

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra matematiky



DIPLOMOVÁ PRÁCE  
POSTUPNÉ VLNY V NELINEÁRNÍCH  
ÚLOHÁCH

Plzeň, 2020

Hana Levá



# ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd  
Akademický rok: 2019/2020

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE (projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Bc. Hana LEVÁ**  
Osobní číslo: **A18N0005P**  
Studijní program: **N1101 Matematika**  
Studijní obor: **Matematika**  
Téma práce: **Postupné vlny v nelineárních úlohách**  
Zadávací katedra: **Katedra matematiky**

### Zásady pro vypracování

1. Seznámit se s vybranými typy nelineárních parciálních diferenciálních rovnic a s pojmy postupná vlna a soliton.
2. Nastudovat vybrané příklady konkrétních úloh, u kterých se postupné vlny a solitony vyskytují, včetně analytických metod řešení.
3. Známé výsledky shrnout, případně vhodně modifikovat a doplnit.
4. Teoretické výsledky ilustrovat vhodnými numerickými experimenty.



Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.  
vedoucí katedry

Doc. Dr. Ing. Vlasta Rábová  
děkanka

Rozsah diplomové práce: **cca 45 stran**  
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**  
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná**

#### Seznam doporučené literatury:

- K. E. Gustafson: Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods. Dover Publications, Mineola, New York (1999).
- W. A. Strauss: Partial Differential Equations, An Introduction. John Wiley & Sons, New York (1992).
- É. Brunet, B. Derrida: An Exactly Solvable Travelling Wave Equation in the Fisher-KPP Class. Journal of Statistical Physics 161 (2015), 801-820.
- B. Li, Y. Chen, H. Zhang: Exact travelling wave solutions for a generalized Zakharov-Kuznetsov equation. Applied Mathematics and Computation 146 (2003), 653-666.
- E. J. Parkes: Some periodic and solitary travelling-wave solutions of the short-pulse equation. Chaos, Solitons and Fractals 38 (2008), 154-159.

Vedoucí diplomové práce: **Doc. Ing. Gabriela Holubová, Ph.D.**  
Katedra matematiky

Datum zadání diplomové práce: **1. října 2019**  
Termín odevzdání diplomové práce: **15. května 2020**

*Radová*

**Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová**  
děkanka



*Brandner*

**Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.**  
vedoucí katedry

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 16. června 2020.

Hana Levá



# Poděkování

Předně bych ráda poděkovala své vedoucí práce doc. Ing. Gabriele Holubové, Ph.D. za cenné rady, připomínky, skvělou komunikaci a za vstřícnost a trpělivost při konzultacích. Dále děkuji své rodině a Martinovi za podporu.





# Abstrakt

Tato diplomová práce se zaměřuje na studium úloh pro parciální diferenciální rovnice s řešeními ve tvaru postupné vlny. Nejprve vysvětlíme pojmy postupná vlna a soliton. Poté popíšeme úlohy, v nichž se vyskytují. Dále se podrobněji zabýváme modelem visutého mostu s netypickou nelinearitou  $f(u) = \alpha u^+ - \beta u^- - 1$ . Pro tuto úlohu dokazujeme pomocí věty Mountain Pass Theorem existenci řešení ve tvaru postupné vlny. Omezíme možné hodnoty parametrů popisujících řešení, stejně tak velikost rychlosti šíření vlny. Na závěr provedeme numerické experimenty ve snaze najít konkrétní předpis pro řešení ve tvaru postupné vlny.

**Klíčová slova:** nelineární parciální diferenciální rovnice, postupná vlna, soliton, model visutého mostu, Mountain Pass Theorem

# Abstract

This master thesis is focused on study of problems for travelling waves in partial differential equations. At first, we explain the notions of travelling wave and soliton. After that, we describe problems containing these notions. Next, we deal with suspension bridge model with atypical nonlinearity  $f(u) = \alpha u^+ - \beta u^- - 1$ . For this problem we prove the existence of travelling wave solution due to the Mountain Pass Theorem. We restrict possible values of parameters that describe the solution as well as the magnitude of the velocity of travelling wave. In the end, we perform numerical experiments in order to find specific form of travelling wave solution.

**Key words:** nonlinear partial differential equations, travelling wave, soliton, suspension bridge model, Mountain Pass Theorem



# Obsah

Prohlášení	iii
Poděkování	v
Abstrakt	vii
<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Model visutého mostu</b>	<b>9</b>
2.1 Formulace úlohy . . . . .	9
2.2 Pomocná tvrzení . . . . .	12
2.3 Existence slabého řešení ve tvaru postupné vlny . . . . .	18
<b>3 Konstrukce postupné vlny</b>	<b>33</b>
3.1 Explicitní vyjádření obecného řešení . . . . .	33
3.2 Tvary přípustných řešení . . . . .	37
<b>4 Numerické experimenty</b>	<b>39</b>
<b>5 Shrnutí a otevřené otázky</b>	<b>43</b>
Příloha A	45
Příloha B	47
Seznam obrázků	49
Seznam tabulek	51
Literatura	53



# Kapitola 1

## Úvod

V této práci se budeme zabývat úlohami pro nelineární parciální diferenciální rovnice, jejichž řešení se nazývají postupná vlna. Takové rovnice mají široké využití v různých oborech, jelikož lze postupné vlny nalézt v přírodě velmi často, a to v mnoha rozdílných situacích. Konkrétními příklady mohou být vlny na vodě, šíření zvuku, v biologii populační modely, migrace biologických druhů nebo hojení ran, viz např. [1], modelování toků kapalin [2] či v mechanice modely chování nosníků a visutých mostů, více v Kapitole 2.

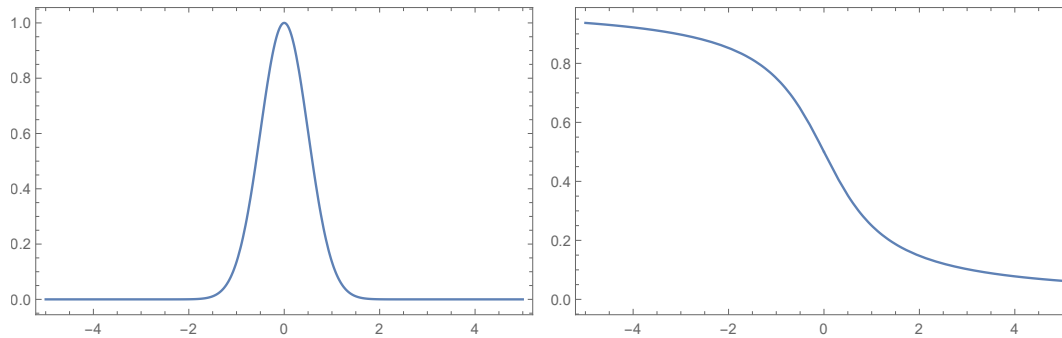
Obvykle jsou reálné situace zahrnující postupné vlny modelovány parciálními diferenciálními rovnicemi prvního nebo druhého řádu. Méně časté jsou modely čtvrtého řádu. Takové úlohy se používají právě v mechanice pro nosníky, dále též ke studiu formování vzorů ve fyzice a kvantové teorii (např. Schrödingerova rovnice), viz [3].

Uvedeme zde několik příkladů úloh pro rovnice s řešeními ve tvaru postupných vln. Zařadit mezi ně určitě lze i transportní a vlnovou rovnici nebo reakčně–difuzní rovnice a jejich modifikace. V tomto textu však detailněji rozebereme jen vybrané nelineární problémy spolu s analytickými vyjádřeními jejich řešení, bude-li to možné. Poznamenejme, že často nejsme schopni nalézt exaktní řešení takových úloh, proto se musejí řešit numericky. K důkazům existence řešení ve tvaru postupné vlny lze využít topologických nebo variačních metod matematické analýzy. Dříve, než začneme popisovat jednotlivé modely, zadefinujeme několik důležitých pojmů.

**Definice 1 (Postupná vlna).** Postupnou vlnou rozumíme libovolnou funkci ve tvaru  $f = f(x - vt)$ , kde parametr  $v$  odpovídá rychlosti šíření vlny.

**Definice 2 (Stacionární řešení).** Stacionárním řešením (nebo také rovnovážným stavem či ekvilibriem) parciální diferenciální rovnice rozumíme takové řešení, které se v čase nemění.

**Definice 3 (Homoklinické řešení).** Nechtě  $f^*$  je stacionární stav. Homoklinické řešení parciální diferenciální rovnice je takové řešení  $f = f(\xi)$ , pro něž platí  $f(\xi) \rightarrow f^*$  pro  $|\xi| \rightarrow +\infty$ .



Obrázek 1.1: Příklad homoklinického a heteroklinického řešení.

**Definice 4 (Heteroklinické řešení).** Necht  $f_1^*$  a  $f_2^*$  jsou dva různé stacionární stavy. Heteroklinické řešení parciální diferenciální rovnice je takové řešení  $f = f(\xi)$ , pro něž platí  $f(\xi) \rightarrow f_1^*$  pro  $\xi \rightarrow -\infty$  a  $f(\xi) \rightarrow f_2^*$  pro  $\xi \rightarrow +\infty$ .

Na obrázku 1.1 můžeme vlevo vidět ilustrační příklad tvaru homoklinického řešení, vpravo příklad heteroklinického řešení.

Dalším zajímavým pojmem je tzv. soliton. V literatuře je však těžké najít jednotnou definici, spíše se udávají vlastnosti solitonu, které jej charakterizují, viz např. [4, s. 268]. Soliton je zde uveden jako osamělá vlna, která při interakci s jiným solitonem zachovává svůj tvar i svou rychlost, až na fázový posun. Osamělou vlnou se rozumí lokalizovaná vlna, kterou je nutné odlišit od periodického řešení, jež obsahuje celý řetězec vln. Strauss ve své knize [5, s. 390] uvádí, že soliton je „lokalizovaná postupná vlna, která je nápadně stabilní“. Preciznější definici lze najít v článku od Benciho a Fortunata [6, s. 4]. Solitony jsou známé především jako řešení Kortewegovy–deVriesovy rovnice a obvykle odpovídají homoklinickým řešením, viz [7]. V přírodě se dají najít např. jako vlny v mělkých vodách, viz obrázek 1.2 (převzato z [8]).

## Kortewegova–deVriesova rovnice

Kortewegova–deVriesova rovnice je v literatuře, např. [5], uváděna ve tvaru

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.1)$$

kde  $u = u(x, t)$  je hledaná funkce a dolními indexy rozumíme parciální derivace podle dané proměnné. Jak bylo řečeno výše, netriviální homoklinická řešení rovnice (1.1) odpovídají solitonům. Tento typ vln byl poprvé pozorován J. S. Russellem v roce 1834 jako vlna ve vodním kanálu<sup>1</sup>, která nemění svůj tvar (podrobněji viz [5, s. 390]). Rovnice (1.1) se též objevuje v teorii plazmatu a jiných odvětvích fyziky. Její zvláštnost spočívá v tom, že je řešitelná analyticky. Ve stručnosti zde uvedeme, jak takové řešení získat.

<sup>1</sup>Pohyb solitonu ve vodním kanálu: <https://www.youtube.com/watch?v=SknvLa8qEu0>



Obrázek 1.2: Soliton na Venice Beach, Kalifornie. Foto Douglas Baldwin.

Předpokládáme, že platí  $u(x, t) = f(\xi)$ , kde  $\xi = x - ct$  a parametr  $c$  odpovídá rychlosti šíření solitonu. Díky této substituci přejdeme od parciální diferenciální rovnice (1.1) k obyčejné diferenciální rovnici

$$f''' + 6f'f - cf' = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Tu zintegrujeme a získáme tím rovnici  $f'' + 3f^2 - cf + K_1 = 0$ , kde  $K_1 \in \mathbb{R}$  je integrační konstanta. Přenásobíme obě strany  $2f'$  a po druhé integraci dostáváme rovnici  $(f')^2 + 2f^3 - cf^2 + 2K_1f + K_2 = 0$ , kde  $K_2 \in \mathbb{R}$  je druhá integrační konstanta. Vzhledem k požadavku, aby řešení bylo ve tvaru osamělé postupné vlny a popisovalo tak reálnou situaci, připojíme okrajové podmínky  $f(\xi) \rightarrow 0$ ,  $f'(\xi) \rightarrow 0$  a  $f''(\xi) \rightarrow 0$  pro  $|\xi| \rightarrow +\infty$ . Z toho vyplývá, že  $K_1 = K_2 = 0$ .

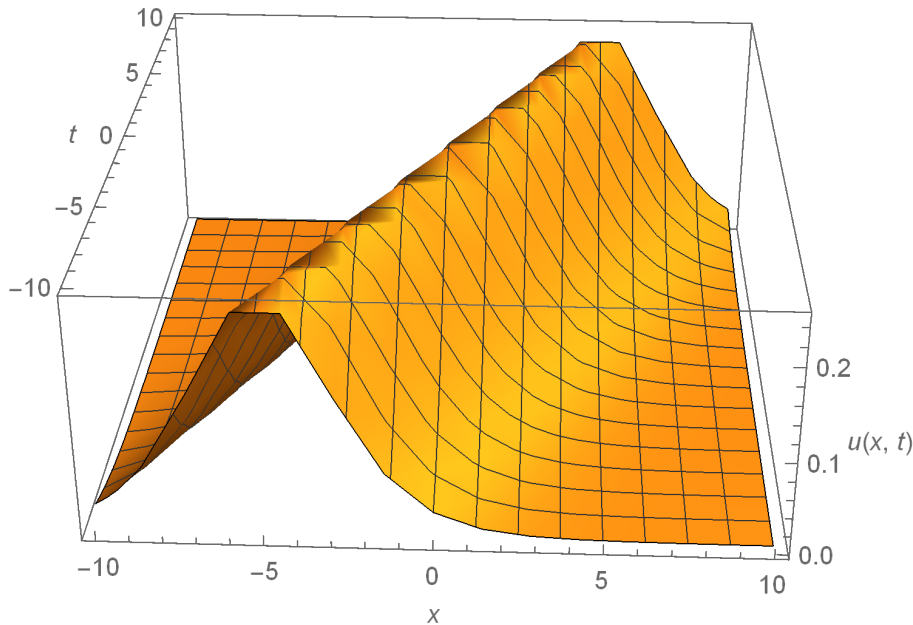
Nyní zbývá vyřešit obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu  $f' = \sqrt{cf^2 - 2f^3}$ . Jelikož hledáme pouze netriviální řešení, můžeme psát funkci  $f$  ve tvaru

$$f(\xi) = \frac{c}{2} \cosh^{-2} \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (\xi + K) \right), \quad (1.3)$$

kde  $K \in \mathbb{R}$ . Funkce  $u$  ve tvaru

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \cosh^{-2} \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct + K) \right) \quad (1.4)$$

je tedy hledaný předpis solitonu a jeho graf pro  $c = 0,5$  a  $K = 0$  můžeme vidět na obrázku 1.3. Z numerických experimentů prováděných v 60. letech 20. století M. Kruskalem a N. Zabuským, viz [5, s. 391], vyplynulo, že pokud k rovnici (1.1) připojíme libovolnou počáteční podmínku, řešení se pro  $t \rightarrow +\infty$  vždy rozloží na konečný počet solitonů s různými rychlostmi šíření. Takové chování je překvapivé, jelikož se dá očekávat u lineárních rovnic, nikoliv u nelineárních jako je (1.1). V jistém smyslu můžeme hovořit o „nelineární superpozici“. Díky tomuto speciálnímu chování jsou solitony používány ve fyzice také jako matematický model stabilních elementárních částic.



Obrázek 1.3: Graf řešení Kortevogovy–deVriesovy rovnice pro  $c = 0,5$  a  $K = 0$ .

## Kleinova–Gordonova rovnice a její modifikace

Další zajímavou třídou parciálních diferenciálních rovnic, jež vznikla modifikací vlnové rovnice a která stojí za zmínku, jsou rovnice typu

$$u_{tt} - u_{xx} + g(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.5)$$

kde  $g = g(u)$  je hladká funkce. Lineární Kleinova–Gordonova rovnice  $u_{tt} - u_{xx} + u = 0$ , kde  $g(u) = u$ , není pro naše účely příliš zajímavá, neobsahuje totiž řešení ve tvaru lokalizované postupné vlny, nýbrž řešení periodická. Zvláště pojmenované sine–Gordonova rovnice

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.6)$$

a sinh–Gordonova rovnice

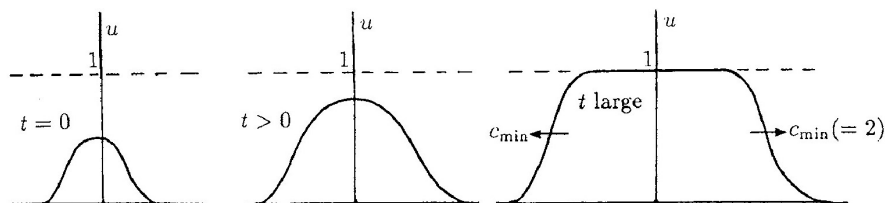
$$u_{tt} - u_{xx} + \sinh(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.7)$$

již požadovaná řešení mají. Je velmi důležité studovat dynamické chování těchto řešení, neboť se rovnice (1.6), (1.7) a jejich další modifikace používají k modelování mnoha problémů od toků kapalin až po kvantovou teorii. V odborných textech se také zkoumají rovnice s obecnějšími funkcemi  $g$ , viz např. [2, 7, 9].

## Fisherova–Kolmogorovova rovnice

Postupné vlny se také objevují jako řešení reakčně–difuzních rovnic. Klasickým předmětem studia v matematice, teoretické fyzice i biologii, viz [10, 11], jsou řešení





Obrázek 1.4: Schematický vývoj vlnového řešení Fisherovy–Kolmogorovovy rovnice v čase na reálné ose.

parciálních diferenciálních rovnic popisujících pohyb rozhraní mezi stabilním a nestabilním prostředím. Typickou rovnicí v tomto případě je tzv. Fisherova–Kolmogorovova nebo Fisherova–KPP rovnice (pojmenovaná podle Fishera, Kolmogorovova, Petrovského a Piskunovova) ve tvaru

$$u_t = Du_{xx} + f(u), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.8)$$

kde  $D$  je koeficient difuze a  $f = f(u)$  je reakční člen. Na něm ovšem závisí chování hledaného řešení  $u = u(x, t)$  a to, zda bude ve tvaru postupné vlny.

