\{2,t\})$

V této kapitole dokážeme přesnou hodnotu d-distančního chromatického čísla $\chi_d(G(\{2,t\}))$ pro $d \geq t-3$.

Pro $t = 3$ dávají věty 7.5 a 7.6 přesnou hodnotu $\chi_d(G(\{2,3\}))$.

Důsledek 7.7. *Nechť* $G(\{2,3\})$ *je distanční graf a* $d \geq 2$. *Potom* $\chi_d(G(\{2,3\})) = 3d+1$.

Pro důkaz následující věty 7.9 zde uvedeme tvrzení 7.8, které určuje vzdálenost dvou vrcholů v grafu $G(\{2,t\})$.

Tvrzení 7.8. *Nechť* $t \geq 3$ *je liché,* G *je distanční graf* $G(\{2,t\})$ *a* $\{q,q',r,r'\} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Dále nechť* a,b *jsou libovolné dva vrcholy grafu* G, *kde* $|b-a| = tq'+r'$, $0 < r' \leq t$. *Dále definujeme* q,r *následovně:*

$$\begin{cases} \text{je-li } |b-a| \text{ liché a } q' \text{ liché, potom } q = q' \text{ a } r = \frac{r'}{2}, \\ \text{je-li } |b-a| \text{ liché a } q' \text{ sudé, potom } q = |q'-1| \text{ a } r = \frac{t+r'}{2}, \\ \text{je-li } |b-a| \text{ sudé a } q' \text{ liché, potom } q = |q'-1| \text{ a } r = \frac{t+r'}{2}, \\ \text{je-li } |b-a| \text{ sudé a } q' \text{ sudé, potom } q = q' \text{ a } r = \frac{r'}{2}. \end{cases}$$

Potom $dist_G(a,b) = \min(q+r, q+2+t-r)$.

Důkaz. Nechť G je graf $G(\{2,t\})$. Bez ztráty na obecnosti předpokládejme, že $b \geq a$. Poznamenejme, že t-hranou (resp. 2-hranou) v grafu G rozumíme hranu mezi vrcholy $i, i \pm t$ (resp. $i, i \pm 2$) pro $i \in \mathbb{Z}$ v grafu G. Každá nejkratší cesta mezi vrcholy a a b v G používá buď q t-hran a r 2-hran, je-li $qt \leq b-a$, nebo $q+2$ t-hran a $t-r$ 2-hran, je-li $qt > b-a$. □

Věta 7.9. *Nechť* $t > 3$ *je liché,* $G(\{2,t\})$ *je distanční graf a* $d \geq t-3$. *Potom*

$$\chi_d(G(\{2,t\})) = 1 + t\left(d - \frac{t-3}{2}\right).$$

Důkaz. Nechť G je graf $G(\{2,t\})$. Nechť $\ell = 1 + t\left(d - \frac{t-3}{2}\right)$. Z věty 7.5 plyne, že $\chi_d(G) \geq \ell$.

Nyní dokážeme, že $\chi_d(G) \leq \ell$. Definujeme barvení f vrcholů grafu G následovně. Nechť $f(i) = i \pmod{\ell} + 1$ pro $i \in \mathbb{Z}$. Z popsaného barvení jsou po sobě jdoucí celá čísla (vrcholy grafu G) ze $\mathbb{Z}$ obarvována podle následujícího vzoru barev:

$$123\ldots(\ell-1)\ell.$$

Tvrdíme, že f je d-distanční barvení grafu G. Nejdříve dokážeme, že $td < 2\ell$. Předpokládejme opak, že $td \geq 2\ell$. Dosazením za ℓ získáme $td \geq 2\left(1 + t\left(d - \frac{t-3}{2}\right)\right)$. Dále po roznásobení a odečtení td dostáváme $0 \geq 2 + td - t^2 + 3t$. Z předpokladů věty víme, že $d \geq t-3$, tedy po úpravě získáme $0 \geq 2 + t(t-3) - t^2 + 3t$, z čehož dostáváme $0 \geq 2$ a to je spor. Tedy libovolné dva různé vrcholy $a, b \in V(G)$

