FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI
STUDENTSKÁ VĚDECKÁ KONFERENCE 2024

Neautonomní dynamické systémy a jejich aplikace

Jaroslav Mužík[1]

1 Úvod

Tato práce je zaměřena na analýzu neautonomních růstových modelů ve spojitém čase. V práci je zkoumán logistický model růstu, jenž byl poprvé popsán v devatenáctém století P. F. Verhulstem (viz Allen (2007)). V logistickém modelu figurují dva autonomní parametry. Růstový parametr, symbolizující rychlost růstu sledované veličiny a parametr symbolizující nosnou kapacitu prostředí. V práci jsou zavedeny a analyzovány dvě neautonomní obdoby tohoto standardního modelu, které mají každá právě jeden z výše zmíněných parametrů nahrazen jeho obdobou, která je nekonstantní v čase. Porovnávány jsou kvalitativní a kvantitativní vlastnosti jednotlivých modelů. V jednotlivých sekcích jsou ilustrovány a diskutovány rozdíly mezi autonomními řešeními a jim odpovídajícími neautonomními variantami.

Příkladem systému s parametry závislými na čase může být např. populace krysy obecné v severovýchodní Indii, jejíž reprodukce je úzce navázána na životní cyklus bambusu *melocanna baccifera*. Tento druh bambusu se dle Jeeva et al. (2009) vysemení pouze jednou za několik desítek let a živočichům živícím se jeho plody, mezi nimiž je i krysa, náhle prudce naroste kapacita prostředí a s ní i velikost jejich populace. Krysy pak pravidelně po úbytku semen způsobují škody na úrodě místním obyvatelům. Přesnějším modelováním těchto jevů by se dalo lépe a s předstihem připravit na budoucí vlny škůdců. Jiným příkladem kapacity prostředí závislé na čase může být trh se sezónním zbožím. Kapacitu lze interpretovat jako poptávku po zboží, která v průběhu roku periodicky kolísá. Příkladem skokového růstu kapacity pak může být rozšíření výrobního závodu na nový trh nebo rozšíření repertoáru výrobků. Nabízí se pak otázka jak rychle dokáže podnik tuto kapacitu zaplnit.

2 Výsledky analýz

V práci jsou srovnávány tři úlohy. Jsou jimi úloha autonomní:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{\varkappa}\right), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{A}$$

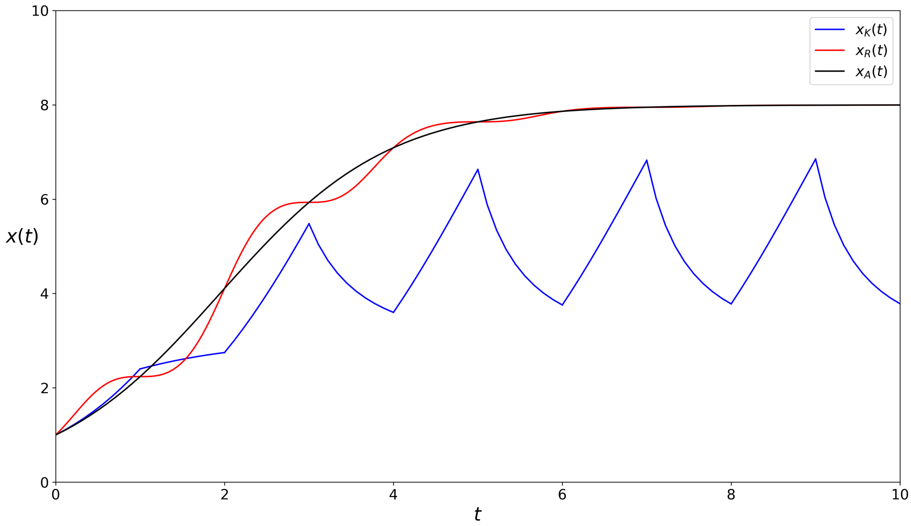
dále úloha neautonomní v růstovém parametru:

$$\begin{cases} x'(t) = a(t) x(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{\varkappa}\right), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{R}$$

a nakonec úloha neautonomní v parametru kapacity prostředí:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{k(t)}\right), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{K}$$

[1] student bakalářského studijního programu Matematika a finanční studia, e-mail: jamuzik@students.zcu.cz



Obrázek 1: Srovnání partikulárních řešení úloh (A), (R) a (K).

Na obrázku 1 jsou srovnány průběhy partikulárních řešení těchto úloh. Prvním je řešení $x_A(t)$ úlohy (A), dále řešení $x_R(t)$ úlohy (R) a řešení $x_K(t)$ úlohy (K). Zvolené hodnoty parametrů pro všechna řešení jsou $\alpha = 0.9, \varkappa = 8, x_0 = 1$ a pro řešení $x_K(t)$ je navíc zvolen parametr $\varepsilon = 5$.

Chování řešení úlohy (R) je v práci popsáno následujícími lemmaty:

Lemma 1. *Pokud je $x_0 > 0$, pak pro trajektorie úloh* (A) *a* (R) *platí:*

I. *existuje-li takové $T > 0$, že $A(T) = \alpha T$, pak $x_R(T) = x_A(T)$.*

II. *Je-li $x_0 < \varkappa$ a existuje-li takové $T > 0$, že $A(T) > \alpha T$, pak $x_R(T) > x_A(T)$.*

III. *Je-li $x_0 > \varkappa$ a existuje-li takové $T > 0$, že $A(T) > \alpha T$, pak $x_R(T) < x_A(T)$.*

IV. *Je-li $x_0 < \varkappa$ a existuje-li takové $T > 0$, že $A(T) < \alpha T$, pak $x_R(T) < x_A(T)$.*

V. *Je-li $x_0 > \varkappa$ a existuje-li takové $T > 0$, že $A(T) < \alpha T$, pak $x_R(T) > x_A(T)$.*

Lemma 2. *Pokud je $0 < x_0 < \varkappa$, pak bude pro všechna $t \geq 0$ platit $x_R(t) < \varkappa$.*

Pro úlohu (K) bylo analyzováno pouze řešení $x_K(t)$ se specifickou po částech konstantní funckí $k(t)$. Pro toto řešení mimo jiné platí:

Lemma 3. *Interval (t_1, t_2), na kterém platí $x_K(t) > \varkappa$ existuje, pokud je splněna nerovnost*

$$\frac{\varkappa}{\varepsilon} > \frac{e^{\alpha} + 1}{e^{\alpha} - 1}.$$

Literatura

Allen, L. J. S. (2007) *An Introduction to Mathematical Biology*. Pearson/Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.

Jeeva, S. a Kiruba, S. a Lalhruaitluanga, H. a Mnv., Prasad a Rao, R.R. (2009) Flowering of Melocanna baccifera (Bambusaceae) in northeastern India. *Curr. Sci.*.