V knize od Murrayho, viz [1, s. 439], můžeme najít rozebraný klasický nejjednodušší příklad Fisherovy–Kolmogorovovy rovnice s  $f(u) = ku(1 - k)$ , kde  $k > 0$ . Tato rovnice je přirozeným rozšířením logistické rovnice a může popisovat např. prostorové šíření určitého genu v populaci. Murray se zabývá studiem trajektorií ve fázové rovině, hledáním rovnovážných stavů a jejich stabilitou. Ukazuje také, že velikost rychlosti šíření vlny  $c$  lze vyjádřit přímo z rovnice. Řeší proto problém na vlastní čísla a dochází k závěru, že minimální možná rychlost je  $c_{\min} = 2\sqrt{kD}$ . Na obrázku 1.4 (převzato z [1]) můžeme vidět schématicky naznačený vývoj vlnového řešení rovnice (1.8) s logistickým členem a rychlostí šíření  $c_{\min} = 2$ . Zkoumá také to, jaký typ počáteční podmínky se vyvine v postupnou vlnu, a pokud takové řešení existuje, jaká je jeho rychlost  $c$ .

Zmínit můžeme ještě další konkrétní funkce  $f$ , např.  $f(u) = ku^p(1 - u^q)$ , kde  $p > 0$  a  $q > 0$ . Pro  $p = q + 1$  se rovnice (1.8) dá dokonce vyřešit exaktně. Zajímavou funkcí je též

$$f(u) = ru \left( 1 - \frac{u}{q} \right) - \frac{u^2}{1 + u^2},$$

což je růstová funkce v modelu chování obaleče jedlového, viz [1, s. 460]. Ta se od předchozích liší tím, že rovnice (1.8) má více než dva stacionární stavy.

## Rozšířená Fisherova–Kolmogorovova rovnice a Swiftova–Hohenbergova rovnice

V této části textu uvedeme další typ rovnic s řešením ve tvaru postupné vlny, konkrétně tzv. rozšířenou Fisherovu–Kolmogorovovu rovnici a Swiftovu–



Obrázek 1.5: Pád mostu Tacoma Narrows 7. listopadu 1940.

Hohenbergovu rovnici. Obě jsou čtvrtého řádu a mají stejný tvar

$$u_t - \beta u_{xx} + \gamma u_{xxxx} - u + u^3 = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.9)$$

kde  $\gamma > 0$  a  $\beta \in \mathbb{R}$ . Pokud je  $\beta > 0$ , (1.9) se obvykle nazývá rozšířená Fisherova–Kolmogorovova rovnice (z angličtiny EFK rovnice), zatímco v případě  $\beta < 0$  je (1.9) nazývána Swiftova–Hohenbergova rovnice.

EFK rovnici můžeme najít poprvé v článku od Coulleta a spol. z roku 1987, viz [12], a slouží jako jeden z matematických modelů pro studium tvorby vzorů a fázových posunů ve fyzice a mechanice. Swiftova–Hohenbergova rovnice byla původně popsána v [13] a lze ji použít jako model propagace laserů, viz např. [14]. Dynamika této rovnice je méně probádaná, obecně se mnohem více zkoumá EFK rovnice. Byl pro ni proveden důkaz existence periodických a homoklinických řešení, avšak otázka existence heteroklinických řešení zůstává otevřená, viz [15].

## Nelineární rovnice pro nosník

Jako poslední typ nelineární parciální diferenciální rovnice, která může mít řešení ve tvaru postupné vlny, zmíníme jednodimenzionální rovnici modelující chování nosníků, jež se často objevuje ve tvaru

$$u_{tt} + u_{xxxx} + f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.10)$$

kde  $u = u(x, t)$  udává výchylku nosníku a  $f = f(u)$  je obecně nelineární funkce.

Rovnice (1.10) se také používá jako jeden z mnoha matematických modelů visutých mostů, na něž se zaměříme v následujících kapitolách. Tento typ mostů je dostatečně dlouhý a úzký na to, aby pro něj bylo možné použít jednodimenzionální model nekonečně dlouhého nosníku a zároveň se u něj objevila řešení ve tvaru postupných vln. Motivací ke zkoumání takové úlohy může být zřícení mostu Tacoma Narrows roku 1940, viz obrázek 1.5 (převzato z [16]), či pozorování nezvyklých oscilací na mostě Golden Gate.

V Kapitole 2 se budeme podrobněji zabývat konkrétním modelem visutého mostu s netypickou nelinearitou  $f(u) = \alpha u^+ - \beta u^-$ , kde  $\alpha$  a  $\beta$  jsou kladné parametry. Obdobnou substitucí, jaká byla uvedena u Kortevegovy–deVriesovy rovnice, převedeme parciální diferenciální rovnici na obyčejnou diferenciální rovnici. Dále zde uvádíme slabou a variační formulaci úlohy. K důkazu existence řešení ve tvaru postupné vlny využijeme variační metody, konkrétně provedeme důkaz pomocí věty Mountain Pass Theorem. Ukážeme, že námi zdefinovaný funkcionál má geometrii potřebnou k použití této věty a že jeho netriviální kritický bod odpovídá slabému řešení námi zkoumané úlohy.

V Kapitole 3 hledáme explicitní předpis řešení naší úlohy ve tvaru postupné vlny a uvedeme vztahy pro možné hodnoty parametrů popisujících takové řešení. V Kapitole 4 provedeme několik numerických experimentů. Předložíme grafy některých konkrétních řešení a popíšeme jejich chování při změně parametrů.



## Kapitola 2

# Model visutého mostu

### 2.1 Formulace úlohy

V této kapitole se budeme zabývat úlohami pro nelineární parciální diferenciální rovnice, které se používají k modelování různých druhů oscilací ve visutých mostech. Takových matematických modelů je velké množství a podoba každého z nich závisí na tom, jaký typ oscilací chceme modelovat (pro detailní přehled viz [17]). V našem případě budeme uvažovat jednoduchý jednodimenzionální model, který ve svém článku představili A. C. Lazer a P. J. McKenna [18]. V něm vystupující rovnice má obvykle tvar

$$mu_{tt} + EIu_{xxxx} + \delta u_t + bu^+ = W(x) + \varepsilon h(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t > 0, \quad (2.1)$$

s počátečními podmínkami

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{a} \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in [0, L], \quad (2.2)$$

a okrajovými podmínkami

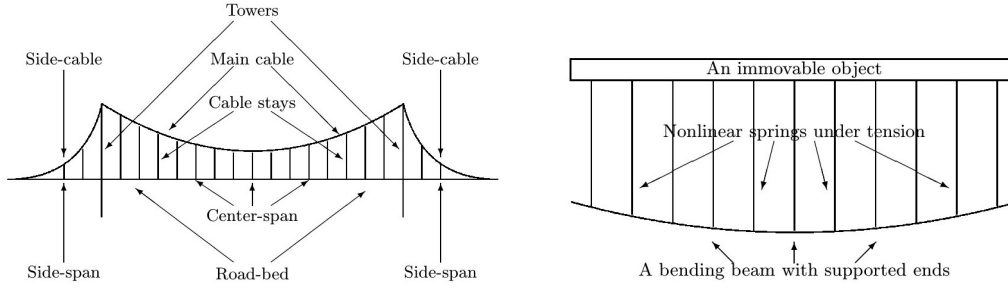
$$u(0, t) = u(L, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.3)$$

Někdy se též uvažují periodické počáteční podmínky

$$u(x, t + \tau) = u(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t > 0. \quad (2.4)$$

Hledaná funkce  $u = u(x, t)$  udává vertikální výchylku mostu z nezatíženého stavu, dolními indexy rozumíme parciální derivace podle dané proměnné, tj.  $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $u_{xxxx} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$  a  $u^+ = \max\{u, 0\}$ .

Schéma visutého mostu můžeme vidět na obrázku 2.1 vlevo (převzato z [17]). Na jeho hlavní mostovku je tedy nahlíženo jako na jednodimenzionální nosník upevněný na obou koncích a zavěšený na lanech, viz obrázek 2.1 vpravo (též převzato z [17]). Lana jsou v matematickém modelu uvažována jako pružiny s jednostrannou silou pružnosti řídicí se Hookovým zákonem, kde  $b > 0$  charakterizuje jejich tuhost. První člen na levé straně rovnice reprezentuje setrvačnou



Obrázek 2.1: Schéma visutého mostu a model hlavní mostovky.

sílu, kde parametr  $m$  udává hmotnost. Druhý člen značí elastickou sílu s modulem pružnosti v tahu  $E$  a momentem setrvačnosti v průřezu  $I$  a třetí člen popisuje tlumení s koeficientem  $\delta$ . Nosník se prohýbá vlastní vahou popsanou funkcí  $W = W(x)$ , která značí váhu na jednotku délky. Funkce  $h = h(x, t)$  popisuje působení dalších sil na nosník a  $\varepsilon > 0$ , viz např. [17, 18, 19, 20, 21].

Objektem našeho zájmu budou nyní řešení rovnice (2.1) na celé reálné ose, tj. nadále budeme uvažovat nosník nekonečné délky. Nejprve rovnici (2.1) vydělíme hmotností  $m$ :

$$u_{tt} + \frac{EI}{m}u_{xxxx} + \frac{\delta}{m}u_t + \frac{b}{m}u^+ = \frac{W(x)}{m} + \frac{\varepsilon}{m}h(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (2.5)$$

zavedeme označení  $k = \frac{b}{m}$  a pro jednoduchost položíme  $\delta = 0$  a  $\varepsilon = 0$ . Uvažujeme tedy model bez tlumení a bez vnějšího buzení. Navíc předpokládáme  $\frac{EI}{m} = 1$  a  $W(x) \equiv m$ . Rovnice (2.5) má pak tvar

$$u_{tt} + u_{xxxx} + ku^+ = 1, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (2.6)$$

Poznamenejme, že konstantní řešení  $u \equiv \frac{1}{k}$  odpovídá stacionárnímu stavu visutého mostu, viz [21]. K rovnici (2.6) je tedy rozumné připojit okrajovou podmínku  $u \rightarrow \frac{1}{k}$  pro  $|x| \rightarrow +\infty$  a hledat příslušná homoklinická řešení.

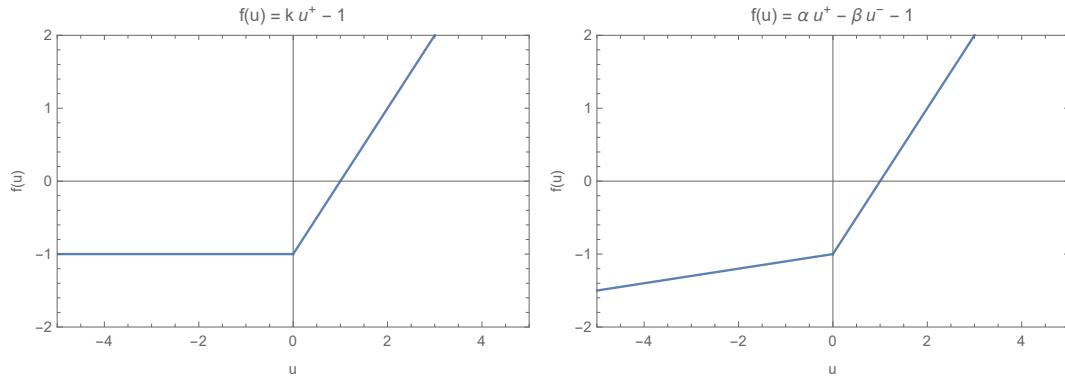
V dalším textu se budeme zabývat obecnější úlohou

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} + \alpha u^+ - \beta u^- = 1, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u \rightarrow \frac{1}{\alpha} \text{ pro } |x| \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (2.7)$$

kde  $\alpha$  a  $\beta$  jsou kladné konstanty a  $u^- = \max\{-u, 0\} = u^+ - u$ . Povšimněme si, že  $u \equiv \frac{1}{\alpha} > 0$  je opět konstantní (stacionární) řešení a neexistuje žádné záporné konstantní řešení rovnice z (2.7).

**Poznámka 1.** V literatuře se můžeme setkat i s obecnou úlohou ve tvaru

$$u_{tt} + u_{xxxx} + f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (2.8)$$



Obrázek 2.2: Porovnání grafů dvou typů nelinearit v modelu visutého mostu.

kde  $f = f(u)$  je nelineární funkce. Zůstává mnoho otevřených otázek týkajících se obecné třídy nelinearit, pro které má rovnice (2.8) řešení ve tvaru postupné vlny. Obvykle se nelinearita  $f$  uvažuje právě ve tvaru  $f(u) = ku^+ - 1$ , viz např. [20, 21, 22]. Mnoho numerických experimentů bylo prováděno s nelinearitou zadanou po částech, jelikož postupné vlny pak vykazovaly zajímavé vlastnosti, avšak nehladkost takové nelinearity mohla výsledky těchto experimentů zkreslit.

Proto se také zkoumají řešení pro hladkou nelinearitu  $f(u) = e^u - 1$ . Taková nelinearita má podobné vlastnosti jako  $f(u) = ku^+ - 1$ , tedy  $f'_+(0) > 0$ ,  $f(u) \rightarrow +\infty$  pro  $u \rightarrow +\infty$  a  $f(u) \rightarrow -1$  pro  $u \rightarrow -\infty$ , ale její výhodou je právě hladkost, viz [20]. Pro tuto  $f$  byla dokázána existence alespoň jednoho řešení ve tvaru postupné vlny s nekonečně mnoha rychlostmi šíření  $c$ , viz [23]. Pro vybrané rychlosti byla numericky dokázána dokonce existence alespoň 36 řešení ve tvaru postupné vlny, viz článek [24]. V našem případě máme nehladkou nelinearitu zadanou po částech, uvažujeme  $f(u) = \alpha u^+ - \beta u^- - 1$ , navíc se tato funkce od výše zmíněných liší v chování pro  $u \rightarrow -\infty$ . Na obrázku 2.2 můžeme vidět srovnání obou typů po částech zadaných nelinearit. Vlevo je graf  $f(u) = ku^+ - 1$  s  $k = 1$ , vpravo  $f(u) = \alpha u^+ - \beta u^- - 1$  s  $\alpha = 1$  a  $\beta = 0, 1$ .  $\diamond$

Předpokládáme, že úloha (2.7) má řešení ve tvaru postupné vlny, konkrétně jej uvažujeme ve tvaru

$$u(x, t) = \frac{1}{a^4} y(ax - ca^2 t), \quad (2.9)$$

kde  $a^4 = \alpha$  a  $y \in C^4(\mathbb{R})$ . Touto transformací přejdeme od parciální diferenciální rovnice v (2.7) k obyčejné diferenciální rovnici ve tvaru

$$y^{(4)} + c^2 y'' + y^+ - \xi y^- = 1, \quad (2.10)$$

kde parametr  $\xi = \frac{\beta}{\alpha}$ , tedy musí též platit  $\xi > 0$ ,  $c$  odpovídá rychlosti šíření vlny a  $y \equiv 1$  je rovnovážný (stacionární) stav. Vzhledem k požadavku, aby řešení v nekonečnu konvergovalo ke stacionárnímu stavu, je výhodnější dále označit

$z = y - 1$ , stacionární stav tím posunout do nulové hodnoty a rovnici (2.10) přepsat jako

$$z^{(4)} + c^2 z'' + (z + 1)^+ - \xi(z + 1)^- - 1 = 0. \quad (2.11)$$

Toto lze ještě rozepsat jako dvojici obyčejných diferenciálních rovnic

$$z^{(4)} + c^2 z'' + z = 0 \quad \text{pro } z \geq -1, \quad (2.12)$$

$$z^{(4)} + c^2 z'' + \xi z = 1 - \xi \quad \text{pro } z \leq -1, \quad (2.13)$$

kde  $z = z(t)$  popisuje výchylku z rovnovážného stavu  $z \equiv 0$ . Hledáme tedy taková  $z \in C^4(\mathbb{R})$ , která řeší (2.11) a konvergují k 0 pro  $t \rightarrow -\infty$  a  $t \rightarrow +\infty$ .

**Poznámka 2.** Řešení úlohy

$$\begin{cases} z^{(4)} + c^2 z'' + (z + 1)^+ - \xi(z + 1)^- - 1 = 0, \\ z \rightarrow 0 \text{ pro } |t| \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (2.14)$$

odpovídá homoklinickému řešení úlohy (2.7) ve tvaru postupné vlny.  $\diamond$

## 2.2 Pomocná tvrzení

Nyní uvedeme několik pomocných tvrzení, která se budou zabývat přípustnými rychlostmi postupné vlny  $c$  a dalšími vlastnostmi řešení.

**Lemma 1.** *Nechť  $c^2 = 2$ . Pak má fundamentální systém příslušný diferenciální rovnici (2.12) tvar*

$$F_1 = \{\cos(\tau_1 t), \sin(\tau_1 t), t \cos(\tau_1 t), t \sin(\tau_1 t)\}, \quad (2.15)$$

kde  $\tau_1 = \frac{c}{\sqrt{2}}$  je imaginární část kořene příslušné charakteristické rovnice. Je-li  $c^2 > 2$ , můžeme psát fundamentální systém pro rovnici (2.12) ve tvaru

$$F_2 = \{\cos(\tau_2 t), \sin(\tau_2 t), \cos(\tilde{\tau}_2 t), \sin(\tilde{\tau}_2 t)\}, \quad (2.16)$$

kde  $\tau_2$  a  $\tilde{\tau}_2$  jsou imaginární části kořenů příslušné charakteristické rovnice. Platí-li  $c^2 < 2$ , vypadá fundamentální systém příslušný rovnici (2.12) takto:

$$F_3 = \{e^{\sigma t} \cos(\tau t), e^{\sigma t} \sin(\tau t), e^{-\sigma t} \cos(\tau t), e^{-\sigma t} \sin(\tau t)\}, \quad (2.17)$$

kde  $\sigma$  je reálná část a  $\tau$  imaginární část kořene charakteristické rovnice.