s $|b-a| \geq 2\ell$, které jsou obarvené stejnou barvou $s \in \{1, 2, \dots, \ell\}$, jsou ve vzdálenosti alespoň $d+1$ v G. Nyní, pro libovolné $i \in \mathbb{Z}$ potřebujeme zkontrolovat pouze vzdálenost mezi vrcholy $i, i+1, \dots, i+2\ell-1$ v G, které jsou obarveny stejnou barvou jako i. Z definice d-distančního barvení a barvení f vyplývá, že stejnou barvu jako vrchol i z $\{i+1, \dots, i+2\ell-1\}$ má pouze vrchol $i+\ell$. Tedy jediné, co potřebujeme dokázat, je to, že $\mathrm{dist}_G(i, i+\ell) \geq d+1$. Na určení vzdálenosti vrcholů i a $i+\ell$ v G využijeme tvrzení 7.8. Nechť $\ell = r' + tq'$, kde $r' \leq t-1$. Protože $|i-(i+\ell)| = \ell = 1 + t(d - \frac{t-3}{2})$, dostáváme, že $q' = (d - \frac{t-3}{2})$ a $r' = 1$. Jelikož $|i-(i+\ell)| = \ell$ a q' mají opačnou paritu, dostáváme, že $q = |q'-1| = |d - \frac{t-3}{2} - 1| = d - \frac{t-3}{2} - 1$, protože $d \geq t-3$, a $r = \frac{t+r'}{2} = \frac{t+1}{2}$. Potom podle tvrzení 7.8 platí $\mathrm{dist}_G(i, i+\ell) = \min(q+r, q+2+t-r)$. Jelikož $q+r = d - \frac{t-3}{2} - 1 + \frac{t+1}{2} = d+1$ a $q+2+t-r = d - \frac{t-3}{2} - 1 + 2 + t - \frac{t+1}{2} = d+2$, je $\mathrm{dist}_G(i, i+\ell) = d+1$. Z toho plyne, že popsané barvení f je d-distanční barvení grafu G. □

7.2.4 Distanční barvení s parametrem $d = 2$ grafů $G(\{2, t\})$

V této kapitole se zabýváme S-pakovacím barvením grafu $G(\{2, t\})$, kde $S = (2, 2, 2, \dots)$. Poznamenejme, že pro množinu celých čísel $\{a_1, \dots, a_r\}$, kde $\forall i$ je $a_i < m$, píšeme $a \equiv a_1, \dots, a_r \pmod{m}$, je-li $a \equiv a_i \pmod{m}$ pro nějaké $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Tvrzení 7.10. *Nechť $G(\{2, 3\})$ je distanční graf. Potom $\chi_2(G(\{2, 3\})) = 7$.*

Důkaz. Nechť G je graf $G(\{2, 3\})$. Pro důkaz spodní meze $\chi_2(G) \geq 7$ využijeme definici 2-distančního barvení, ze které plyne, že vrcholy ve vzájemné vzdálenosti nejvýše dva, musí být obarveny odlišnou barvou. Pro každá dvě libovolná celá čísla (vrcholy grafu G) $a, b \in \{i, i+1, \dots, i+6\}$ pro $i \in \mathbb{Z}$ v grafu G platí, že $\mathrm{dist}_G(a, b) \leq 2$. Tedy každých sedm po sobě jdoucích celých čísel (vrcholů) musí mít vzájemně odlišnou barvu a $\chi_2(G) \geq 7$.

Nyní dokážeme, že $\chi_2(G) \leq 7$. Definujeme barvení $f : \mathbb{Z} \to \{1, 2, \dots, 7\}$ předpisem $f(i) = i \pmod{7} + 1$ pro $i \in \mathbb{Z}$. Z popsaného barvení jsou po sobě jdoucí celá čísla (vrcholy grafu G) ze $\mathbb{Z}$ obarvována podle následujícího vzoru barev:

$$1234567.$$

Je zřejmé, že pro libovolné dva odlišné vrcholy $a, b \in V(G)$, pro které platí $f(a) = f(b)$, dostaneme $|a-b| = 7\ell$ pro $\ell \in \mathbb{N}$. Poznamenejme, že v grafu G jsou dva odlišné vrcholy $a, b \in V(G)$ ve vzdálenosti nejvýše 2, je-li $|a-b| \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Protože $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \neq 7\ell$ pro každé $\ell \in \mathbb{N}$, dostáváme, že $\chi_2(G) \leq 7$. □

Věta 7.11. *Nechť $t > 3$ je liché a $G(\{2, t\})$ je distanční graf. Potom*

$$\chi_2(G(\{2,t\})) = \begin{cases} 5, & \textit{je-li } t \equiv 1, 9 \pmod{10}, \\ 6, & \textit{je-li } t \equiv 3, 5, 7 \pmod{10}. \end{cases}$$

Důkaz. Nechť G je graf $G(\{2, t\})$. První část tohoto důkazu se věnuje tvrzení $\chi_2(G) = 5$, je-li $t \equiv 1, 9 \pmod{10}$ a druhá část důkazu tvrzení $\chi_2(G) = 6$, je-li $t \equiv 3, 5, 7 \pmod{10}$.