*Důkaz.* Nejprve vyjádříme charakteristickou rovnici příslušnou diferenciální rovnici (2.12). Dostáváme ji ve tvaru

$$\lambda^4 + c^2 \lambda^2 + 1 = 0, \quad (2.18)$$

což se po doplnění na čtverec dá také zapsat jako

$$\left(\lambda^2 + \frac{c^2}{2}\right)^2 = \frac{c^4}{4} - 1. \quad (2.19)$$



Dále z tohoto vztahu vyjádříme  $\lambda^2$ , získáme tedy

$$\lambda^2 = \sqrt{\frac{c^4}{4} - 1} - \frac{c^2}{2}, \quad (2.20)$$

kde  $\sqrt{\cdot}$  je funkce komplexní proměnné. Pro  $c^2 = 2$  má charakteristická rovnice (2.18) dva dvojnásobné ryze imaginární kořeny  $\lambda_{1,2} = i\tau_1$  a  $\lambda_{2,3} = -i\tau_1$ , kde  $\tau_1 = \frac{c}{\sqrt{2}}$ . Dále uvažujme  $c^2 > 2$ . Potom jsou  $\lambda^2$  reálná záporná a charakteristická rovnice (2.18) má čtyři ryze imaginární kořeny, které označíme  $\lambda_1 = i\tau_2$ ,  $\lambda_2 = -i\tau_2$ ,  $\lambda_3 = i\tilde{\tau}_2$  a  $\lambda_4 = -i\tilde{\tau}_2$ , kde  $i$  je imaginární jednotka, tj.  $i^2 = -1$ . Pro  $c^2 \in (0, 2)$  jsou  $\lambda^2$  dvě komplexně sdružená čísla a kořeny charakteristické rovnice (2.18) čtyři komplexní čísla s absolutní hodnotou rovnou jedné. Označíme je  $\lambda_1 = \sigma + i\tau$ ,  $\lambda_2 = \sigma - i\tau$ ,  $\lambda_3 = -\sigma - i\tau$  a  $\lambda_4 = -\sigma + i\tau$ . Odtud je již zřejmé, jak vypadají příslušné fundamentální systémy.  $\square$

**Lemma 2.** *Nechť  $z = z(t)$  je netriviálním řešením (2.14), které odpovídá řešení úlohy (2.7) ve tvaru postupné vlny. Pak  $c \in (0, \sqrt{2})$ .*

*Důkaz.* Nejprve zdůrazněme, že podmínka  $z \rightarrow 0$  pro  $|t| \rightarrow +\infty$  znamená, že funkce  $z$  řeší rovnici (2.12) na nějakém intervalu  $(-\infty, -T]$  a  $[T, +\infty)$ , kde  $T > 0$ . Z Lemmatu 1 máme, že pro netriviální řešení  $z = z(t)$  rovnice (2.12) mohou nastat právě tři případy.

1. Nejprve uvažujme  $c^2 = 2$ . Obecné řešení (2.12) v tomto případě nabývá tvaru

$$z(t) = A \cos(\tau_1 t) + B \sin(\tau_1 t) + Ct \cos(\tau_1 t) + Dt \sin(\tau_1 t), \quad (2.21)$$

kde  $A, B, C$  a  $D$  jsou reálné konstanty. Taková řešení se ale nikdy neutlumí, tj. nesplní podmínku, že konvergují k nule pro  $t \rightarrow -\infty$ , ani pro  $t \rightarrow +\infty$ .

2. Dále uvažujme  $c^2 > 2$ . Obecné řešení rovnice (2.12) pak vypadá následovně:

$$z(t) = A \cos(\tau_2 t) + B \sin(\tau_2 t) + C \cos(\tilde{\tau}_2 t) + D \sin(\tilde{\tau}_2 t), \quad (2.22)$$

kde  $A, B, C$  a  $D$  jsou reálné konstanty. Tato řešení se opět neutlumí pro žádnou kombinaci parametrů  $A, B, C$  a  $D$ . Proto musíme uvažovat pouze třetí případ.

3. Je-li  $c^2 \in (0, 2)$ , nabývá obecné řešení (2.12) tvaru

$$z(t) = Ae^{\sigma t} \cos(\tau t) + Be^{\sigma t} \sin(\tau t) + Ce^{-\sigma t} \cos(\tau t) + De^{-\sigma t} \sin(\tau t), \quad (2.23)$$

kde  $A, B, C$  a  $D$  jsou reálné konstanty. Vhodnou volbou těchto konstant ( $A = B = 0$ , resp.  $C = D = 0$ ) zaručíme, že  $z$  řeší rovnici (2.12) na nějakém intervalu  $(-\infty, -T]$ , resp.  $[T, +\infty)$ , a zároveň konverguje k nule pro  $|t| \rightarrow +\infty$ .

Vidíme tedy, že aby se řešení  $z$  utlumilo, musí být  $c \in (0, \sqrt{2})$ .  $\square$

**Lemma 3.** *Nechť úloha (2.14) má netriviální řešení. Potom musí být  $z < -1$  pro nějaký čas  $t$ .*

*Důkaz.* Důkaz provedeme sporem. Budeme předpokládat, že netriviální řešení  $z = z(t)$  rovnice (2.11) je větší nebo rovno  $-1$  pro všechna  $t$ . Potom  $(z + 1)^+ \equiv z + 1$  a (2.11) je homogenní lineární obyčejná diferenciální rovnice s konstantními koeficienty ve tvaru (2.12) pro všechna  $t$ . Mohou nastat tři případy, viz Lemma 1. Rovnou můžeme vyloučit situaci, kdy  $c^2 > 2$  a  $c^2 = 2$ . V případě, že  $c^2 < 2$ , neexistuje netriviální řešení, které je dané předpisem (2.23) a konverguje k nule současně pro  $t \rightarrow -\infty$  i pro  $t \rightarrow +\infty$ . Vidíme tedy, že rovnice (2.11) nemá pro libovolné  $c \in \mathbb{R}$  žádné netriviální řešení, které by konvergovalo pro  $|t| \rightarrow +\infty$  ke stacionárnímu stavu  $z \equiv 0$ .  $\square$

V dalším textu budeme hledat nejen klasická, ale i slabá řešení úlohy (2.14). Uvažujme tedy funkce  $\varphi$  ze Sobolevova prostoru  $W^{2,2}(\mathbb{R})$ , tj. funkce, které splňují  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\varphi' \in L^2(\mathbb{R})$  i  $\varphi'' \in L^2(\mathbb{R})$ . Pro jednoduchost a přehlednost zápisu zavedeme označení  $H = W^{2,2}(\mathbb{R})$  a  $H(a, b) = W^{2,2}(a, b)$ . Standardní norma v  $H$  má pro všechna  $\varphi \in H$  tvar

$$\|\varphi\|_H = \left[ \int_{\mathbb{R}} (|\varphi''(t)|^2 + |\varphi'(t)|^2 + |\varphi(t)|^2) dt \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.24)$$

Dále zavedeme slabou a variační formulaci úlohy (2.14).

**Definice 5 (Slabá formulace úlohy).** Funkci  $z \in H$  nazýváme slabým řešením úlohy (2.14), právě když splňuje integrální rovnost

$$\int_{\mathbb{R}} (z''\varphi'' - c^2 z'\varphi') dt + \int_{z > -1} z\varphi dt + \int_{z \leq -1} (\xi z + \xi - 1)\varphi dt = 0 \quad \forall \varphi \in H. \quad (2.25)$$

Každé klasické řešení úlohy (2.14) je zároveň slabým řešením. Naopak, pokud je slabé řešení navíc regulární, tj.  $z \in C^4(\mathbb{R})$ , pak je také klasickým řešením naší úlohy.

**Definice 6 (Variační formulace úlohy).** Zavedme funkcionál

$$I(z) = \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{(z'')^2}{2} - c^2 \frac{(z')^2}{2} \right] dt + \int_{z > -1} \frac{z^2}{2} dt + \int_{z \leq -1} \left[ \xi \frac{z^2}{2} + (\xi - 1)z + \frac{\xi - 1}{2} \right] dt. \quad (2.26)$$

Variační formulací úlohy (2.14) rozumíme úlohu najít kritické body funkcionálu  $I$ , tj.  $z \in H$  splňující

$$I'(z)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in H. \quad (2.27)$$

**Poznámka 3.** Platí, že Fréchetova derivace funkcionálu  $I$  má tvar

$$I'(z)\varphi = \int_{\mathbb{R}} (z''\varphi'' - c^2 z'\varphi') dt + \int_{z > -1} z\varphi dt + \int_{z \leq -1} (\xi z + \xi - 1)\varphi dt, \quad (2.28)$$

kde  $z, \varphi \in H$ . Tedy kritické body funkcionálu  $I$  odpovídají slabým řešením úlohy (2.14).  $\diamond$

**Poznámka 4.** Vzhledem k tomu, že kvůli další práci s funkciónálem  $I$  požadujeme jeho spojitost, je v integrálu pro  $z \leq -1$  „uměle“ dodán člen  $\frac{\xi-1}{2}$ . Funkcionál  $I$  můžeme ještě přepsat do tvaru

$$I(z) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [(z'')^2 - c^2(z')^2 + z^2] dt - (1 - \xi) \int_{z \leq -1} \left[ \frac{z^2}{2} + z + \frac{1}{2} \right] dt \quad (2.29)$$

s Fréchetovou derivací pro všechna  $\varphi \in H$  ve tvaru

$$I'(z)\varphi = \int_{\mathbb{R}} [z''\varphi'' - c^2 z'\varphi' + z\varphi] dt - (1 - \xi) \int_{z \leq -1} [z\varphi + \varphi] dt, \quad (2.30)$$

nebo jako

$$I(z) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [(z'')^2 - c^2(z')^2 + ((z+1)^+)^2 - \xi((z+1)^-)^2 - 2z - 1] dt \quad (2.31)$$

a jeho první Fréchetova derivace má potom pro všechna  $\varphi \in H$  tvar

$$I'(z)\varphi = \int_{\mathbb{R}} [z''\varphi'' - c^2 z'\varphi' + (z+1)^+\varphi - \xi(z+1)^-\varphi - \varphi] dt. \quad (2.32)$$

◇

Jelikož v následující části budeme vycházet z článku od Y. Chena a P. J. McKenny [22], nejprve uvedeme dvě pomocná lemmata pro vztahy norem, která dále využijeme. Uvádíme je v obdobném znění jako v článku [22]. Pro snazší orientaci v dalším textu jsou důkazy těchto lemmat podrobněji rozepsány. V Lemmatu 4 zavedeme ekvivalentní normu se standardní normou na  $H$ .

**Lemma 4** ([22, s.329]). *Pro každé  $u \in H$  je*

$$\|u\| = \left[ \int_{\mathbb{R}} (|u''(t)|^2 - c^2|u'(t)|^2 + |u(t)|^2) dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.33)$$

*norma ekvivalentní se standardní normou na  $H$  a platí*

$$\frac{1}{C_0} \|u\|_H^2 \leq \|u\|^2 \leq \|u\|_H^2, \quad (2.34)$$

kde  $C_0 = \frac{3}{2-c^2} > 0$ .

*Důkaz.* První vztah nerovností (2.34)

$$\|u\|_H^2 \geq \|u\|^2$$

plyne automaticky z (2.24) a (2.33). Nyní necht'  $\hat{u}$  je Fourierova transformace funkce  $u$ , tj.

$$\mathcal{F}(u(t)) = \hat{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{ixt} dt, \quad (2.35)$$

kde  $i^2 = -1$ . Zpětná Fourierova transformace má tvar

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(x)) = u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x)e^{-ixt} dx. \quad (2.36)$$

Potom platí

$$\mathcal{F}(u^{(k)}(t)) = (ix)^k \hat{u}(x),$$

kde  $k \in \mathbb{N}$  je řád derivace. Z Plancherelovy identity [25] plyne rovnost  $\|u\| = \|\hat{u}\|$ . Pak můžeme přepsat  $\|u\|$  takto:

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} (|x^2 \hat{u}(x)|^2 - c^2 |x \hat{u}(x)|^2 + |\hat{u}(x)|^2) dx = \int_{\mathbb{R}} (x^4 - c^2 x^2 + 1) |\hat{u}(x)|^2 dx.$$

Dále upravíme do tvaru

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} [(x^4 + x^2 + 1) - (c^2 + 1)x^2] |\hat{u}(x)|^2 dx. \quad (2.37)$$

Jelikož platí nerovnost

$$x^2 \leq \frac{x^4 + x^2 + 1}{3},$$

což plyne z  $(x^2 - 1)^2 \geq 0$ , můžeme psát

$$\|u\|^2 \geq \int_{\mathbb{R}} \left[ (x^4 + x^2 + 1) - \frac{c^2 + 1}{3}(x^4 + x^2 + 1) \right] |\hat{u}(x)|^2 dx.$$

Po úpravě a zpětné Fourierově transformaci dostáváme

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &\geq \frac{2 - c^2}{3} \int_{\mathbb{R}} (x^4 + x^2 + 1) |\hat{u}(x)|^2 dx \\ &= \frac{2 - c^2}{3} \int_{\mathbb{R}} (|u''(t)|^2 + |u'(t)|^2 + |u(t)|^2) dt. \end{aligned}$$

Označíme  $C_0 = \frac{3}{2 - c^2}$ . Za předpokladu  $c^2 \in (0, 2)$  máme  $C_0 > 0$  a je tedy zřejmé, že platí i druhá nerovnost v (2.34)

$$\|u\|^2 \geq \frac{1}{C_0} \|u\|_H^2.$$

□

Další lemma se týká odhadu supremové normy shora pomocí standardní normy a tedy i pomocí námi zavedené normy  $\|\cdot\|$  s ní ekvivalentní.

**Lemma 5** ([22, s. 330]). *Nechť*

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t)|.$$

*Potom pro všechna  $u \in H$  platí*

$$\|u\|_\infty \leq \sqrt{2} \|u\|_H \leq \sqrt{2C_0} \|u\|, \quad (2.38)$$

*kde  $C_0 = \frac{3}{2-c^2}$ .*

*Důkaz.* Nejprve budeme uvažovat funkci  $u^2$  na intervalu  $[0, 1]$ . Ze základní věty integrálního počtu máme

$$u^2(t) = u^2(a) + 2 \int_a^t u(x)u'(x) \, dx \quad (2.39)$$

pro libovolné  $t, a \in [0, 1]$ . Z věty o střední hodnotě plyne, že existuje  $a \in (0, 1)$  takové, že platí

$$u^2(a) = \int_0^1 u^2(x) \, dx = \|u\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (2.40)$$

Z Hölderovy (nebo Cauchyovy–Schwarzovy) nerovnosti plyne

$$\begin{aligned} \int_a^t u(x)u'(x) \, dx &\leq \left( \int_a^t |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^t |u'(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_0^1 |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 |u'(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{L^2(0,1)} \|u'\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ze vztahu  $(a - b)^2 \geq 0$  plyne  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  pro všechna  $a \in \mathbb{R}$  a  $b \in \mathbb{R}$ . Z této nerovnosti a (2.41) vyplývá

$$2 \int_a^t u(x)u'(x) \, dx \leq 2 \|u\|_{L^2(0,1)} \|u'\|_{L^2(0,1)} \leq \|u\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u'\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (2.42)$$

Dále kombinací vztahů (2.39), (2.40) a (2.42) dostáváme

$$\begin{aligned} u^2(t) &= u^2(a) + 2 \int_a^t u(x)u'(x) \, dx \leq 2 \|u\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u'\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &= 2 \int_0^1 |u(x)|^2 \, dx + \int_0^1 |u'(x)|^2 \, dx \leq 2 \int_0^1 (|u(x)|^2 + |u'(x)|^2) \, dx \\ &\leq 2 \int_0^1 (|u''(x)|^2 + |u'(x)|^2 + |u(x)|^2) \, dx = 2 \|u\|_{H(0,1)}^2, \end{aligned}$$

tedy

$$u^2(t) \leq 2 \|u\|_{H(0,1)}^2 \quad \forall t \in (0, 1), \quad (2.43)$$

z čehož plyne

$$\sup_{t \in (0,1)} |u(t)| \leq \sqrt{2} \|u\|_{H(0,1)}. \quad (2.44)$$

Obdobně pro libovolné  $n \in \mathbb{Z}$  platí

$$\sup_{t \in (n,n+1)} |u(t)| \leq \sqrt{2} \|u\|_{H(n,n+1)}. \quad (2.45)$$

Tedy ze vztahu (2.45) plyne

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |u(t)| \leq \sqrt{2} \|u\|_H$$

a z (2.34) vyplývá

$$\|u\|_{\infty} \leq \sqrt{2} \|u\|_H \leq \sqrt{2C_0} \|u\|.$$

□

## 2.3 Existence slabého řešení ve tvaru postupné vlny

Jak již bylo řečeno výše, v této části budeme vycházet z článku [22]. Pro naši úlohu (2.14) chceme dokázat existenci netriviálního řešení, které odpovídá slabému řešení úlohy (2.7) ve tvaru postupné vlny. K důkazu využijeme větu Mountain Pass Theorem [26, s. 494], která je založena na důkazu existence kritických bodů příslušného funkcionálu. Až do konce této kapitoly budeme uvažovat pouze  $c \in (0, \sqrt{2})$ , neboť pro jiná  $c$  požadované řešení neexistuje, viz Lemma 2.

Nejprve předložíme definici tzv. Palaisovy–Smaleovy podmínky a následně uvedeme standardní Mountain Pass Theorem [26], který se obvykle využívá pro důkaz existence kritických bodů funkcionálu (2.26). V našem případě však nebudeme schopni dokázat, že funkcionál  $I$  splní Palaisovu–Smaleovu podmínku, a využijeme jemnější aparát.

**Definice 7 (Palaisova–Smaleova podmínka, [26, s. 484]).** Mějme funkcionál  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ , kde  $X$  je Banachův prostor, a  $s \in \mathbb{R}$ . Funkcionál  $I$  splní tzv. Palaisovu–Smaleovu podmínku na hladině  $s$ , zkráceně budeme psát  $(PS)_s$ , jestliže posloupnost  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset X$ , pro kterou platí

$$I(u_n) \rightarrow s, \quad \|I'(u_n)\| \rightarrow 0, \quad (2.46)$$

má v normě na  $X$  konvergentní podposloupnost.

**Věta 1 (Mountain Pass Theorem, [26, s. 494]).** Mějme  $X$  Banachův prostor a funkcionál  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ ,  $e \in X$  a  $r > 0$  takové, že  $\|e\| > r$  a

$$\inf_{\|u\|=r} I(u) > I(0) \geq I(e). \quad (2.47)$$

Pokud funkcionál  $I$  splní podmínku  $(PS)_s$ , kde

$$s = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)), \quad (2.48)$$

kde  $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$ , potom  $s$  je kritickým bodem funkcionálu  $I$ .

Dále ještě uvádíme větu odpovídající první části věty Mountain Pass Theorem, která se týká geometrie funkcionálu. Říká pouze to, že za splnění předpokladů existuje nějaká posloupnost splňující (2.46).

**Věta 2 ([26, s. 494]).** Mějme  $X$  Banachův prostor a funkcionál  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ ,  $e \in X$  a  $r > 0$  takové, že  $\|e\| > r$  a

$$\inf_{\|u\|=r} I(u) > I(0) \geq I(e). \quad (2.49)$$

Potom existuje posloupnost  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset X$ , pro niž platí

$$I(u_n) \rightarrow s, \quad \|I'(u_n)\| \rightarrow 0, \quad (2.50)$$

kde  $s$  splňuje

$$s = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \quad (2.51)$$

a  $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$ .

Nyní se budeme věnovat funkcionálu  $I$  danému předpisem (2.26). Tento funkcionál splňuje  $I(0) = 0$ , neboť platí

$$I(0) = \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{0^2}{2} - c^2 \frac{0^2}{2} \right] dt + \int_{z > -1} \frac{0^2}{2} dt = 0.$$

Následující lemma se týká jeho spojitosti a hladkosti.

**Lemma 6.** *Mějme funkcionál  $I$  daný předpisem (2.26). Potom platí  $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ .*

*Důkaz.* Mějme posloupnost  $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset H$ , pro niž platí  $z_n \rightarrow z_0$ , kde  $z_0 \in H$ . Pak pro  $I$  daný předpisem (2.26), resp. (2.31), platí

$$\begin{aligned}
|I(z_n) - I(z_0)| &= \\
&\left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[ (z_n'')^2 - c^2(z_n')^2 + [(z_n + 1)^+]^2 - \xi [(z_n + 1)^-]^2 - 2z_n - 1 \right] dt \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[ (z_0'')^2 - c^2(z_0')^2 + [(z_0 + 1)^+]^2 - \xi [(z_0 + 1)^-]^2 - 2z_0 - 1 \right] dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[ (z_n - z_0)''(z_n + z_0)'' - c^2(z_n - z_0)'(z_n + z_0)' \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + [(z_n + 1)^+ - (z_0 + 1)^+] [(z_n + 1)^+ + (z_0 + 1)^+] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \xi [(z_n + 1)^- - (z_0 + 1)^-] [(z_n + 1)^- + (z_0 + 1)^-] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2(z_n - z_0) \right] dt \right| \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

tedy funkcionál  $I$  je spojitý na  $H$ . Dále pro všechna  $\varphi \in H$  platí

$$\begin{aligned}
|I'(z_n)\varphi - I'(z_0)\varphi| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \left[ (z_n - z_0)''\varphi'' - c^2(z_n - z_0)'\varphi' \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + [(z_n + 1)^+ - (z_0 + 1)^+ - \xi(z_n + 1)^- + \xi(z_0 + 1)^-] \varphi \right] dt \right| \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Funkcionál  $I$  je tedy třídy  $C^1(H, \mathbb{R})$ . □

Další tvrzení se týká předpokladů na geometrii funkcionálu  $I$ . Je analogií k Lemmatu 2.4 z článku [22], ale funkcionál  $I$  se liší předpisem i vlastnostmi od funkcionálu zkoumaného v textu [22].

**Lemma 7.** *Nechť  $\xi \in (0, 1)$ . Pro funkcionál  $I \in C^1(H, \mathbb{R})$  daný vztahem (2.26) existují konstanty  $r > 0$  a  $\omega > 0$  takové, že*

$$\inf_{\|u\|=r} I(u) \geq \omega, \quad (2.52)$$

*konkrétně*

$$r = \frac{1}{2C_0\sqrt{1-\xi}} \quad a \quad \omega = \frac{1}{16C_0^2(1-\xi)}.$$



*Důkaz.* Z (2.29) máme

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [(z'')^2 - c^2(z')^2 + z^2] dt - \frac{(1-\xi)}{2} \int_{z \leq -1} (z^2 + 2z + 1) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \|z\|^2 - (1-\xi) \int_{z \leq -1} (z+1)^2 dt \right). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Pro  $z \leq -1$  platí

$$(z+1)^2 < z^4. \quad (2.54)$$

Z (2.54) plyne, že

$$I(z) \geq \frac{1}{2} \left( \|z\|^2 - (1-\xi) \int_{z \leq -1} z^4 dt \right). \quad (2.55)$$

Dále z Lemmatu 4 a Lemmatu 5 máme

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left( \|z\|^2 - (1-\xi) \int_{z \leq -1} z^4 dt \right) \geq \frac{1}{2} \left( \|z\|^2 - (1-\xi) \int_{z \leq -1} z^2 \sup_{t \in \mathbb{R}} z^2 dt \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left( \|z\|^2 - (1-\xi) \|z\|_{\infty}^2 \int_{z \leq -1} z^2 dt \right) \geq \frac{1}{2} (\|z\|^2 - (1-\xi) \|z\|_{\infty}^2 \|z\|_H^2) \\ &\geq \frac{1}{2} (\|z\|^2 - (1-\xi) 2C_0^2 \|z\|^4), \end{aligned}$$

tedy

$$I(z) \geq \frac{1}{2} (\|z\|^2 - (1-\xi) 2C_0^2 \|z\|^4). \quad (2.56)$$

Pravá strana vztahu (2.56) nabývá svého lokálního minima 0 v  $\|z\| = 0$  a svého lokálního maxima  $\omega$  v  $\|z\| = r$ , kde

$$r = \frac{1}{2C_0\sqrt{1-\xi}} \quad a \quad \omega = \frac{1}{16C_0^2(1-\xi)}.$$

Tedy z (2.56) vyplývá, že  $I(z) \geq \omega$  pro  $\|z\| = r$  a tedy i  $\inf_{\|z\|=r} I(z) \geq \omega$ .  $\square$

V dalším uvedeném pomocném tvrzení se zabýváme situací, kdy hodnoty parametru  $\xi$  jsou větší nebo rovny jedné.

**Lemma 8.** *Nechť  $\xi \geq 1$ . Potom neexistuje žádné  $e \in H$  takové, že platí (2.47), tedy funkcionál  $I$  daný předpisem (2.26) nemá geometrii potřebnou pro použití věty Mountain Pass Theorem.*

*Důkaz.* Vyjdeme ze vztahu (2.53). Máme tedy

$$I(z) = \frac{1}{2} \left( \|z\|^2 - (1 - \xi) \int_{z \leq -1} (z + 1)^2 dt \right).$$

Pro  $\xi \geq 1$ , můžeme funkcionál  $I$  zdola omezit takto:

$$I(z) \geq \frac{1}{2} \|z\|^2 > 0 \quad \forall z \neq 0, \quad (2.57)$$

tj. neexistuje žádné  $e \in H$  takové, že  $0 = I(0) \geq I(e)$ .  $\square$

Nyní uvedeme lemma analogické k Lemmatu 2.5 z článku [22].

**Lemma 9.** *Nechť*

$$0 < \xi < \frac{c^4}{12}. \quad (2.58)$$

*Pro funkcionál  $I \in C^1(H, \mathbb{R})$  daný vztahem (2.26) existuje takový prvek  $e \in H$ , že platí*

$$I(e) < I(0) = 0. \quad (2.59)$$

*Důkaz.* Uvažujme funkci  $v$  ve tvaru

$$v(t) = \begin{cases} -(1 + \cos(t)) & \text{pro } t \in (-\pi, \pi), \\ 0 & \text{pro } t \in (-\infty, -\pi] \cup [\pi, +\infty). \end{cases} \quad (2.60)$$

Zřejmě platí, že  $v \in H$ . Zavedme  $u_\lambda(t) = v(\lambda t)$  pro nějaké  $\lambda > 0$ . Máme tedy funkci

$$u_\lambda(t) = \begin{cases} -(1 + \cos(\lambda t)) & \text{pro } t \in \left(-\frac{\pi}{\lambda}, \frac{\pi}{\lambda}\right), \\ 0 & \text{pro } t \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{\lambda}\right] \cup \left[\frac{\pi}{\lambda}, +\infty\right) \end{cases} \quad (2.61)$$

s první derivací

$$u'_\lambda(t) = \begin{cases} \lambda \sin(\lambda t) & \text{pro } t \in \left(-\frac{\pi}{\lambda}, \frac{\pi}{\lambda}\right), \\ 0 & \text{pro } t \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{\lambda}\right] \cup \left[\frac{\pi}{\lambda}, +\infty\right) \end{cases} \quad (2.62)$$

a druhou derivací

$$u''_\lambda(t) = \begin{cases} \lambda^2 \cos(\lambda t) & \text{pro } t \in \left(-\frac{\pi}{\lambda}, \frac{\pi}{\lambda}\right), \\ 0 & \text{pro } t \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{\lambda}\right) \cup \left(\frac{\pi}{\lambda}, +\infty\right). \end{cases} \quad (2.63)$$

Potom

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (|u''_\lambda(t)|^2 - c^2 |u'_\lambda(t)|^2) dt &= \int_{-\frac{\pi}{\lambda}}^{\frac{\pi}{\lambda}} (|\lambda^2 \cos(\lambda t)|^2 - c^2 |\lambda \sin(\lambda t)|^2) dt \\ &= \lambda^4 \int_{-\frac{\pi}{\lambda}}^{\frac{\pi}{\lambda}} \cos^2(\lambda t) dt - c^2 \lambda^2 \int_{-\frac{\pi}{\lambda}}^{\frac{\pi}{\lambda}} \sin^2(\lambda t) dt. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Použijeme substituci  $y = \lambda t$  a dostáváme, že pravá strana vztahu (2.64) se rovná

$$\begin{aligned} & \lambda^3 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(y) dy - c^2 \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(y) dy \\ &= \lambda^3 \pi - c^2 \lambda \pi = \lambda \pi (\lambda^2 - c^2) = -\lambda \pi (c^2 - \lambda^2). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Pravou stranu vztahu (2.65) označíme jako  $-\delta$ , máme tedy funkci

$$\delta(\lambda) = \lambda \pi (c^2 - \lambda^2). \quad (2.66)$$

Platí tudíž, že  $-\delta(\lambda) < 0$  pro  $0 < \lambda < c$  a  $-\delta(\lambda) \geq 0$  pro  $\lambda \geq c$ . Pro libovolné  $0 < \lambda_0 < c$  platí

$$\int_{\mathbb{R}} (|u_0''(t)|^2 - c^2 |u_0'(t)|^2) dt = -\delta(\lambda_0) < 0, \quad (2.67)$$

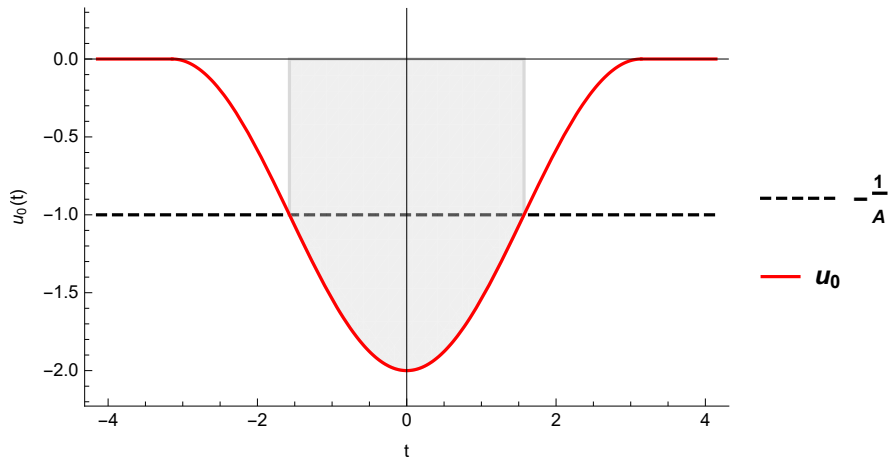
kde  $u_0(t) = v(\lambda_0 t)$ . Dále pro  $A > 0$  uvažujme

$$\begin{aligned} \frac{I(Au_0)}{A} &= \frac{1}{2A} \int_{\mathbb{R}} [(Au_0'')^2 - c^2 (Au_0')^2] dt + \frac{1}{2A} \int_{-\frac{1}{A} < u_0 \leq 0} (Au_0)^2 dt \\ &+ \frac{1}{A} \int_{u_0 \leq -\frac{1}{A}} \left[ \xi A^2 \frac{u_0^2}{2} + (\xi - 1) Au_0 + \frac{\xi - 1}{2} \right] dt \\ &= -\delta(\lambda_0) \frac{A}{2} + \underbrace{\frac{A}{2} \int_{-\frac{1}{A} < u_0 \leq 0} u_0^2 dt}_{(a)} + \underbrace{\frac{A\xi}{2} \int_{u_0 \leq -\frac{1}{A}} u_0^2 dt}_{(b)} \\ &+ \underbrace{(\xi - 1) \int_{u_0 \leq -\frac{1}{A}} u_0 dt}_{(c)} + \underbrace{\frac{\xi - 1}{2A} \int_{u_0 \leq -\frac{1}{A}} 1 dt}_{(d)}. \end{aligned}$$

Nyní najdeme omezení pro jednotlivé integrály (a), (b), (c) a (d). Pro lepší představu uvádíme ilustrační obrázek 2.3. Červeně je na něm znázorněn graf funkce  $u_0$ , kdy pro jednoduchost volíme  $\lambda_0 = 1$ . Černou čárkovanou čarou je vyznačena hodnota  $-\frac{1}{A}$ , opět pro jednoduchost voleno  $A = 1$ , a šedá plocha odpovídá integrálu z (c).

Nejprve se zaměříme na (a). Pro tento integrál můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} \int_{-\frac{1}{A} < u_0 \leq 0} u_0^2 dt &\leq \frac{A}{2} \int_{-\frac{1}{A} < u_0 \leq 0} \sup_{-\frac{1}{A} < u_0 \leq 0} u_0^2 dt = \frac{A}{2} \sup_{-\frac{1}{A} < u_0 \leq 0} u_0^2 \int_{-\frac{1}{A} < u_0 \leq 0} 1 dt \\ &\leq \frac{A}{2} \sup_{-\frac{1}{A} < u_0 \leq 0} u_0^2 \int_{-\frac{\pi}{\lambda_0}}^{\frac{\pi}{\lambda_0}} 1 dt = \frac{A}{2} \frac{1}{A^2} \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\pi}{A\lambda_0}. \end{aligned}$$



Obrázek 2.3: Graf funkce  $u_0$  s vyznačenou hodnotou  $-\frac{1}{A}$  a šedou plochou odpovídající integrálu z (c).

Dále omezíme (b) takto:

$$\begin{aligned} \frac{A\xi}{2} \int_{u_0 \leq -\frac{1}{A}} u_0^2 dt &= \frac{A\xi}{2} \int_{u_0 \leq -\frac{1}{A}} (1 + \cos(\lambda_0 t))^2 dt \leq \frac{A\xi}{2} \int_{-\frac{\pi}{\lambda_0}}^{\frac{\pi}{\lambda_0}} (1 + \cos(\lambda_0 t))^2 dt \\ &= \left| y = \lambda_0 t \right| = \frac{A\xi}{2\lambda_0} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(y))^2 dy = \frac{A\xi}{2\lambda_0} 3\pi. \end{aligned}$$

Omezení pro (c) použijeme v tomto tvaru:

$$\begin{aligned} (\xi - 1) \int_{u_0 \leq -\frac{1}{A}} u_0 dt &= (1 - \xi) \int_{u_0 \leq -\frac{1}{A}} (1 + \cos(\lambda_0 t)) dt \\ &\leq (1 - \xi) \int_{-\frac{\pi}{\lambda_0}}^{\frac{\pi}{\lambda_0}} (1 + \cos(\lambda_0 t)) dt = \left| y = \lambda_0 t \right| \\ &= \frac{1 - \xi}{\lambda_0} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(y)) dy = \frac{1 - \xi}{\lambda_0} 2\pi. \end{aligned}$$

Nakonec omezíme integrál (d) takto:

$$\begin{aligned} \frac{\xi - 1}{2A} \int_{u_0 \leq -\frac{1}{A}} 1 \, dt &\leq \frac{\xi - 1}{2A} \int_{u_0 \leq -\frac{1}{A}} u_0 \, dt \leq \frac{\xi - 1}{2A} \int_{-\frac{\pi}{\lambda_0}}^{\frac{\pi}{\lambda_0}} 1 \, dt \\ &= \frac{1 - \xi}{2A} \int_{u_0 \leq -\frac{1}{A}} (1 + \cos(\lambda_0 t)) \, dt = \frac{1 - \xi}{2A} \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{(1 - \xi)\pi}{A\lambda_0}. \end{aligned}$$

Chceme ukázat, že

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{I(Au_0)}{A} = -\infty. \quad (2.68)$$

Z omezení pro (a),(b),(c) a (d) dostáváme

$$\frac{I(Au_0)}{A} \leq -\delta(\lambda_0) \frac{A}{2} + \frac{\pi}{A\lambda_0} + \frac{A\xi}{2\lambda_0} 3\pi + \frac{1 - \xi}{\lambda_0} 2\pi + \frac{(1 - \xi)\pi}{A\lambda_0},$$

kde pro  $A \rightarrow +\infty$  platí

$$\frac{\pi}{A\lambda_0} \rightarrow 0, \quad \frac{(1 - \xi)\pi}{A\lambda_0} \rightarrow 0 \quad a \quad \frac{1 - \xi}{\lambda_0} 2\pi = konst. < +\infty.$$

Aby platilo (2.68), musí pro  $A > 0$  být

$$-\delta(\lambda_0) \frac{A}{2} + \frac{A\xi}{2\lambda_0} 3\pi < 0, \quad (2.69)$$

tedy

$$\xi < \frac{1}{3} \lambda_0^2 (c^2 - \lambda_0^2). \quad (2.70)$$

Pro  $\lambda_0 = \pm \frac{\sqrt{2}c}{2}$  nabývá pravá strana vztahu (2.70) svého maxima  $\frac{c^4}{12}$ . Díky předpokladu (2.58) je tedy (2.70) splněno. Potom platí i vztah (2.68), z čehož plyne, že existuje  $A_0$  a  $e = A_0 u_0$  tak, že platí  $I(A_0 u_0) = I(e) < 0$ , kde  $A_0 > r > 0$  s  $r = \frac{1}{2C_0 \sqrt{1 - \xi}}$  z Lemmatu 7.  $\square$

**Poznámka 5.** Důkaz Lemmatu 9 by se dal provést analogicky pro nějaké obecné  $v \in H$ ,  $v \leq 0$  s kompaktním nosičem, viz [22].  $\diamond$

Tímto jsme ukázali, že funkcionál  $I$  daný vztahem (2.26) splňuje předpoklady Věty 2, tj. že má geometrii potřebnou pro použití věty Mountain Pass Theorem. Existuje tedy nějaká posloupnost  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ , která splní (2.50), kde  $s$  je dáno vztahem (2.51). Taková posloupnost ale nemusí mít konvergentní podposloupnost. Vezmeme-li např. posloupnost  $u_n(t) = z(t + n)$ , kde funkce  $z = z(t)$  je řešením (2.11), získáme divergentní posloupnost, která splňuje (2.50), viz [22]. To udělat lze, neboť i libovolně posunutá funkce  $\tilde{z} = z(t + \tau)$  též řeší rovnici (2.11).