Případ 1. $t \equiv 1, 9 \pmod{10}$ a $t > 3$.
Dolní mez $\chi_2(G) \geq 5$ je zřejmá. Protože graf G je 4-regulární graf, existuje 5 vrcholů (libovolný vrchol a jeho 4 sousedé) z $V(G)$, které musí být obarveny navzájem odlišnými barvami.

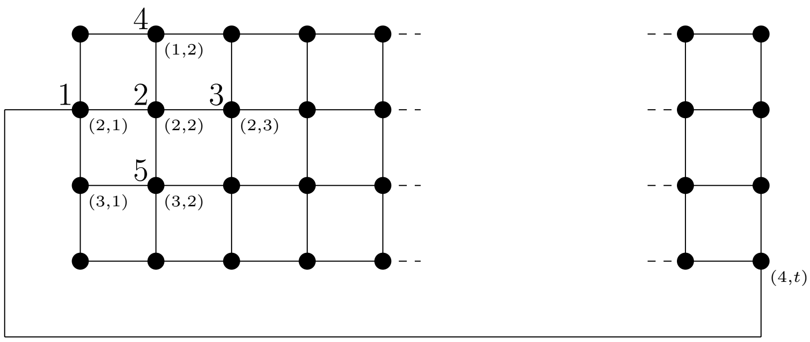
Nyní dokážeme horní mez $\chi_2(G) \leq 5$ pro $t \equiv 1, 9 \pmod{10}$. Definujeme barvení $f : \mathbb{Z} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ předpisem $f(i) = i \pmod 5 + 1$ pro $i \in \mathbb{Z}$. Z popsaného barvení f jsou po sobě jdoucí celá čísla (vrcholy grafu G) obarvována podle následujícího vzoru barev:

$$12345.$$

Je zřejmé, že pro libovolné dva odlišné vrcholy $a, b \in V(G)$, pro které platí $f(a) = f(b)$, dostaneme $|a - b| = 5k$ pro $k \in \mathbb{N}$. Poznamenejme, že v grafu G jsou dva odlišné vrcholy $a, b \in V(G)$ ve vzdálenosti nejvýše 2, je-li $|a - b| \equiv 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9 \pmod{10}$, protože buď $t \equiv 1 \pmod{10}$ nebo $t \equiv 9 \pmod{10}$. Protože $1, 2, 3, 4, 7, 8, 9 \pmod{10} \neq 5k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, je takto definované obarvení 2-distančním barvením, a tedy $\chi_2(G) \leq 5$ pro $t \equiv 1, 9 \pmod{10}$.

Případ 2. $t \equiv 3, 5, 7 \pmod{10}$ a $t \geq 5$.

Případ 2.1. Spodní mez $\chi_2(G) \geq 6$ pro $t \equiv 3, 5, 7 \pmod{10}$.
Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že graf G lze obarvit 5 barvami. Tudíž i libovolný podgraf H_t grafu G lze obarvit 5 barvami. Uvažujme graf $H'_t = P_4 \square P_t$, jehož vrcholy budou označeny (i, j), $i = 1, 2, 3, 4$ a $j = 1, 2, \ldots, t$, tak, že $(i, j)(i + 1, j) \in H(H'_t)$ pro každé $i = 1, 2, 3$ a $j = 1, 2, \ldots, t$, a $(i, j)(i, j + 1) \in H'_t$ pro každé $i = 1, 2, 3, 4$ a $j = 1, 2, \ldots, t - 1$. Nechť H_t je graf získaný z H'_t přidáním hrany $(2, 1)(4, t)$, $V(H_t) = \{(i, j) : i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, \ldots, t\}$. Dále nechť $f : V(H_t) \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je 2-distanční barvení grafu H_t. Bez ztráty na obecnosti předpokládejme, že $f((2, 2)) = 2$, $f((1, 2)) = 4$, $f((3, 2)) = 5$, $f((2, 1)) = 1$ a $f((2, 3)) = 3$ (viz obrázek 10). Pro obarvení vrcholů $(1, 1)$ a $(3, 1)$ máme právě tři následující možnosti:



Obrázek 10: Podgraf H_t grafu G.

a) $f((3,1)) = 4, f((1,1)) = 5$,

b) $f((3,1)) = 4, f((1,1)) = 3$,

c) $f((3,1)) = 3$.