Jelikož se zabýváme řešením problému na celé reálné ose, nejsme schopni ověřit podmínku  $(PS)_s$  standardním způsobem přes kompaktní vnoření prostorů. V případech, kdy se pohybujeme na neomezených oblastech, lze použít tzv. princip koncentrované kompaktnosti (v angličtině *concentration compactness principle*) představený Lionsem v [27].

V následující části textu budeme postupovat podle článku [22], kde je tohoto přístupu též využito. Nejprve uvádíme následující lemma, které je analogií Lemmatu 2.6 a které se zabývá omezeností posloupnosti  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ .

**Lemma 10.** *Nechť  $\xi \in (0, \frac{c^4}{12})$ . Libovolná posloupnost  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset H$ , která splní (2.50), tedy*

$$I(u_n) \rightarrow s \quad \text{a} \quad \|I'(u_n)\| \rightarrow 0,$$

*s funkcí daným předpisem (2.26), je omezená.*

*Důkaz.* Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje posloupnost  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset H$ , pro níž platí, že  $I(u_n) \rightarrow s$ , kde  $0 < s < +\infty$ , a  $\|I'(u_n)\| \rightarrow 0$ , ale  $\|u_n\| \rightarrow +\infty$  pro  $n \rightarrow +\infty$ , tedy  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$  je neomezená posloupnost.

Ze vztahů (2.29) a (2.30) získáme

$$I(u_n) = \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \frac{(1-\xi)}{2} \int_{u_n \leq -1} [u_n^2 + 2u_n + 1] dt \quad (2.71)$$

a vztah pro Fréchetovu derivaci funkcionálu  $I$

$$I'(u_n)u_n = \|u_n\|^2 - (1-\xi) \int_{u_n \leq -1} [u_n^2 + u_n] dt. \quad (2.72)$$

Jelikož  $s < +\infty$  a  $\|I'(u_n)\| \rightarrow 0$ , platí

$$\frac{I(u_n)}{\|u_n\|} \rightarrow 0 \quad \text{a} \quad \frac{I'(u_n)u_n}{\|u_n\|} \rightarrow 0.$$

Z toho plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2I(u_n) - I'(u_n)u_n}{\|u_n\|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\xi - 1) \int_{u_n \leq -1} \frac{u_n + 1}{\|u_n\|} dt = 0. \quad (2.73)$$

Z (2.72), Lemmatu 5 a  $\xi < \frac{c^4}{12} < 1$  dále získáme

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I'(u_n)u_n}{\|u_n\|^2} = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} (\xi - 1) \int_{u_n \leq -1} \frac{u_n^2 + u_n}{\|u_n\|^2} dt \\
&= 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \xi) \int_{u_n \leq -1} u_n \frac{u_n + 1}{\|u_n\|^2} dt \geq 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \xi) \frac{\|u_n\|_\infty}{\|u_n\|} \int_{u_n \leq -1} \frac{u_n + 1}{\|u_n\|} dt \\
&\geq 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}C_0 (1 - \xi) \int_{u_n \leq -1} \frac{u_n + 1}{\|u_n\|} dt \\
&= 1 + \sqrt{2}C_0 \lim_{n \rightarrow +\infty} (\xi - 1) \int_{u_n \leq -1} \frac{u_n + 1}{\|u_n\|} dt = 1.
\end{aligned}$$

Došli jsme tedy k tomu, že  $0 \geq 1$ , což je spor. Posloupnost  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$  je omezená.  $\square$

Na závěr této kapitoly uvádíme následující lemma a Větu 3 shrnující získané výsledky. V důkazech těchto tvrzení jsme použili postup analogický uvedenému v důkazu věty Theorem 2.7 z článku [22]. Pro snazší orientaci v textu jsou námi uvedené důkazy podrobněji rozepsány.

**Lemma 11.** *Nechť  $\xi \in (0, \frac{c^4}{12})$ . Mějme posloupnost  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset H$ , která splní (2.50), tedy*

$$I(u_n) \rightarrow s \quad \text{a} \quad \|I'(u_n)\| \rightarrow 0,$$

*s funkcí daným předpisem (2.26). Potom existuje prvek  $v_0 \in H$  takový, který pro všechna  $\varphi \in H$  splní*

$$I'(v_0)\varphi = 0. \quad (2.74)$$

*Důkaz.* Důkaz provedeme ve třech krocích.

*1. krok:* Nejprve ukážeme, že pro dostatečně velká  $n \in \mathbb{N}$  jsou suprema funkcí  $u_n$  ostře odražená od nuly. Vyjdeme ze vztahů (2.71) a (2.72). Platí

$$\begin{aligned}
2s &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (2I(u_n) - I'(u_n)u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \xi) \int_{u_n \leq -1} [-u_n - 1] dt \\
&\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \xi) \int_{u_n \leq -1} |u_n|^3 dt \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \xi) \int_{\mathbb{R}} |u_n|^3 dt. \quad (2.75)
\end{aligned}$$

Zdůrazněme nyní, že  $0 < \xi < \frac{c^4}{12} < 1$  a tedy výraz  $(1 - \xi)$  je kladný a menší než jedna. Z předchozí nerovnosti (2.75) plyne, že existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové,

že pro všechna  $n \geq n_0$  platí

$$\begin{aligned} & 0 < s < (1 - \xi) \int_{\mathbb{R}} |u_n|^3 dt \\ & \leq (1 - \xi) \int_{\mathbb{R}} \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_n| |u_n|^2 dt = (1 - \xi) \|u_n\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} |u_n|^2 dt \\ & = (1 - \xi) \|u_n\|_{\infty} \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C_0 (1 - \xi) \|u_n\|_{\infty} \|u_n\|^2, \end{aligned}$$

kde jsme využili vztahu (2.34) z Lemmatu 4. Z Lemmatu 10 navíc plyne, že existuje taková konstanta  $M > 0$ , že  $\|u_n\| \leq M$ . Proto můžeme dále psát

$$0 < s < C_0 (1 - \xi) M^2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_n(t)| \quad \forall n \geq n_0,$$

z čehož vyplývá

$$0 < \frac{s}{C_0 (1 - \xi) M^2} < \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_n(t)| \quad \forall n \geq n_0.$$

Pro přehlednost ještě přeznačíme

$$C_{sup} = \frac{s}{C_0 (1 - \xi) M^2}.$$

Pro každé  $n \geq n_0$  má tím pádem funkce  $u_n$  supremum ostře odražené od nuly. Můžeme tedy pro každou  $u_n$  najít takové  $t_n \in \mathbb{R}$ , že

$$|u_n(t_n)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_n(t)| > C_{sup} > 0. \quad (2.76)$$

*2. krok:* Jelikož je prostor  $H$  reflexivní, lze z posloupnosti  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$  vybrat podposloupnost  $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ , která slabě konverguje k  $u_0 \in H$ . Obecně však i pro posloupnosti splňující (2.76) může být jejich slabá limita nulová. Pokud však provedeme translaci funkcí  $u_n$  tak, že jejich suprema posuneme do omezeného intervalu, takto vzniklá posloupnost již bude mít slabě konvergentní podposloupnost s nenulovou slabou limitou, viz [28, s. 217].

Mějme nyní funkce  $v_n(t) = u_n(t + t_n)$ . Potom posloupnost  $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset H$  je také omezená a navíc  $|v_n(0)| = |u_n(t_n)| > C_{sup} > 0$ . Obsahuje tedy slabě konvergentní podposloupnost (pro přehlednost zápisu značíme opět  $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ), která slabě konverguje k prvku  $v_0 \in H$ ,  $v_0(0) \neq 0$ , tj.  $v_0 \neq 0$ .

*3. krok:* V posledním kroku budeme chtít ukázat, že pro všechna  $\varphi \in H$  platí  $I'(v_n)\varphi \rightarrow I'(v_0)\varphi$  a že  $I'(v_0)\varphi = 0$  pro všechna  $\varphi$ . Využijeme alternativního



vyjádření Fréchetovy derivace funkcionálu  $I$  (2.32) a ještě jej mírně upravíme:

$$\begin{aligned} I'(z)\varphi &= \int_{\mathbb{R}} [z''\varphi'' - c^2 z'\varphi' + (z+1)^+\varphi - \xi(z+1)^-\varphi - \varphi] dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} [z''\varphi'' - c^2 z'\varphi' + z\varphi + \varphi + (z+1)^-\varphi - \xi(z+1)^-\varphi - \varphi] dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} [z''\varphi'' - c^2 z'\varphi' + z\varphi + (1-\xi)(z+1)^-\varphi] dt. \end{aligned}$$

Pro libovolné pevné  $\varphi \in H$  chceme nyní ukázat, že platí  $|I'(v_n)\varphi - I'(v_0)\varphi| \rightarrow 0$ , tedy

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}} [v_n''\varphi'' - c^2 v_n'\varphi' + v_n\varphi + (1-\xi)(v_n+1)^-\varphi] dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}} [v_0''\varphi'' - c^2 v_0'\varphi' + v_0\varphi + (1-\xi)(v_0+1)^-\varphi] dt \right| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Z definice slabé konvergence plyne

$$\int_{\mathbb{R}} [v_n''\varphi'' - c^2 v_n'\varphi' + v_n\varphi] dt \rightarrow \int_{\mathbb{R}} [v_0''\varphi'' - c^2 v_0'\varphi' + v_0\varphi] dt$$

pro  $n \rightarrow +\infty$ . Zbývá tedy ukázat, že

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (1-\xi) [(v_n+1)^- - (v_0+1)^-] \varphi dt \right| \rightarrow 0. \quad (2.77)$$

Mějme libovolně malé  $\varepsilon > 0$ . Pak můžeme zvolit kompaktní množinu  $K \subset \mathbb{R}$  takovou, že

$$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus K)} < \frac{\varepsilon}{2M_1},$$

kde  $M_1$  je konstanta, pro niž platí  $\|(v_n+1)^- - (v_0+1)^-\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus K)} \leq M_1$ . Potom z Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti a  $(1-\xi) < 1$  plyne

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R} \setminus K} (1-\xi) [(v_n+1)^- - (v_0+1)^-] \varphi dt \right| \\ &\leq (1-\xi) \|(v_n+1)^- - (v_0+1)^-\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus K)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus K)} \\ &\leq (1-\xi) \frac{\varepsilon}{2M_1} M_1 = (1-\xi) \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Na kompaktní množině  $K \subset \mathbb{R}$  implikuje slabá konvergence dokonce stejnoměrnou konvergenci, z čehož plyne, že existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro všechna  $n \geq n_0$  platí

$$\sup_{t \in K} |v_n(t) - v_0(t)| < \frac{\varepsilon}{2M_2},$$

kde  $M_2$  je taková konstanta, pro niž je

$$\int_K |\varphi| dt \leq M_2.$$

Navíc pro všechna  $z, z_0 \in \mathbb{R}$  platí  $|z^- - z_0^-| \leq |z - z_0|$ , podrobně viz Poznámka 6. Z toho vyplývá

$$\begin{aligned} & \left| \int_K (1 - \xi) [(v_n + 1)^- - (v_0 + 1)^-] \varphi dt \right| \\ & \leq \int_K (1 - \xi) |(v_n + 1) - (v_0 + 1)| |\varphi| dt = \int_K (1 - \xi) |v_n - v_0| |\varphi| dt \\ & \leq (1 - \xi) \sup_K |v_n - v_0| \int_K |\varphi| dt \leq (1 - \xi) \frac{\varepsilon}{2M_2} M_2 < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Nyní ze vztahu  $\int_{\mathbb{R}} \cdot dt = \int_{\mathbb{R} \setminus K} \cdot dt + \int_K \cdot dt$  a trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}} (1 - \xi) [(v_n + 1)^- - (v_0 + 1)^-] \varphi dt \right| \\ & \leq \left| \int_{\mathbb{R} \setminus K} (1 - \xi) [(v_n + 1)^- - (v_0 + 1)^-] \varphi dt \right| \\ & + \left| \int_K (1 - \xi) [(v_n + 1)^- - (v_0 + 1)^-] \varphi dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jelikož  $\varepsilon > 0$  volíme libovolně malé, platí  $I'(v_n)\varphi \rightarrow I'(v_0)\varphi$  pro všechna  $\varphi \in H$  pro  $n \rightarrow +\infty$ . Vzhledem k tomu, že  $I'(v_n(\cdot))\varphi(\cdot) = I'(u_n(\cdot + t_n))\varphi(\cdot) = I'(u_n(\cdot))\varphi(\cdot - t_n)$  a  $\|\varphi(\cdot)\| = \|\varphi(\cdot - t_n)\|$  pro všechna  $\varphi \in H$ , platí  $\|I'(v_n)\| = \|I'(u_n)\| \rightarrow 0$ . Z jednoznačnosti limity tedy plyne  $I'(v_0)\varphi = 0$  pro všechna  $\varphi \in H$ , tj.  $\|I'(v_0)\| = 0$ .  $\square$

**Poznámka 6.** Chceme-li ukázat, že pro všechna  $z, z_0 \in \mathbb{R}$  platí

$$|z^- - z_0^-| \leq |z - z_0|, \quad (2.78)$$

projdeme postupně všechny situace, které mohou nastat.

1. Je-li  $z < 0$  a  $z_0 < 0$ , nastane  $|z^- - z_0^-| = |-z + z_0| = |z - z_0|$ , tedy je splněna dokonce rovnost.
2. Pro  $z \geq 0$  a  $z_0 \geq 0$  máme  $|z^- - z_0^-| = |0 - 0| = 0 \leq |z - z_0|$ .
3. Pro  $z < 0$  a  $z_0 \geq 0$ , platí  $|z^- - z_0^-| = |z| \leq |z - z_0|$ .
4. V posledním případě, kdy  $z \geq 0$  a  $z_0 < 0$ , nastane  $|z^- - z_0^-| = |z_0| \leq |z - z_0|$ .

Vidíme tedy, že nerovnost (2.78) opravdu platí.  $\diamond$

**Věta 3.** *Nechť  $\xi \in (0, \frac{c^4}{12})$  a  $c \in (0, \sqrt{2})$ . Úloha (2.7), tj.*

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} + \alpha u^+ - \beta u^- = 1, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u \rightarrow \frac{1}{\alpha} \text{ pro } |x| \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

*má alespoň jedno řešení ve tvaru postupné vlny.*

*Důkaz.* Hledání řešení úlohy (2.7) ve tvaru postupné vlny jsme nejprve převedli na jednodimenzionální úlohu (2.14). Ta je ekvivalentní hledání kritických bodů funkcionálu  $I$  daného předpisem (2.26). Z Lemmat 7 a 9 plyne, že funkcionál  $I$  má správnou geometrii, tj. z Věty 2 vyplývá existence posloupnosti  $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ , která splní  $I(u_n) \rightarrow s$  a  $\|I'(u_n)\| \rightarrow 0$ , kde pro  $s$  platí (2.51). Díky Lemmatu 10 je taková posloupnost omezená. Z Lemmatu 11 vyplývá existence nenulového prvku, který splňuje  $\|I'(v_0)\| = 0$ . Tedy  $I$  má netriviální kritický bod  $v_0$ , který odpovídá slabému řešení úlohy (2.7).  $\square$

**Poznámka 7.** Na závěr poznamenejme, že jsme neověřili platnost rovnosti  $I(v_0) = s$ . Pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  určitě platí  $I(v_n) = I(u_n)$ , a tedy z  $I(u_n) \rightarrow s$  plyne  $I(v_n) \rightarrow s$ . Zbývá tedy ověřit  $I(v_0) = s$ , což ovšem neplatí automaticky a bylo by třeba tuto rovnost dále dokázat.  $\diamond$



## Kapitola 3

# Konstrukce postupné vlny

V této kapitole se budeme zabývat analytickým vyjádřením netriviálního klasického řešení úlohy (2.14), které odpovídá postupné vlně pro úlohu (2.7). Vyjdeme z rovnic (2.12) a (2.13), tedy ze soustavy

$$\begin{cases} z^{(4)} + c^2 z'' + z = 0 & \text{pro } z \geq -1, \\ z^{(4)} + c^2 z'' + \xi z = 1 - \xi & \text{pro } z \leq -1, \end{cases} \quad (3.1)$$

kde  $c > 0$  a  $\xi > 0$ .

Existuje více způsobů, jak zkonstruovat řešení úlohy (2.7) ve tvaru postupné vlny. V našem případě budeme postupovat obdobně jako v článku [21]. Potřebujeme najít taková řešení soustavy (3.1), aby  $z \in C^4(\mathbb{R})$ . Pro jednoduchost se omezíme na jeden konkrétní typ řešení, a to taková řešení, která jsou sudá a překračují hodnotu  $-1$  právě dvakrát. Budeme tedy konstruovat řešení rovnice (2.13) na intervalu  $(-r, r)$ , kde  $r > 0$  je zatím neznámé a  $z(-r) = z(r) = -1$ . V bodě  $t = -r$  ho napojíme na řešení rovnice (2.12). Pro  $t \rightarrow -\infty$  požadujeme, aby  $z \rightarrow 0$ , tj. aby řešení konvergovalo ke stacionárnímu stavu  $z \equiv 0$ . Pro  $t \in (r, +\infty)$  bude řešení symetrické k  $z$  na intervalu  $(-\infty, -r)$ . Později pro snazší vyjádření dalších vztahů bod napojení posuneme do  $t = 0$ , budeme tak mít řešení  $w(t) = z(t - r)$ , tedy námi uvažované funkce budou sudě symetrické podle  $t = r$ .

### 3.1 Explicitní vyjádření obecného řešení

Další text rozdělíme do několika částí. Nejprve se budeme zabývat vyjádřením explicitního řešení první obyčejné diferenciální rovnice (2.12) ze soustavy (3.1). Její obecné řešení s požadovanými vlastnostmi popisuje následující lemma.

**Lemma 12.** *Nechť  $c \in (0, \sqrt{2})$ . Obecné řešení rovnice (2.12), které pro  $t \rightarrow -\infty$  splňuje  $z \rightarrow 0$ , má tvar*

$$z(t) = \mu e^{\sigma t} \cos(\tau t + \nu), \quad (3.2)$$

kde  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma = \operatorname{Re}(\lambda)$  a  $\tau = \operatorname{Im}(\lambda)$ , přičemž  $\lambda$  je kořen příslušné charakteristické rovnice  $\lambda^4 + c^2 \lambda^2 + 1 = 0$ . Je-li  $c \geq \sqrt{2}$ , řešení rovnice (2.12) splňující  $z \rightarrow 0$  pro  $t \rightarrow -\infty$  neexistuje.

*Důkaz.* Tvrzení plyne z Lemmat 1 a 2. Mějme  $c \in (0, \sqrt{2})$ . Jelikož požadujeme konvergenci  $z$  k 0 pro  $t \rightarrow -\infty$ , musí  $C = D = 0$  v (2.23) a řešení nabývá tvaru

$$z(t) = e^{\sigma t} (A \cos(\tau t) + B \sin(\tau t)), \quad (3.3)$$

kde  $\sigma = \operatorname{Re}(\lambda)$ ,  $\tau = \operatorname{Im}(\lambda)$  a  $\lambda$  je kořen příslušné charakteristické rovnice  $\lambda^4 + c^2 \lambda^2 + 1 = 0$ . Pro snazší práci s řešením přepíšeme kombinaci sinu a kosinu jako posunutý kosinus, přeznačíme konstanty a dostaneme

$$z(t) = \mu e^{\sigma t} \cos(\tau t + \nu), \quad (3.4)$$

kde  $\mu \in \mathbb{R}$  a  $\nu \in \mathbb{R}$ . □

**Poznámka 8.** Vezmeme-li si nyní opět pouze  $c \in (0, \sqrt{2})$  a kořen charakteristické rovnice (2.18), který leží v prvním kvadrantu Gaussovy roviny, můžeme psát

$$\lambda = e^{i\rho} = \sigma + i\tau = \cos \rho + i \sin \rho, \quad (3.5)$$

kde  $\rho \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\sigma > 0$  a  $\tau > 0$ . Využitím (3.5) v exponenciálním tvaru dostáváme dosazením do charakteristické rovnice (2.18) vztah pro rychlost šíření vlny v závislosti na  $\rho$

$$c^2 = \frac{-1 - e^{4i\rho}}{e^{2i\rho}} = -2 \cos(2\rho). \quad (3.6)$$

Aby  $c^2 > 0$ , musí být  $\cos(2\rho) < 0$ , a proto budeme uvažovat pouze  $\rho \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ .  $\diamond$

**Poznámka 9.** Pro  $\xi = 1$ , tj.  $\alpha = \beta$ , máme spojitý lineární případ popsany jedinou rovnicí (2.12) pro všechna  $t$ . V takovém případě ale nedostaneme řešení ve tvaru postupné vlny s požadovaným chováním pro  $|t| \rightarrow +\infty$ , viz Lemma 3.  $\diamond$

Dále se budeme zabývat analytickým řešením druhé rovnice soustavy (3.1). Následující lemma uvádí možné tvary sudého obecného řešení obyčejné diferenciální rovnice (2.13).

**Lemma 13.** *Nechť  $c \in (0, \sqrt{2})$  a  $\xi \in (0, 1)$ . Je-li  $c^2 = 2\sqrt{\xi}$ , má obecné sudé řešení rovnice (2.13) tvar*

$$z_1(t) = \gamma_1 \cos(\sqrt[4]{\xi} t) + \delta_1 t \sin(\sqrt[4]{\xi} t) + \frac{1 - \xi}{\xi}, \quad \gamma_1 \in \mathbb{R}, \delta_1 \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

*Platí-li  $c^2 > 2\sqrt{\xi}$ , vypadá obecné řešení rovnice (2.13) následovně:*

$$z_2(t) = \gamma_2 \cos(\kappa_1 t) + \delta_2 \cos(\kappa_2 t) + \frac{1 - \xi}{\xi}, \quad \gamma_2 \in \mathbb{R}, \delta_2 \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

*kde  $\kappa_1 = \operatorname{Im}(\lambda_1)$ ,  $\kappa_2 = \operatorname{Im}(\lambda_2)$  a  $\lambda_1, \lambda_2$  jsou kořeny příslušné charakteristické rovnice ve tvaru*

$$\lambda_1 = i\sqrt{-\sqrt{\frac{c^4}{4} - \xi} + \frac{c^2}{2}} \quad \text{a} \quad \lambda_2 = i\sqrt{\sqrt{\frac{c^4}{4} - \xi} + \frac{c^2}{2}}.$$

$Je-li c^2 < 2\sqrt{\xi}$ , má obecné řešení rovnice (2.13) tvar

$$z_3(t) = \gamma_3 \cosh(pt) \cos(qt) + \delta_3 \sinh(pt) \sin(qt) + \frac{1-\xi}{\xi}, \quad \gamma_3 \in \mathbb{R}, \delta_3 \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

kde  $p = \sqrt[4]{\xi} \cos(\eta)$ ,  $q = \sqrt[4]{\xi} \sin(\eta)$  a  $\eta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ .

*Důkaz.* Rovnice (2.13) je nehomogenní lineární obyčejná diferenciální rovnice, jejíž partikulární řešení nabývá pro  $\xi \in (0, 1)$  tvaru

$$z_P(t) = \frac{1-\xi}{\xi}, \quad (3.10)$$

což je konstantní, a tedy sudá funkce. Můžeme pak rovnou psát sudá řešení homogenní části rovnice v jednotlivých případech.

Nyní vyjádříme příslušnou charakteristickou rovnici k diferenciální rovnici (2.13), ta má tvar

$$\lambda^4 + c^2\lambda^2 + \xi = 0. \quad (3.11)$$

Z tohoto vztahu vyjádříme  $\lambda^2$ , máme tedy

$$\lambda^2 = \sqrt{\frac{c^4}{4} - \xi} - \frac{c^2}{2}, \quad (3.12)$$

kde  $\sqrt{\cdot}$  je funkce komplexní proměnné. Další výpočet můžeme rozdělit na tři části.

1. Nejprve uvažujme  $c^2 = 2\sqrt{\xi}$ . V tomto případě platí  $\lambda^2 < 0$  a kořeny charakteristické rovnice (3.11) jsou dva dvojnásobné ryze imaginární  $\lambda_{1,2} = -i\sqrt[4]{\xi}$  a  $\lambda_{3,4} = i\sqrt[4]{\xi}$ . Řešení homogenní části rovnice (2.13) pak můžeme psát ve tvaru

$$z_H(t) = A \cos(\sqrt[4]{\xi}t) + B \sin(\sqrt[4]{\xi}t) + Ct \cos(\sqrt[4]{\xi}t) + Dt \sin(\sqrt[4]{\xi}t), \quad (3.13)$$

kde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$  jsou reálné konstanty. Požadujeme sudé řešení, proto  $B = C = 0$ . Vztah (3.13) po přeznačení konstant dále přepíšeme jako

$$z_{H,1}(t) = \gamma_1 \cos(\sqrt[4]{\xi}t) + \delta_1 t \sin(\sqrt[4]{\xi}t), \quad \gamma_1 \in \mathbb{R}, \delta_1 \in \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

2. Nyní mějme  $c^2 > 2\sqrt{\xi}$ . V tomto případě jsou kořeny charakteristické rovnice (3.11) čtyři různé ryze imaginární

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\sqrt{-\sqrt{\frac{c^4}{4} - \xi} + \frac{c^2}{2}}, & \lambda_2 &= i\sqrt{\sqrt{\frac{c^4}{4} - \xi} + \frac{c^2}{2}}, \\ \lambda_3 &= -i\sqrt{-\sqrt{\frac{c^4}{4} - \xi} + \frac{c^2}{2}}, & \lambda_4 &= -i\sqrt{\sqrt{\frac{c^4}{4} - \xi} + \frac{c^2}{2}}. \end{aligned}$$

Řešení homogenní části rovnice (2.13) pak nabývá tvaru

$$z_H(t) = A \cos(\kappa_1 t) + B \sin(\kappa_1 t) + C \cos(\kappa_2 t) + D \sin(\kappa_2 t), \quad (3.15)$$

kde  $\kappa_1 = \text{Im}(\lambda_1)$ ,  $\kappa_2 = \text{Im}(\lambda_2)$ , neboť  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_3$  a  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_4$ , a  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$  jsou opět reálné konstanty. Požadujeme sudé řešení, proto  $B = D = 0$ . Přeznačíme konstanty a vztah (3.13) dále přepíšeme jako

$$z_{H,2}(t) = \gamma_2 \cos(\kappa_1 t) + \delta_2 \cos(\kappa_2 t), \quad \gamma_2 \in \mathbb{R}, \delta_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

3. Jako poslední vezměme  $c^2 < 2\sqrt{\xi}$ . Pro lepší práci se vztahy nyní vyjádříme  $\lambda^2$  v goniometrickém tvaru, tj.

$$\lambda^2 = \pm i \sqrt{\xi - \frac{c^4}{4} - \frac{c^2}{2}} = |\lambda^2| (\cos(\varphi_j) + i \sin(\varphi_j)), \quad (3.17)$$

kde  $j = 1, 2$  a  $\varphi_j$  je odpovídající úhel. Jelikož jsou  $\lambda^2$  komplexně sdružená, platí  $\varphi_2 = -\varphi_1$ . Využijeme Moiverovu větu pro zjištění komplexní odmocniny z  $\lambda^2$ . Kořeny charakteristické rovnice (3.11) pak získáme ve tvaru

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= |\lambda| \left( \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \right), \\ \lambda_2 &= |\lambda| \left( \cos\left(\frac{\varphi_1 + 2\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi_1 + 2\pi}{2}\right) \right), \\ \lambda_3 &= |\lambda| \left( \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \right), \\ \lambda_4 &= |\lambda| \left( \cos\left(\frac{\varphi_2 + 2\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi_2 + 2\pi}{2}\right) \right), \end{aligned}$$

kde  $|\lambda| = \sqrt[4]{\xi}$ . Přeznačíme  $\lambda = \lambda_1$ , tedy máme čtyři komplexní kořeny  $\lambda$ ,  $-\lambda$ ,  $\bar{\lambda}$  a  $-\bar{\lambda}$ . Kořen  $\lambda$ , který se nachází v prvním kvadrantu, vyjádříme v exponenciálním tvaru, tedy

$$\lambda = \sqrt[4]{\xi} e^{i\eta}, \quad (3.18)$$

kde  $\eta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Po dosazení do charakteristické rovnice dojdeme ke vztahu

$$c^2 = -2\sqrt{\xi} \cos(2\eta). \quad (3.19)$$

Aby  $c^2 > 0$ , musí  $\cos(2\eta) < 0$  a tedy  $\eta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ . Dále označíme  $\lambda = p + iq$ , tj.  $p = \sqrt[4]{\xi} \cos(\eta)$  a  $q = \sqrt[4]{\xi} \sin(\eta)$ .

Řešení homogenní části rovnice (2.13) pak můžeme psát ve tvaru

$$z_H(t) = Ae^{pt} \cos(qt) + Be^{pt} \sin(qt) + Ce^{-pt} \cos(qt) + De^{-pt} \sin(qt), \quad (3.20)$$

kde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$  jsou reálné konstanty. Pro snazší manipulaci s výrazy můžeme zvolit jiný fundamentální systém, potom má řešení tvar

$$\begin{aligned} z_H(t) &= A \cosh(pt) \cos(qt) + B \cosh(pt) \sin(qt) \\ &+ C \sinh(pt) \cos(qt) + D \sinh(pt) \sin(qt), \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.21)$$



Jelikož požadujeme sudé řešení,  $B = C = 0$ . Opět přeznačíme konstanty a získáme řešení ve tvaru

$$z_{H,3}(t) = \gamma_3 \cosh(pt) \cos(qt) + \delta_3 \sinh(pt) \sin(qt), \quad \gamma_3 \in \mathbb{R}, \delta_3 \in \mathbb{R}. \quad (3.22)$$

Obecné řešení rovnice (2.13) získáme ve tvaru  $z(t) = z_H(t) + z_P(t)$ , tj. máme tři různá možná řešení ve tvarech (3.7), (3.8) a (3.9).  $\square$

## 3.2 Tvary přípustných řešení

V této části textu uvedeme, jak vypadají přípustná řešení úlohy (2.14). Budeme je konstruovat podle postupu popsaného v úvodu Kapitoly 3. Námi hledaná řešení jsou tedy sudé funkce a přes hodnotu  $-1$  přejdou právě dvakrát. Pro jednoduchost jejich vyjádření posuneme bod napojení do 0, jako řešení ve tvaru postupné vlny uvažujeme funkci  $w = w(t)$ , pro kterou platí  $w(t) = z(t - r)$ . Z podmínek na spojitost řešení a jeho derivací v bodě 0 vyplynou vztahy a omezení pro volné parametry.

Nadále budeme uvažovat pouze  $c^2 \in (0, 2)$ . Mohou nastat tři případy.

1. V případě, kdy zároveň  $c^2 = 2\sqrt{\xi}$ , má řešení úlohy (2.14), které je sudé a přejde přes  $-1$  právě dvakrát, tvar

$$w_1(t) = \begin{cases} \mu_1 e^{\sigma t} \cos(\tau t + \nu_1) & \text{pro } t \leq 0, \\ \gamma_1 \cos(\sqrt[4]{\xi}(t - r_1)) \\ + \delta_1 t \sin(\sqrt[4]{\xi}(t - r_1)) + \frac{1 - \xi}{\xi} & \text{pro } t \in (0, 2r_1), \\ \mu_1 e^{-\sigma t} \cos(\tau t - \nu_1) & \text{pro } t \geq 2r_1, \end{cases} \quad (3.23)$$

kde  $\mu_1$ ,  $\nu_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $\delta_1$  a  $r_1$  jsou volné parametry. Pro  $t \leq 0$ , můžeme  $k$ -tou derivací funkce  $w$  psát ve tvaru  $w^{(k)}(t) = \mu_1 e^{\sigma t} \cos(\tau t + \nu_1 + k\rho)$ . Potom vypadají podmínky na spojitost funkce  $w_1$  dané (3.23) a jejich derivací v bodě  $t = 0$  následovně:

$$w_1(0) : \quad \mu_1 \cos(\nu_1) = -1 = \gamma_1 \cos(\sqrt[4]{\xi}r_1) + \frac{1 - \xi}{\xi}, \quad (3.24)$$

$$w_1'(0) : \quad \mu_1 \cos(\nu_1 + \rho) = (\sqrt[4]{\xi}\gamma_1 - \delta_1) \sin(\sqrt[4]{\xi}r_1), \quad (3.25)$$

$$w_1''(0) : \quad \mu_1 \cos(\nu_1 + 2\rho) = \left(2\sqrt[4]{\xi}\delta_1 - \sqrt[4]{\xi^2}\gamma_1\right) \cos(\sqrt[4]{\xi}r_1), \quad (3.26)$$

$$w_1'''(0) : \quad \mu_1 \cos(\nu_1 + 3\rho) = \left(3\sqrt[4]{\xi^2}\delta_1 - \sqrt[4]{\xi^3}\gamma_1\right) \sin(\sqrt[4]{\xi}r_1). \quad (3.27)$$

Podmínka na  $w_1^{(4)}(0)$  je nadbytečná, neboť se čtvrtá derivace dá z rovnice (2.11) vyjádřit v závislosti na  $w_1''$  a  $w_1$ , což jsou spojitě funkce, z čehož plyne, že  $w_1^{(4)}$  je také spojitá.