Poznamenejme, že po obarvení vrcholů množiny $A = \{(i,j) : i = 1,2; j = 1,2,3\} \cup \{(2,3)\}$, je barva vrcholů $V(P_4 \Box P_t) - (A \cup \{(4,t)\})$ jednoznačně určena za předpokladu, že f je 2-distanční barvení. Rozebereme zvlášť každý z výše zmíněných případů.

Případ 2.1a. $f((3,1)) = 4, f((1,1)) = 5$.
Barvy vrcholů množiny A implikují $f((1,3)) = 1$. Protože vrcholy $(1,3)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,2)$ jsou obarveny barvami $1,2,3,4,5$ a jejich vzdálenost je nejvýše 2 od vrcholu $(3,3)$, usuzujeme z toho, že vrchol $(3,3)$ nelze obarvit žádnou z barev $\{1,2,\dots,5\}$ a dostáváme spor s předpokladem, že G lze obarvit 5 barvami.

Případ 2.1b. $f((3,1)) = 4, f((1,1)) = 3$.
Jak bylo výše řečeno, každému vrcholu $(i,j) \in V(P_4 \Box P_t) - (A \cup \{(4,t)\}))$ lze přiřadit právě jednu vyhovující barvu $\{1,2,\dots,5\}$ ve 2-distančním barvení f. Konkrétně toto barvení f přiřadí vrcholu $(i,j) \in V(P_4 \Box P_t)$ barvu ℓ právě tehdy, když $(i,j) \in V_\ell, \ell = 1,2,\dots,5$. Množiny $V_\ell, \ell = 1,2,\dots,5$ jsou definovány následovně:

$V_1 = \{(1, j \equiv 4 \pmod 5), (2, j \equiv 1 \pmod 5), (3, j \equiv 3 \pmod 5), (4, j \equiv 0 \pmod 5)\}$,
$V_2 = \{(1, j \equiv 0 \pmod 5), (2, j \equiv 2 \pmod 5), (3, j \equiv 4 \pmod 5), (4, j \equiv 1 \pmod 5)\}$,
$V_3 = \{(1, j \equiv 1 \pmod 5), (2, j \equiv 3 \pmod 5), (3, j \equiv 0 \pmod 5), (4, j \equiv 2 \pmod 5)\}$,

$V_4 = \{(1, j \equiv 2 \pmod 5), (2, j \equiv 4 \pmod 5), (3, j \equiv 1 \pmod 5), (4, j \equiv 3 \pmod 5)\}$,
$V_5 = \{(1, j \equiv 3 \pmod 5), (2, j \equiv 0 \pmod 5), (3, j \equiv 2 \pmod 5), (4, j \equiv 4 \pmod 5)\}$.

Je zřejmé, že množiny $V_1, \dots, V_5$ jsou disjunktní a $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_5$ obsahuje všechny vrcholy z $V(H_t)$. Protože vzdálenost vrcholu $(4, t)$ s libovolným vrcholem z množiny $\{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$ je nejvýše 2 a tyto vrcholy jsou obarveny barvami $1, 2, 3$ a 4, jediná přípustná barva pro vrchol $(4, t)$ je 5. Podle 2-distančního barvení f (definovaném v tomto případě 2.1b) je vrchol obarven barvou 5 právě tehdy, je-li z množiny V_5. Musí tedy platit, že $t \equiv 4 \pmod 5$. Náš předpoklad je, že $t \equiv 3, 5, 7 \pmod{10}$, a protože $4 \pmod 5 \not\equiv 3, 5, 7 \pmod{10}$, nelze vrchol $(4, t)$ obarvit žádnou z barev $\{1, 2, \dots, 5\}$, a tedy nastává spor s naším předpokladem, že G lze obarvit 5 barvami.