2. Pro  $c^2 > 2\sqrt{\xi}$  máme speciální řešení (2.14) ve tvaru

$$w_2(t) = \begin{cases} \mu_2 e^{\sigma t} \cos(\tau t + \nu_2) & \text{pro } t \leq 0, \\ \gamma_2 \cos(\kappa_1(t - r_2)) \\ + \delta_2 \cos(\kappa_2(t - r_2)) + \frac{1 - \xi}{\xi} & \text{pro } t \in (0, 2r_2), \\ \mu_2 e^{-\sigma t} \cos(\tau t - \nu_2) & \text{pro } t \geq 2r_2, \end{cases} \quad (3.28)$$

kde  $\mu_2$ ,  $\nu_2$ ,  $\gamma_2$ ,  $\delta_2$  a  $r_2$  jsou volné parametry. Podmínky na spojitost funkce  $w_2$  a jejích derivací v bodě  $t = 0$  vypadají v tomto případě takto:

$$w_2(0) : \quad \mu_1 \cos(\nu_1) = -1 = \gamma_2 \cos(\kappa_1 r_2) + \delta_2 \cos(\kappa_2 r_2) + \frac{1 - \xi}{\xi}, \quad (3.29)$$

$$w_2'(0) : \quad \mu_1 \cos(\nu_1 + \rho) = \kappa_1 \gamma_2 \sin(\kappa_1 r_2) + \kappa_2 \delta_2 \sin(\kappa_2 r_2), \quad (3.30)$$

$$w_2''(0) : \quad \mu_1 \cos(\nu_1 + 2\rho) = -\kappa_1^2 \gamma_2 \cos(\kappa_1 r_2) - \kappa_2^2 \delta_2 \cos(\kappa_2 r_2), \quad (3.31)$$

$$w_2'''(0) : \quad \mu_1 \cos(\nu_1 + 3\rho) = -\kappa_1^3 \gamma_2 \sin(\kappa_1 r_2) - \kappa_2^3 \delta_2 \sin(\kappa_2 r_2). \quad (3.32)$$

3. V posledním případě s  $c^2 < 2\sqrt{\xi}$  nabývá speciální řešení (2.14) tvaru

$$w_3(t) = \begin{cases} \mu_3 e^{\sigma t} \cos(\tau t + \nu_3) & \text{pro } t \leq 0, \\ \gamma_3 \cosh(p(t - r_3)) \cos(q(t - r_3)) \\ + \delta_3 \sinh(p(t - r_3)) \sin(q(t - r_3)) + \frac{1 - \xi}{\xi} & \text{pro } t \in (0, 2r_3), \\ \mu_3 e^{-\sigma t} \cos(\tau t - \nu_3) & \text{pro } t \geq 2r_3, \end{cases} \quad (3.33)$$

kde  $\mu_3$ ,  $\nu_3$ ,  $\gamma_3$ ,  $\delta_3$  a  $r_3$  jsou volné parametry, a podmínky na spojitost nyní nabývají tvaru

$$w_3(0) : \quad \mu_3 \cos(\nu_3) = -1 = \gamma_3 \cosh(pr_3) \cos(qr_3) \\ + \delta_3 \sinh(pr_3) \sin(qr_3) + \frac{1 - \xi}{\xi}, \quad (3.34)$$

$$w_3'(0) : \quad \mu_3 \cos(\nu_3 + \rho) = -(p\gamma_3 + q\delta_3) \sinh(pr_3) \cos(qr_3) + \\ (q\gamma_3 - p\delta_3) \cosh(pr_3) \sin(qr_3), \quad (3.35)$$

$$w_3''(0) : \quad \mu_3 \cos(\nu_3 + 2\rho) = [(p^2 - q^2) \gamma_3 + 2pq\delta_3] \cosh(pr_3) \cos(qr_3) + \\ [(p^2 - q^2) \delta_3 - 2pq\gamma_3] \sinh(pr_3) \sin(qr_3), \quad (3.36)$$

$$w_3'''(0) : \quad \mu_3 \cos(\nu_3 + 3\rho) = [(3pq^2 - p^3) \gamma_3 - (3p^2q + q^3) \delta_3] \sinh(pr_3) \cos(qr_3) \\ + [(3p^2q - q^3) \gamma_3 + (3pq^2 - p^3) \delta_3] \cosh(pr_3) \sin(qr_3). \quad (3.37)$$

V každém z uvedených tří případů musíme nejprve vyřešit soustavu pěti nelineárních rovnic o pěti neznámých, abychom našli požadovaná řešení úlohy (2.14) ve tvaru postupné vlny. Soustavy (3.24)–(3.27), (3.29)–(3.32) a (3.34)–(3.37) nejsou ale řešitelné analyticky, proto je třeba parametry charakterizující funkce (3.23), (3.28) a (3.33) hledat numericky. Na to se zaměříme v následující kapitole.

## Kapitola 4

# Numerické experimenty

V této části textu předkládáme výsledky několika numerických experimentů, které jsme provedli v programovém prostředí MATLAB, abychom našli konkrétní tvary řešení úlohy (2.14). Hledáme takovou kombinaci parametrů  $\mu_i$ ,  $\nu_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\delta_i$  a  $r_i$ , kde  $i = 1, 2, 3$ , která splní jednu ze soustav (3.24)–(3.27), (3.29)–(3.32) nebo (3.34)–(3.37) a zároveň bude popisovat námi požadované řešení.

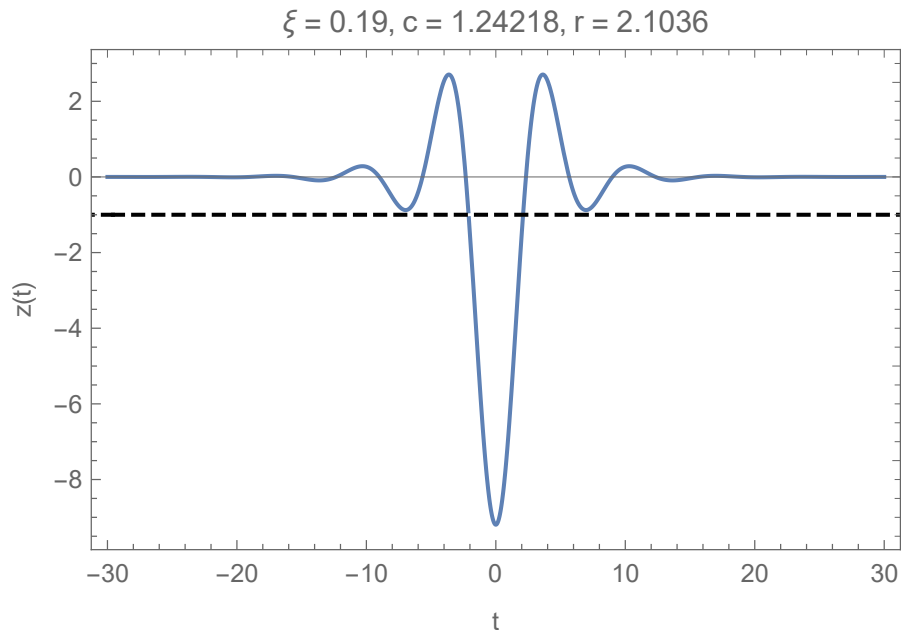
V Lemmatu 9 v Kapitole 2 jsme ukázali, že je-li  $\xi < \frac{c^4}{12}$ , požadované řešení existuje. Omezíme se proto jen na případ  $c > 2\sqrt{\xi}$ , v němž je nerovnost (2.58) zahrnuta. To ovšem neznamená, že pro ostatní dva případy, kdy  $c = 2\sqrt{\xi}$  nebo  $c < 2\sqrt{\xi}$ , žádné řešení neexistuje. Stejně tak jsme se na začátku omezili na sudá řešení, která přes hodnotu  $-1$  přejdou právě dvakrát, avšak nemusí to být jediná možná řešení.

Pro původní úlohu pro rovnici (2.6) ukázali Walter a McKenna v článku [21] tvary řešení pro určité rychlosti šíření vlny  $c$  a také to, že se řešení velmi rozkmitávají pro  $c \rightarrow \sqrt{2}$ . Naopak pro  $c \rightarrow 0$  se objeví nekonečně velká amplituda řešení, viz také [18], tedy řešení pak není omezené. V našem případě bude chování řešení záviset nejen na rychlosti šíření vlny  $c$ , ale i na poměru parametrů  $\alpha$  a  $\beta$ , tedy na  $\xi$ . Pro jednoduchost zafixujeme hodnotu  $\alpha = 1$  a budeme měnit jen parametr  $\beta$ .

Nyní tedy uvažujeme řešení ve tvaru (3.28). Námi volené parametry, které je popisují, jsou  $\xi$  a  $c$ . Z nich získáme hodnoty dalších parametrů  $\rho$ , pro nějž platí  $\rho \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$  a  $c^2 = -2 \cos(2\rho)$ ,  $\sigma$  a  $\tau$ , kde  $\sigma = \cos(\rho)$  a  $\tau = \sin(\rho)$ , a  $\kappa_1$  a  $\kappa_2$  splňující vztahy

$$\kappa_1 = \sqrt{-\sqrt{\frac{c^4}{4} - \xi} + \frac{c^2}{2}} \quad \text{a} \quad \kappa_2 = \sqrt{\sqrt{\frac{c^4}{4} - \xi} + \frac{c^2}{2}}.$$

Neznámé parametry popisující řešení pro přehlednost přeznačíme jako  $\mu = \mu_2$ ,  $\nu = \nu_2$ ,  $\gamma = \gamma_2$ ,  $\delta = \delta_2$  a  $r = r_2$ . Abychom určili jejich hodnoty, budeme řešit soustavu (3.29)–(3.32) pomocí matlabovského numerického řešiče `vpasolve()`. Jako jeden z parametrů se zde zadává počáteční odhad řešení. V našem případě



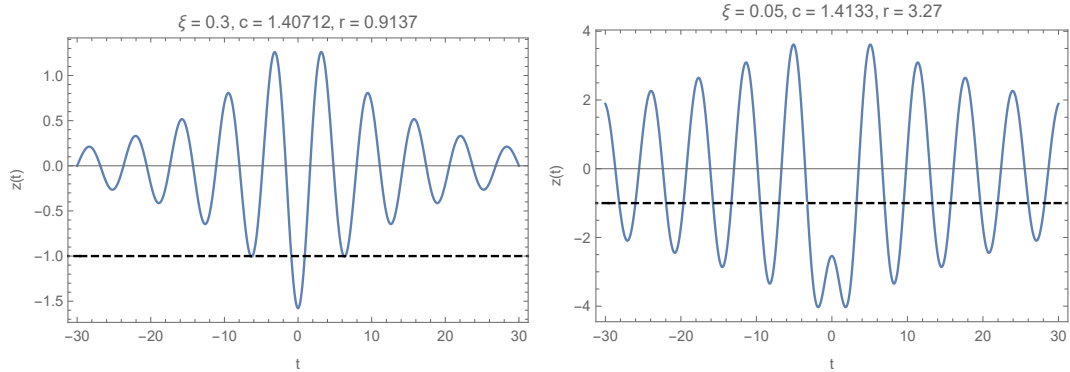
Obrázek 4.1: Graf řešení úlohy (2.14).

jsme jej volili tak, že odpovídal řešení soustavy rovnic uvedené jako (8) v článku od Waltera a McKenny [21, s. 707]. Tato soustava obsahuje podmínky na spojitost řešení rovnice (2.6) z původní úlohy a jeho derivací. Soustavu jsme vyřešili opět pomocí `vpasolve()` a parametrů  $\rho$  a  $\nu$  předložených v článku u jednotlivých konkrétních řešení. Na obrázku 4.1 se nachází graf řešení úlohy (2.14) pro volbu parametrů  $\xi = 0,19$ ,  $c = 1,2422$ , tedy pro  $\rho = 1,226$ , a podle toho stanovené  $\mu = 4,8150$ ,  $\nu = 1,7800$ ,  $\gamma = -10,5707$ ,  $\delta = -2,8861$  a  $r = 2,1036$ . Toto řešení by mohlo odpovídat vertikálním oscilacím visutého mostu. Hodnota  $-1$  je na všech grafech v této části textu vyznačena černou přerušovanou čarou.

Stejně jako v článku [21], i u naší úlohy lze pozorovat zvětšování amplitudy řešení, když  $c \rightarrow 0$ , tj.  $\rho \rightarrow \frac{\pi}{4}$ , zatímco pro  $c \rightarrow \sqrt{2}$ , tj.  $\rho \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , se řešení více a více rozkmitává. Takové chování není překvapivé, neboť první a třetí část řešení jsou totožné s řešením původní úlohy (2.6), rozdílný je pouze tvar prostřední části. V Příloze A můžeme vidět grafy řešení, na nichž se pro  $c$  klesající k nule,

Tabulka 4.1: Hodnoty parametrů  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  a  $r$  pro různá  $c$  a  $\xi$  popisující řešení se zvětšující se amplitudou.

$c$	$\rho$	$\xi$	$\mu$	$\nu$	$\gamma$	$\delta$	$r$
1,0849	1,1	0,11	9,2355	1,6793	-27,8533	-8,1334	2,8468
0,9676	1,029	0,07	14,4016	1,6403	-57,9758	-17,3836	3,4717
0,6741	0,9	0,01	13,1709	1,6468	-203,8950	-40,9035	5,4996
0,2417	0,8	0,0002	56,5095	1,5885	-14383,7979	-3466,8485	18,2793



Obrázek 4.2: Graf ilustrující oscilační chování řešení pro  $c \rightarrow \sqrt{2}$ . Uvedené funkce neřeší úlohu (2.14).

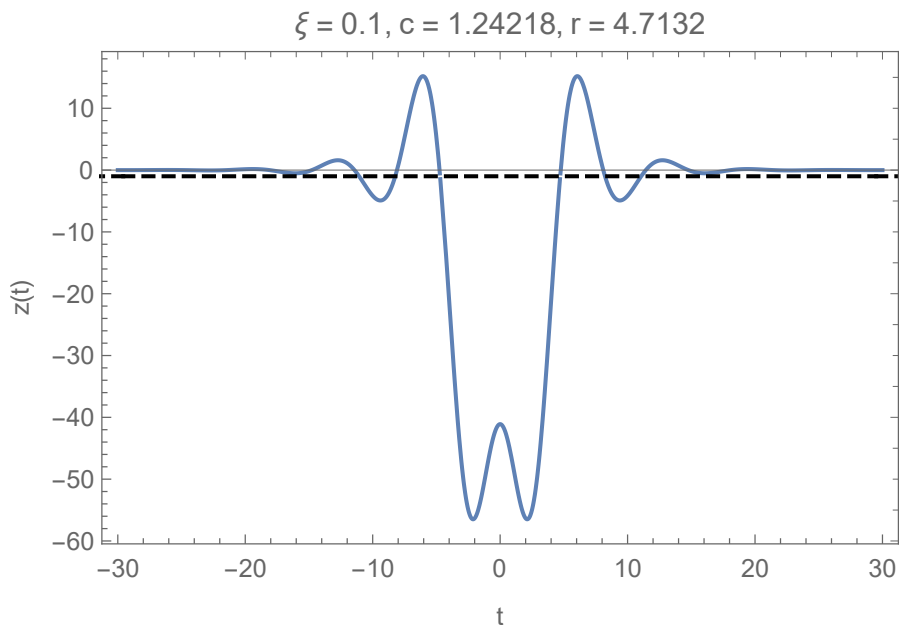
tj. pro zmenšující se hodnotu  $\rho$ , zvětšuje amplituda. U těchto experimentů byly postupně voleny parametry  $c = 1,0849$  a  $\xi = 0,11$ ;  $c = 0,9679$  a  $\xi = 0,07$ ;  $c = 0,6741$  a  $\xi = 0,01$ ;  $c = 0,2417$  a  $\xi = 0,0002$ . Taková řešení vzhledem k rostoucí amplitudě představují pro visutý most nebezpečné situace, neboť odpovídají velkým propadům hlavní mostovky, a mostní konstrukce by pravděpodobně nevydržela tak velké vychýlení z rovnovážného stavu. Všechny stanovené hodnoty parametrů popisujících tyto funkce jsou sepsány v Tabulce 4.1. Uvádíme je zaokrouhlené na čtyři desetinná místa.

Na obrázku 4.2 můžeme naopak vidět grafy dvou silně oscilujících funkcí. Vlevo s volbou parametrů  $c = 1,4071$ , tj.  $\rho = 1,5$ , a  $\xi = 0,3$  a podle toho stanovenými  $\mu = 1,4798$ ,  $\nu = 2,3128$ ,  $\gamma = -3,3919$ ,  $\delta = -0,5182$  a  $r = 0,9137$ . Vpravo s volbou parametrů  $c = 1,4133$ , tj.  $\rho = 1,546$ , a  $\xi = 0,05$  a podle toho stanovenými  $\mu = 3,780$ ,  $\nu = 1,839$ ,  $\gamma = -22,871$ ,  $\delta = 1,333$  a  $r = 3,270$ . Tyto dvě pětice parametrů sice řeší soustavu (3.29)–(3.32), získané funkce však nejsou řešením naší úlohy (2.14), neboť obě překročí hodnotu  $-1$  více než dvakrát.

Co se naopak odlišuje od původní úlohy, jsou kvality řešení týkající se lokálních extrémů. V článku [21] uvádějí autoři dva různé typy řešení. Jeden s lokálním minimem v 0, druhý s lokálním maximem v 0. Některá řešení měla v části

Tabulka 4.2: Hodnoty parametrů  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  a  $r$  pro  $c = 1,2649$  a různá  $\xi$ .

$\xi$	$\mu$	$\nu$	$\gamma$	$\delta$	$r$
0,21	4,4561	1,7971	-9,2048	-2,5351	2,0047
0,2	4,2175	1,8102	-9,1157	-2,3878	1,9866
0,15	3,3968	1,8696	-9,6636	-1,8782	1,9046
0,1	2,9134	1,9212	-12,3451	-1,5748	1,8343
0,05	2,5940	1,9666	-21,9187	-1,3719	1,7729
0,01	2,4067	1,9993	-101,6711	-1,2517	1,7290



Obrázek 4.3: Graf funkce s lokálním maximumem v 0. Uvedená funkce neřeší úlohu (2.14).

pod hodnotou  $-1$ , tedy v části odpovídající řešení rovnice (2.13), dokonce více lokálních extrémů. To však v našem případě nenastává. Podařilo se nám najít pouze řešení, která mají lokální minimum v 0. Opět to neznamená, že by řešení našeho problému (2.14) mající více lokálních extrémů v prostřední části existovat nemohla, jen jsme je nebyli schopni nalézt. Na obrázku 4.3 můžeme vidět funkci, která sice lokální maximum v 0 má, překročí však hodnotu  $-1$  více než dvakrát, stejně jako funkce na obrázku 4.2.

Dále jsme se také zabývali tím, co se bude s řešením dít, zafixujeme-li rychlost šíření vlny  $c$  a budeme měnit pouze  $\xi$ . Pro tento experiment tedy ponecháme pevné  $c = 1,2649$ , kterému odpovídá  $\rho = 1,249$ . Ukazuje se, že s klesajícím  $\xi$  se zmenšuje amplituda řešení i velikost parametru  $r$ , který určuje body napojení jednotlivých částí řešení. V Příloze B můžeme vidět porovnání grafů šesti různých řešení pro  $c = 1,2649$  a různé  $\xi$ . Tabulka 4.2 obsahuje hodnoty parametrů popisujících tato řešení. Opět je uvádíme zaokrouhlené na čtyři desetinná místa.