Případ 2.1c. $f((3, 1)) = 3$.
Zde je situace velmi podobná předchozímu případu. Opět každému vrcholu $(i, j) \in V(P_4 \square P_t) - (A \cup \{(4, t)\})$ lze přiřadit právě jednu vyhovující barvu z $\{1, 2, \dots, 5\}$ ve 2-distančním barvení f. Konkrétně toto barvení f přiřadí vrcholu $(i, j) \in V(P_4 \square P_t)$ barvu ℓ, je-li $(i, j) \in V_\ell, \ell = 1, 2, \dots, 5$. Množiny $V_\ell, \ell = 1, 2, \dots, 5$ jsou definovány následovně:

$V_1 = \{(1, j \equiv 3 \pmod 5), (2, j \equiv 1 \pmod 5), (3, j \equiv 4 \pmod 5), (4, j \equiv 2 \pmod 5)\}$,
$V_2 = \{(1, j \equiv 4 \pmod 5), (2, j \equiv 2 \pmod 5), (3, j \equiv 0 \pmod 5), (4, j \equiv 3 \pmod 5)\}$,
$V_3 = \{(1, j \equiv 0 \pmod 5), (2, j \equiv 3 \pmod 5), (3, j \equiv 1 \pmod 5), (4, j \equiv 4 \pmod 5)\}$,
$V_4 = \{(1, j \equiv 2 \pmod 5), (2, j \equiv 0 \pmod 5), (3, j \equiv 3 \pmod 5), (4, j \equiv 1 \pmod 5)\}$,
$V_5 = \{(1, j \equiv 1 \pmod 5), (2, j \equiv 4 \pmod 5), (3, j \equiv 2 \pmod 5), (4, j \equiv 0 \pmod 5)\}$.

Je zřejmé, že množiny $V_1, \dots, V_5$ jsou disjunktní a $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_5$ obsahuje všechny vrcholy z $V(H_t)$. Protože vzdálenost vrcholu $(4, t)$ s libovolným vrcholem z množiny $\{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$ je nejvýše 2 a tyto vrcholy jsou obarveny barvami $1, 2, 3$ a 5, jediná přípustná barva pro vrchol $(4, t)$ je 4. Podle 2-distančního barvení f je vrchol obarven barvou 4 právě tehdy, je-li z množiny V_4. Musí tedy platit, že $t \equiv 1 \pmod 5$. Náš předpoklad je, že $t \equiv 3, 5, 7 \pmod{10}$, a protože $1 \pmod 5 \not\equiv 3, 5, 7 \pmod{10}$, nelze vrchol $(4, t)$ obarvit žádnou z barev $\{1, 2, \ldots, 5\}$, a tedy opět nastává spor s naším předpokladem, že G lze obarvit 5 barvami. Tedy dokázali jsme, že na obarvení grafu G je potřeba alespoň 6 barev.

Případ 2.2. Horní mez $\chi_2(G) \leq 6$ pro $t \equiv 3, 5, 7 \pmod{10}$.
Stanovení horní meze rozdělíme na dva podpřípady.

Případ 2.2a. $t \in \{5, 7, 13\}$.
Definujme barvení $f : \mathbb{Z} \to \{1, 2, \ldots, 6\}$ následovně. Nechť $f(i) = i \pmod 6 + 1$ pro $i \in \mathbb{Z}$. Z popsaného barvení jsou po sobě jdoucí celá čísla (vrcholy grafu G) obarvována podle následujícího vzoru barev:

$$123456.$$

Je zřejmé, že pro libovolné dva odlišné vrcholy $a, b \in V(G)$, pro které platí, že $f(a) = f(b)$, dostaneme $|a-b| = 6k$ pro $k \in \mathbb{N}$. V grafu $G(\{2, 5\})$ jsou dva odlišné vrcholy $a, b \in V(G)$ ve vzdálenosti nejvýše 2, pouze pokud $|a - b| \in A_1, A_1 = \{2, 3, 4, 5, 7, 10\}$ v $G(\{2, 7\})$ jsou dva odlišné vrcholy $a, b \in V(G)$ ve vzdálenosti nejvýše 2, pouze pokud $|a - b| \in A_2, A_2 = \{2, 4, 5, 7, 9, 14\}$ a v $G(\{2, 13\})$ jsou dva vrcholy $a, b \in V(G)$ ve vzdálenosti nejvýše 2, pouze pokud $|a-b| \in A_3, A_3 = \{2, 4, 11, 13, 15, 26\}$. Protože pro každý vrchol $j \in A_i$ pro $i = 1, 2, 3$, platí $j \neq 6k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, je barvení f 2-distančním barvením grafu G a platí $\chi_2(G) \leq 6$ pro $t \in \{5, 7, 13\}$.