## Kapitola 5

### Shrnutí a otevřené otázky

V této závěrečné kapitole shrneme získané výsledky a nastíníme několik dosud nevyřešených otázek. Předmětem našeho zkoumání byla úloha pro parciální diferenciální rovnici modelující visutý most s netypickou nelinearitou  $f(u) = \alpha u^+ - \beta u^- - 1$ . Zabývali jsme se hledáním jejích netriviálních řešení ve tvaru postupné vlny. Zdůrazněme ještě, že se jedná o homoklinická řešení. Ukázali jsme, že pokud máme takové řešení, pak rychlost šíření postupné vlny  $c$  musí být z intervalu  $(0, \sqrt{2})$  a řešení samotné musí pro nějaké  $t$  klesnout pod hodnotu  $-1$ .

Pro tuto úlohu jsme dokázali existenci netriviálního slabého řešení ve tvaru postupné vlny pomocí variační metody. Konkrétně jsme použili větu Mountain Pass Theorem a námi zkoumanou úlohu jsme převedli na problém hledání kritických bodů příslušného funkcionálu. Ukázali jsme, že tento funkcionál má vhodnou geometrii. Kvůli hledání řešení úlohy na celé reálné ose jsme nebyli schopni ověřit platnost Palaisovy–Smaleovy podmínky, proto jsme postupovali podle článku od Chena a McKenny [22], v němž autoři využívají tzv. princip koncentrované kompaktnosti. Hlavní výsledek týkající se existence řešení je uveden ve Větě 3.

V Kapitole 3 jsme se zabývali hledáním explicitního vyjádření klasického řešení ve tvaru postupné vlny. Pro jednoduchost jsme se omezili pouze na sudé funkce, které překročí hodnotu  $-1$  právě dvakrát. Mohou nastat tři případy podle vztahu rychlosti šíření postupné vlny  $c$  a parametru  $\xi = \frac{\beta}{\alpha}$ , který udává poměr koeficientů nelinearity  $f$ . Řešení pak nabývají jednoho ze tří možných tvarů, z nichž každý je popsán pětici neznámých parametrů, které jsou řešením soustavy na spojitost postupné vlny a jejích derivací.

Dále jsme popsali numerické experimenty provedené v prostředí MATLAB za účelem nalezení konkrétních pětic parametrů a tím i řešení naší úlohy. Znovu jsme omezili možné tvary řešení, když jsme se pro jednoduchost zaměřili pouze na jeden ze tří případů, a to na situaci, kdy  $c > 2\sqrt{\xi}$ . Ukázali jsme, že existuje více než jedno řešení pro několik různých rychlostí šíření vlny. Všechna námi nalezená řešení mají lokální minimum v nule a jejich další vlastnosti závisí na volbě  $c$ . Jinou možností, jak řešení hledat numericky, je tzv. algoritmus Mountain Pass, viz např. [29, 30].

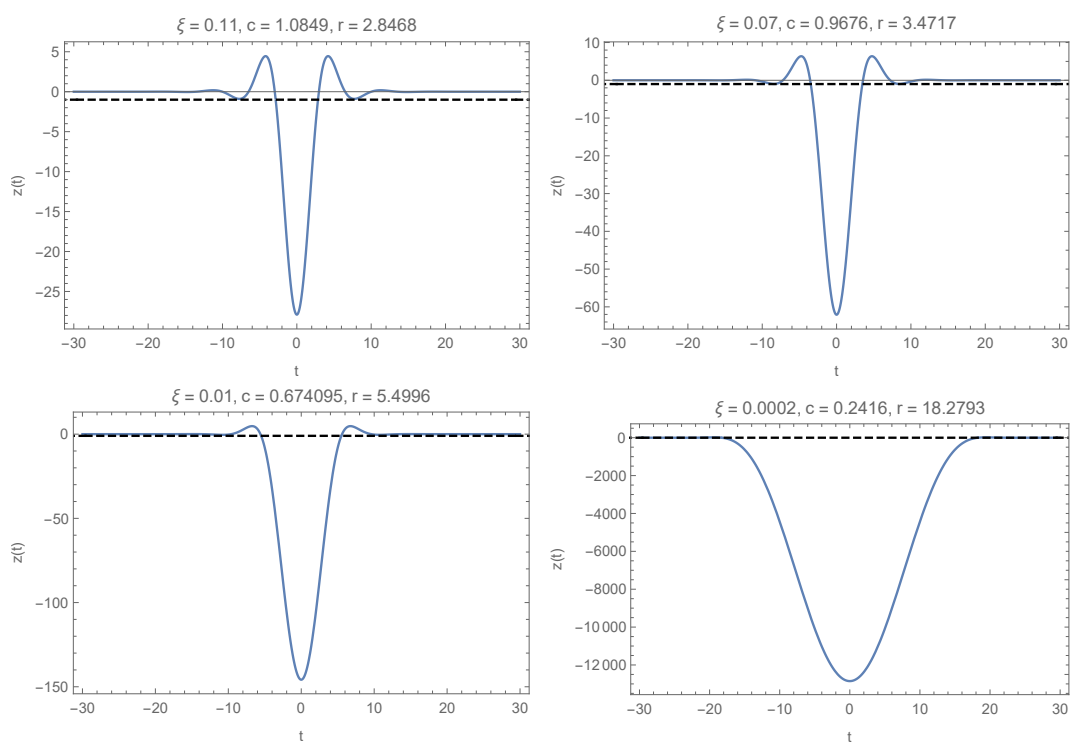
Z experimentů vyplývá, že pokud se rychlost šíření vlny blíží k nule, řešení není omezené, jelikož se jeho amplituda stále zvětšuje. Naopak pro  $c$  jdoucí k  $\sqrt{2}$  vykazují řešení silné oscilatorní chování. Jednou z několika otevřených otázek pro náš problém je právě i analytický důkaz závislosti chování řešení na parametrech.

Mezi další nezodpovězené otázky patří také to, zda existují řešení jiných typů než námi nalezená. Tedy jestli existuje i řešení s lokálním maximem v nule, zda se dají nalézt řešení pro další dva případy  $c = 2\sqrt{\xi}$  a  $c < 2\sqrt{\xi}$  a jaké jsou jejich tvary. Zajímavou otázkou též je, zdali existuje řešení, které není sudé. Zkoumat můžeme i násobnost a stabilitu získaných řešení a jejich chování, když spolu interagují.

Obecně by se také dalo určit, pro jakou třídu nelinearit existuje řešení ve tvaru postupné vlny (částečně se tímto problémem zabývá článek [22]), jak se taková řešení liší a zda v nějakých případech dokážeme najít i řešení heteroklinické. To však přesahuje rámec této práce.



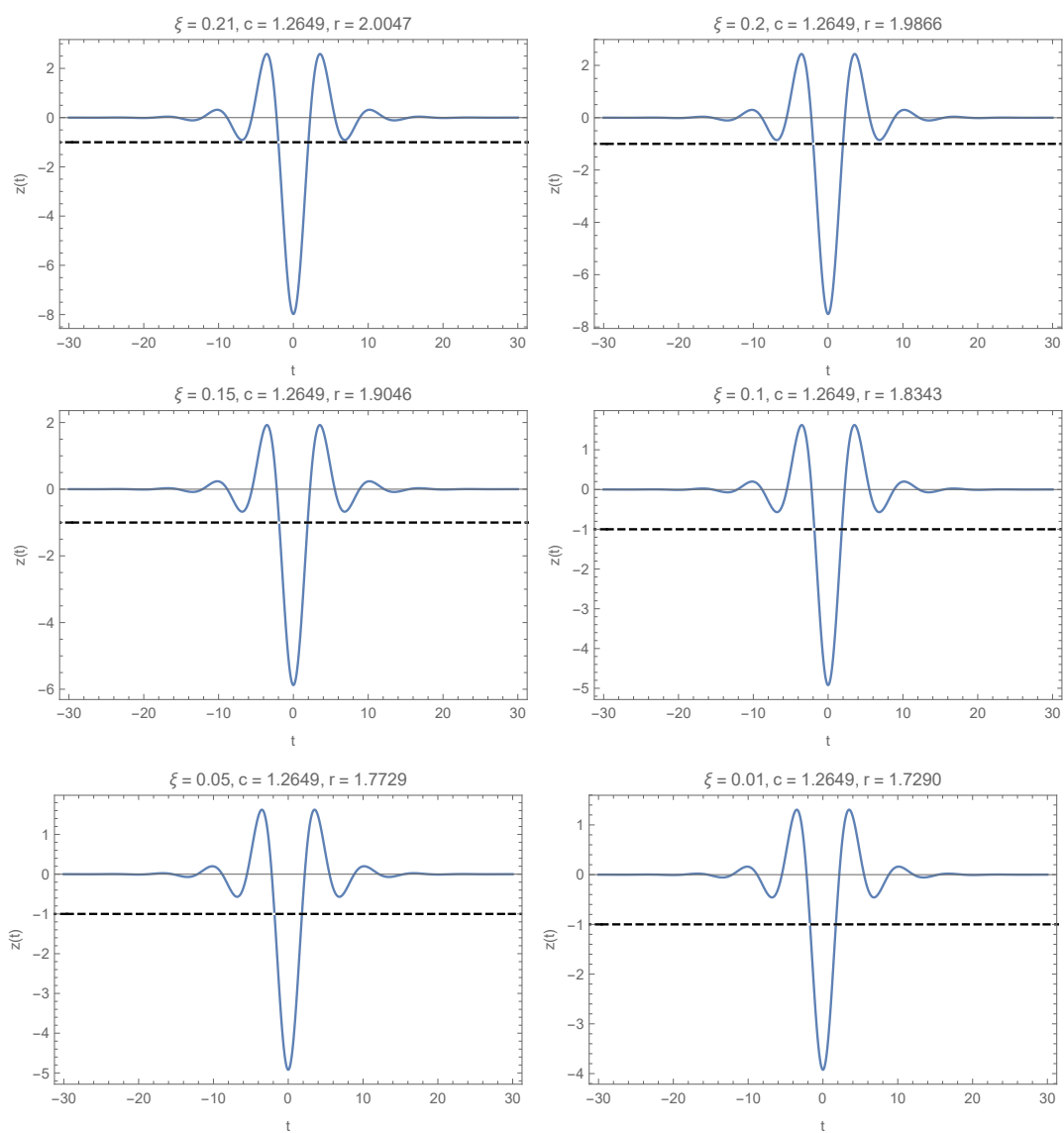
# Příloha A



Obrázek 1: Grafy ilustrující zvětšující se amplitudu řešení, když hodnota  $c$  klesá k nule.



## Příloha B



Obrázek 2: Grafy ilustrující, co se s řešením děje, když zafixujeme  $c$  a měníme parametr  $\xi$ .



## Seznam obrázků

1.1	Příklad homoklinického a heteroklinického řešení. . . . .	2
1.2	Soliton na Venice Beach, Kalifornie. Foto Douglas Baldwin. . . . .	3
1.3	Graf řešení Kortevegovy–deVriesovy rovnice pro $c = 0,5$ a $K = 0$ . . . . .	4
1.4	Schematický vývoj vlnového řešení Fisherovy–Kolmogorovovy rovnice v čase na reálné ose. . . . .	5
1.5	Pád mostu Tacoma Narrows 7. listopadu 1940. . . . .	6
2.1	Schéma visutého mostu a model hlavní mostovky. . . . .	10
2.2	Porovnání grafů dvou typů nelinearit v modelu visutého mostu. . . . .	11
2.3	Graf funkce $u_0$ s vyznačenou hodnotou $-\frac{1}{A}$ a šedou plochou odpovídající integrálu z (c). . . . .	24
4.1	Graf řešení úlohy (2.14). . . . .	40
4.2	Graf ilustrující oscilační chování řešení pro $c \rightarrow \sqrt{2}$ . Uvedené funkce neřeší úlohu (2.14). . . . .	41
4.3	Graf funkce s lokálním maximem v 0. Uvedená funkce neřeší úlohu (2.14). . . . .	42
1	Grafy ilustrující zvětšující se amplitudu řešení, když hodnota $c$ klesá k nule. . . . .	45
2	Grafy ilustrující, co se s řešením děje, když zafixujeme $c$ a měníme parametr $\xi$ . . . . .	47



## Seznam tabulek

- 4.1 Hodnoty parametrů  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  a  $r$  pro různá  $c$  a  $\xi$  popisující řešení se zvětšující se amplitudou. . . . . 40
- 4.2 Hodnoty parametrů  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  a  $r$  pro  $c = 1, 2649$  a různá  $\xi$ . . . . 41





## Literatura

- [1] Murray, J. D. *Mathematical Biology I: An Introduction*. Třetí vydání. New York: Springer-Verlag, 2002. ISBN 978-0-387-95223-9.
- [2] Tang, S. a Huang, W. Bifurcations of travelling wave solutions for the generalized double sinh–Gordon equation. *Applied Mathematics and Computation*. 2007, **189**, 1774–1781.
- [3] Li, Ch. Remarks on homoclinic solutions for semilinear fourth–order ordinary differential equations without periodicity. *Appl. Math. J. Chinese Univ.* 2009, **24**(1), 49–55.
- [4] Gustafson, K. E. *Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods*. New York: Dover Publications, Mineola, 1999.
- [5] Strauss, W. A. *Partial Differential Equations, An Introduction*. New York: John Wiley & Sons, 1992.
- [6] Benci, V. a Fortunato, D. Existence of solitons in the nonlinear beam equation. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*. 2011, **11**(2), 1–20.
- [7] Meng, Q., He, B., Long, Y. a Rui, W. Bifurcations of travelling wave solutions for a general Sine–Gordon equation. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2006, **29**, 483–489.
- [8] Baldwin, D. Soliton na Venice Beach, Kalifornie [foto]. In: *Nonlinear Waves by Douglas Baldwin* [online]. [cit. 22. 5. 2020]. Dostupné z: <https://www.douglasbaldwin.com/nl-waves.html>
- [9] Tang, Y., Xu, W., Shen, J. a Gao, L. Bifurcations of traveling wave solutions for a generalized Sinh–Gordon equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2008, **13**, 1048–1055.
- [10] Brunet, É. a Derrida, B. An Exactly Solvable Travelling Wave Equation in the Fisher-KPP Class. *Journal of Statistical Physics*. 2015, **161**, 801–820.
- [11] Drábek, P. a Takáč, J. Convergence to travelling waves in Fisher’s population genetics model with a non–Lipschitzian reaction term. *Journal of Mathematical Biology*. 2017, **75**(4), 929–972.

- 
- [12] Couillet, P., Elphick, C. a Repaux, D. Nature of spatial chaos. *Phys. Rev. Lett.* 1987, **58**, 431–434.
- [13] Swift, J. B. a Hohenberg, P. C. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. *Phys. Rev. A.* 1977, **15**, 319–328.
- [14] Lega, J., Moloney, J. a Newell, A. Swift–Hohenberg for lasers. *Phys. Rev. Lett.* 1994, **73**, 2978–2981.
- [15] Bonheure, D., Habets, P. a Sanchez, L. Heteroclinics for fourth order symmetric bistable equations. *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia.* 2004, **52**, 213–227.
- [16] Pád mostu Tacoma Narrows 7. listopadu 1940 [foto]. In: Long, P. *Tacoma Narrows Bridge collapses on November 7, 1940.* [online]. [cit. 22. 5. 2020]. Dostupné z: <https://historylink.org/File/5048>
- [17] Drábek, P., Holubová, G., Matas, A. a Nečesal, P. Nonlinear models of suspension bridges: Discussion of the results. *Applications of Mathematics.* 2003, **48**(6), 497–514.
- [18] Lazer, A. C. a McKenna, P. J. Large–amplitude periodic oscillations in suspension bridges: Some new connections with nonlinear analysis. *SIAM Review.* 1990, **32**, 537–578.
- [19] Semper, B. A Mathematical Model for Suspension Bridge Vibration. *Mathematical and Computer Modelling.* 1993, **18**(11), 17–28.
- [20] Lazer, A. C. a McKenna, P. J. On travelling waves in a suspension bridge model as the wave speed goes to zero. *Nonlinear Analysis.* 2011, **74**, 3998–4001.
- [21] McKenna, P. J. a Walter, W. Travelling Waves in a Suspension Bridge. *SIAM Journal on Applied Mathematics.* 1990, **50**(3), 703–715.
- [22] Chen, Y. a McKenna, P. J. Traveling Waves in a Nonlinearly Suspended Beam: Theoretical Results and Numerical Observations. *Journal of differential equations.* 1997, **136**, 325–355.
- [23] Smets, D. a van den Berg, J. B. Homoclinic solutions for Swift–Hohenberg and suspension bridge type equations. *Journal of Differential Equations.* 2002, **184**(1), 78–96.
- [24] Breuer, B., Horák, J., McKenna, P. J. a Plum, M. A computer assisted existence and multiplicity proof for travelling waves in a nonlinearly supported beam. *Journal of Differential Equations.* 2006, **224**, 60–97.

- 
- [25] Herb, R. A. a Sally Jr., P. J. The Plancherel Formula, the Plancherel Theorem, and the Fourier Transform of Orbital Integrals. *Contemporary Mathematics*. 2011, **55**, 3–22.
- [26] Drábek, P. a Milota, J. *Methods of Nonlinear Analysis*. Druhé vydání. Birkhäuser, 2013. ISBN 978-3-0348-0386-1
- [27] Lions, P. L. The concentration–compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1. *Annales de l’Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*. 1984, **1**(2), 109–145.
- [28] Lieb, E. H. a Loss, M. *Analysis*. Druhé vydání. American Mathematical Society, 2001. ISBN 0821827839.
- [29] Choi, Y. S., McKenna, P. J. a Romano, M. A mountain pass method for the numerical solution of semilinear wave equations. *Numer. Math.* 1993, **64**, 487–509.
- [30] Choi, Y. S. a McKenna, P. J. A mountain pass method for the numerical solution of semilinear elliptic problems. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*. 1993, **20**(4), 417–437.