Případ 2.2b. $t \equiv 3, 5, 7 \pmod{10}$ a $t \geq 15$.
Nechť s a ℓ jsou přirozená čísla a nechť $\ell < 5$. Dále nechť $t+1 = 5s+\ell$, a $k = s-\ell$. Poznamenejme, že $5k + 6\ell = t + 1$. Definujeme barvení $f : \mathbb{Z} \to \{1, 2, \ldots, 6\}$ následovně. Nechť $f(i) = i \pmod 5 + 1$ pro $0 \leq i \pmod{t+1} < 5k, i \in \mathbb{Z}$ a $f(i) = (i - 5k) \pmod 6 + 1$ pro $5k \leq i \pmod{t+1} < t+1, i \in \mathbb{Z}$. Z popsaného barvení jsou po sobě jdoucí celá čísla (vrcholy grafu G) ze $\mathbb{Z}$ obarvována podle následujícího vzoru barev:

$$(12345)^k(123456)^\ell,$$

kde $(12345)^k$ (resp. $(123456)^\ell$) znamená opakování 12345 (resp. 123456) k-krát (resp. ℓ-krát). Nechť $a \in V(G)$. Dokážeme, že $f(a) \neq \{f(a \pm 2), f(a \pm t), f(a \pm 4), f(a \pm (t \pm 2)), f(a \pm 2t)\}$. Je zřejmé, že $f(a) \neq \{f(a \pm 2), f(a \pm 4)\}$. Dále $f(a) \neq f(a \pm t)$, protože perioda uvedeného vzoru je délky $t + 1$, a tedy vrchol $a \pm t$ je obarven jednou z barev vrcholů $a \pm 1$ (s ohledem na počítání modulo 5, nebo 6, v závislosti na jakém místě v periodě uvedeného vzoru se vrchol a nachází). Podobně $f(a) \neq \{f(a \pm (t \pm 2)), f(a \pm 2t)\}$, protože vrcholy $a \pm (t + 2)$ a $a \pm 2t$ jsou obarveny odlišnou barvou od barvy vrcholu a. Tedy libovolné dva vrcholy ve vzdálenosti nejvýše 2 v G nejsou obarveny stejnou barvou. Z toho plyne, že f je 2-distanční barvení grafu G. $\square$

8 Závěr

V této práci byly shrnuty a setřízeny poznatky z problematiky pakovacího, dis- tančního a S-pakovacího barvení. Byly nalezeny přesné hodnoty S-pakovacího chromatického čísla distančních grafů $G(\{2,t\})$ pro sekvence S skládající se z jedniček a dvojek. Dále byla nalezena spodní a horní mez distančního chromatického čísla distančních grafů $G(\{2,t\})$. Přesná hodnota distančního pakovacího chromatického čísla byla dokázána pro $d \geq t-3$. Dále bylo určeno 2-distanční chromatické číslo grafů $G(\{2,t\})$ pro libovolné t.

Tato práce poskytuje prvotní výsledky v oblasti S-pakovacího barvení distančních grafů $G(\{2,t\})$. Zde dokázané věty by bylo možné aplikovat na cirkulační grafy speciální velikosti a následně propojit dosud známé výsledky z těchto oblastí. Dalším rozšířením práce by mohlo být uvažování sekvence S, obsahující větší čísla než jedničky a dvojky anebo určení přesné hodnoty distančního chromatického čísla pro $2 < d \leq t-3$ grafů $G(\{2,t\})$.

Výsledky této práce jsou rovněž publikovány ve vědeckém článku, který byl zaslán do časopisu Applied Mathematics and Computation. Článek vznikl ve spolupráci s Univerzitou v Mariboru, katedrou přírodních věd a matematiky, konkrétně ve spolupráci s red. prof. dr. Boštjanem Brešarem a asistentkou Jasminou Ferme, kteří se na článku podíleli formou odborných konzultací a korektury důkazů.

Literatura

[1] S. Antonucci. Generalizzazioni del concetto di cromatismo d'un grafo. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* **15-B (5)** (1978), 20–31.

[2] J. Balogh, A. Kostochka, X. Liu. Packing chromatic number of cubic graphs. *Discrete Mathematics* **341** (2018), 474-483.

[3] J. Balogh, A. Kostochka, X. Liu. Packing chromatic number of subdivisions of cubic graphs. *Graphs Combinatorics* **35** (2019), 513-537.

[4] B. Benmedjdoub, E. Sopena, I. Bouchemakh. 2-Distance Colorings of Integer Distance Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **39** (2019), 589-603.

[5] O. V. Borodin, A. N. Glebov, A. O. Ivanova, T. K. Neustroeva, V. A. Tashkinov. Sufficient conditions for planar graphs to be 2-distance $(\Delta + 1)$-colorable. (Russian) *Siberian Elektronic Matematical Reports* **1** (2004), 129–141.

[6] O. V. Borodin, A. O. Ivanova. List 2-facial 5-colorability of plane graphs with girth at least 12. *Discrete Mathematik* **312 (2)** (2012), 306–314.

[7] O. V. Borodin, A. O. Ivanova. 2-distance 4-colorability of planar subcubic graphs with girth at least 22. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **32 (1)** (2012), 141–151.

[8] B. Brešar, J. Ferme. An infinite family of subcubic graphs with unbounded packing chromatic number. *Discrete Mathematics* **341** (2018), 2337-2342.

[9] B. Brešar, S. Klavžar, D. F. Rall. On the packing chromatic number of Cartesian products, hexagonal lattice, and trees. *Discrete Applied Mathematics* **155 (17)** (2007), 2303-2311.

[10] B. Brešar, S. Klavžar, D. F. Rall. Packing chromatic number of Base-3 Sierpiński graphs. *Graphs and Combinatorics* **32 (4)** (2016), 1313-1327.

[11] B. Brešar, S. Klavžar, D. F. Rall, K. Wash. Packing chromatic number under local changes in a graph. *Discrete Mathematics* **340** (2017), 1110–1115.

[12] Y. Bu, X. Lv. 2-Distance coloring of a planar graph without $3, 4, 7$-cycles. *Journal of Combinatorial Optimization* **32** (2016), 244–259.

[13] R. Čada, T. Kaiser, Z. Ryjáček. Diskrétní matematika. *Plzeň : Západočeská univerzita*, ISBN: 80-7082-939-7 (2004) 170 s..

[14] F. Deng, Z. Shao, A. Vesel. On the packing coloring of base-3 Sierpiński and H graphs. *Preprint arXiv: 1909.08285* (2019).

[15] Z. Dvořák, D. Král', P. Nejedlý, R. Škrekovski. Coloring squares of planar graphs with no short cycles. *Discrete Applied Mathematics* **157** (2009), 2634-2645.

[16] J. Ekstein, J. Fiala, P. Holub, B. Lidický. The packing chromatic number of the square lattice is at least 12. *Preprint arXiv: 1003.2291v1* (2010).

[17] J. Ekstein, P. Holub, B. Lidický. Packing chromatic number of distance graphs. *Discrete Applied Mathematics* **160** (2011), 518-524.

[18] J. Ekstein, P. Holub, O. Togni. The packing coloring of distance graphs $D(k,t)$. *Discrete Applied Mathematics* **167** (2013), 100-106.

[19] G. Fertin, E. Godard, A. Raspaud. Acyclic and k-distance coloring of the grid. *Information Processing Letters* **87** (2003), 51-58.

[20] J. Fiala, S. Klavžar, B. Lidický. The packing chromatic number of infinite product graphs. *European Journal of Combinatorics* **30** (2009), 1101-1113.

[21] A. S. Finbow, D. F. Rall. On the packing chromatic number of some lattices. *Discrete Applied Mathematics* **158** (2010), 1224–1228.

[22] N. Gastineau, P. Holub, O. Togni. On the packing chromatic number of subcubic outerplanar graphs. *Discrete Applied Mathematics* **255** (2019), 209–221.

[23] N. Gastineau, O. Togni. S-packing colorings of cubic graphs. *Discrete Mathematics* **339 (10)** (2014), 2461-2470.

[24] W. Goddard, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. M. Harris, D. F. Rall. Braodcast Chromatic Numbers of Graphs. *Ars Combinatoria* **86** (2008), 33-49.

[25] W. Goddard, H. Xu. A note on S-packing colorings of lattices. *Discrete Applied Mathematics* **166** (2014), 255-262.

[26] W. Goddard, H. Xu. The S-packing chromatic number of a graph. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **32** (2012), 795-806.

[27] S. G. Hartke, S. Jahanbekam, B. Thomas. The chromatic number of the square of subcubic planar graphs. *Preprint arXiv: 1604.06504v1* (2016).

[28] J. van den Heuvel, S. McGuinnes. Colouring the square of a planar graph. *Journal of Graph Theory* **42** (2003), 110–124.

[29] P. Holub. On distance local connectivity and vertex distance colouring. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **27 (2)** (2007), 209-227.

[30] P. Jacko, S. Jendrol'. Distance coloring of the hexagonal lattice. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **25** (2005), 151–166.

[31] S. Jendrol', Z. Skupień. Local structures in plane maps and distance colourings. *Discrete Mathematics* **236** (2001), 167–177.

[32] D. Korže, A. Vesel. On the packing chromatic number of square and hexagonal lattice. *Ars Mathematica Contemporanea* **7** (2014), 13–22.

[33] F. Kramer, H. Kramer. On the generalised chromatic number. *Annals of Discrete Mathematics* **30** (1986), 275–284.

[34] F. Kramer, H. Kramer. Un problème de coloration des sommets d'un graphe. *Comptes Rendus de l'Académe des Science Paris A* **268** (1969), 46–48.

[35] T. Madaras, A. Marcinová. On the structural result on normal plane maps. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **22** (2002), 293-303.

[36] B. Martin, F. Raimondi, T. Chen, J. Martin. The packing chromatic number of the infinite square lattice is between 13 and 15. *Discrete Applied Mathematics* **225** (2017), 136-142.

[37] M. Molloy, M. R. Salavatipour. A bound on the chromatic number of the square of a planar graph. *Journal of Combinatorial Theory Series B* **94 (2)** (2005), 189–213.

[38] P. K. Niranjan, R. K. Srinivasa. The k-distance chromatic number of trees and cycles. *AKCE International Journal of Graphs and Cominatorics* **16** (2019), 230-235.

[39] Z. Shao, A. Vesel. Modeling the packing coloring problem of graphs. *Applied Mathematical Modelling* **39** (2015), 3588-3595.

[40] A. Sharp. Distance coloring. *European Symposium on Algorithms* **4698** (2007), 510–521.

[41] C. Sloper. Broadcast-coloring of trees. *Rep. Inform.* **233** (2002), 1–11.

[42] R. Soukal, P. Holub. A note on packing chromatic number of the square lattice. *Electronic Journal of Combinatorics* **17** (2010), 1-7.

[43] A. Ševčíková. Distant chromatic number of the planar graphs. *Manuscript* (2001).

[44] O. Togni. On packing colorings of distance graphs. *Discrete Applied Mathematics* **167** (2014), 280-289.

[45] P. Torres, M. Valencia-Pabon. The packing chromatic number of hypercubes. *Discrete Applied Mathematics* **190-191** (2015), 127-140.

[46] G. Wegner. Graphs with given diameter and a coloring problem. *Technical Report, University of Dortmund* (1977).

[47] S. A. Wong. Colouring graphs with respect to distance. *M. Sc. Thesis, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Ontario, Canada* (1996).

9

University of Maribor

Faculty of Natural Sciences
and Mathematics
Koroška cesta 160
2000 Maribor, Slovenija

Maribor, 5.6.2020

To whom it may concern:

In March, 2020, Karolína Kamenická visited the Faculty of Natural Sciences and Mathematics at the University of Maribor, during which time she performed research under my supervision. Her visit resulted in a research paper concerning S-packing colorings of distance graphs, which is accessible at arXiv:2005.10491 **[mat.CO],** and was also submitted to a scientific journal. It is my understanding that the results from this research will be a part of her master's thesis. With this letter I wish to state that Karolína Kamenická was actively involved in all results and proofs of the paper, and gave key ideas in majority of the proofs.

Sincerely,

Prof. Boštjan Brešar

UNIVERZA V MARIBORU FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN MATEMATIKO

address: Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Maribor, Koroška 160, 2000 Maribor, Slovenia
www : http://omr.fnm.um.si/wp-content/uploads/Zaposleni/claniOddelka/bostjan.bresar/1osebna_stran.html
e-mail: bostjan.bresar@um.si | tel: +386 2 23 55 607| fax: +386 2 25 18 180