



FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI

KATEDRA
KYBERNETIKY

Diplomová práce

Odhad kovariancí šumů generátoru časového signálu

Tomáš Hefler



FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI

KATEDRA
KYBERNETIKY

Diplomová práce

Odhad kovariancí šumů generátoru časového signálu

Bc. Tomáš Hefler

Vedoucí práce

Ing. Oliver Kost, Ph.D.

© Tomáš Hefler, 2024.

Všechna práva vyhrazena. Žádná část tohoto dokumentu nesmí být reprodukována ani rozšiřována jakoukoli formou, elektronicky či mechanicky, fotokopírováním, nahráváním nebo jiným způsobem, nebo uložena v systému pro ukládání a vyhledávání informací bez písemného souhlasu držitelů autorských práv.

Citace v seznamu literatury:

HEFLER, Tomáš. *Odhad kovariancí šumů generátoru časového signálu*. Plzeň, 2024. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra kybernetiky. Vedoucí práce Ing. Oliver Kost, Ph.D.

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd

Akademický rok: 2023/2024

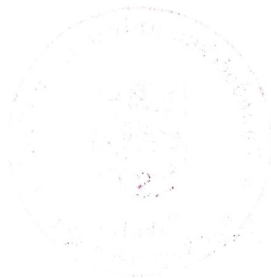
ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Bc. Tomáš HEFLER**
Osobní číslo: **A22N0089P**
Studijní program: **N0714A150011 Kybernetika a řídicí technika**
Specializace: **Automatické řízení a robotika**
Téma práce: **Odhad kovariancí šumů generátoru časového signálu**
Zadávací katedra: **Katedra kybernetiky**

Zásady pro vypracování

1. Seznamte se s generátorem časového signálu popsaného stavovým stochastickým modelem.
2. Seznamte se a implementujte korelační metodu rozdílů měření pro odhad kovariancí šumů stavového modelu.
3. Analyzujte vliv parametrů metody rozdílů měření a typ modelu na kvalitu odhadu kovariancí šumů a navrhněte přístup pro jeho volbu.
4. Zhodnoťte dosažené výsledky.



125

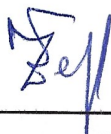
Rozsah diplomové práce: **40-50 stránek A4**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

- Galleani, L. (2008). A tutorial on the two-state model of the atomic clock noise. Metrologia, 45(6), S175-S182.
- O. Kost, J. Duník, and O. Straka, "Measurement Difference Method: A Universal Tool for Noise Identification," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 68, no. 3, pp. 1792-1799, March 2023, doi: 10.1109/TAC.2022.3160679.
- J. Duník, O. Straka, O. Kost, and J. Havlík. (2017). Noise covariance matrices in state space models: A survey and comparison of estimation methods—Part I. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 31. 10.1002/acs.2783.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Oliver Kost, Ph.D.**
Výzkumný program 1

Datum zadání diplomové práce: **2. října 2023**
Termín odevzdání diplomové práce: **20. května 2024**



Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan



Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová
vedoucí katedry

V Plzni dne 2. října 2023

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného akademického titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Západočeská univerzita v Plzni má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Plzni dne 20. května 2024

.....

Tomáš Hefler

V textu jsou použity názvy produktů, technologií, služeb, aplikací, společností apod., které mohou být ochrannými známkami nebo registrovanými ochrannými známkami příslušných vlastníků.

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá vlastnostmi šumů generátorů časového signálu. Práce nejprve zavádí diskrétní stochastický stavový model systému a ukazuje některé statistické vlastnosti modelu. Následně jsou představeny generátory časového signálu jako oscilátory a popsán způsob tvorby jejich spojitého modelu spolu s modelováním chyb těchto generátorů.

Poté je ukázána Metoda rozdílů měření jako nástroj pro odhad parametrů kovariančních matic šumů, které působí na generátory časového signálu. Tato metoda je postupně odvozena z rovnic samotného modelu. Následně je ukázána její aplikace na problematiku odhadu vlastností šumů pomocí dvou různých přístupů. Nakonec je metoda podstoupena simulacím, které ověřují její vlastnosti a kvalitu odhadů.

Abstract

The thesis deals with the properties of noises in time signal generators. The thesis first introduces a discrete stochastic state-space model of a system and shows some statistical properties of the model. Subsequently, the time signal generator as an oscillator is introduced and the method of constructing its continuous model is described, together with the modelling of the errors of this generator.

Then, the Measurement Difference Method is shown as a tool for estimating parameters of covariance matrixes of the noises acting on time signal generators. This method is successively derived from the equations of the model itself. Its application to the problem of estimating noise properties is then shown using two different approaches. Finally, the method is subjected to simulations that verify its properties and the quality of the estimates.

Klíčová slova

Stavový model • vlastnosti šumů • kovarianční matice • Metoda rozdílů měření • odhad parametrů šumů • generátor časového signálu • Monte Carlo simulace

Poděkování

Na tomto místě bych velice rád poděkoval Ing. Oliveru Kostovi, Ph.D. za jeho odborné vedení práce a za velice konstruktivní diskuze, rady a podněty, které mi pomohli při vypracování této práce.

Obsah

1 Úvod	3
2 Model stochastického systému a statistické vlastnosti	5
2.1 Náhodné šумы v modelu	6
2.1.1 Střední hodnota a kovarianční matice	6
3 Model generátoru časového signálu	7
3.1 Model generátoru časového signálu a jeho poruch	7
3.1.1 Šумы generátorů časového signálu	8
3.1.2 Wienerův proces a bílý šum	9
3.1.3 Stavový model	9
3.2 Diskretizace stavového modelu	10
4 Metoda rozdílu měření	15
4.1 Predikce a rozdíl měření	15
4.2 Základní myšlenka MDM	19
5 Aplikace metody	25
5.1 Odhad s aproximací kovarianční matice šumů stavu	25
5.2 Simulace odhadu s aproximací kovarianční matice šumů stavu	31
5.3 Odhad parametrů kovariančních matic bez aproximace	36
5.3.1 Univerzální postup vyjádření \mathcal{S}_{vec} jako součinu matice a vektoru parametrů	37
5.3.2 Bélangerův přístup jako rozšíření odhadu s aproximací	40
5.4 Simulace odhadu parametrů bez aproximace	41
5.5 Porovnání výsledků odhadů	44
5.6 Simulační program	48
6 Závěr	49
Bibliografie	51

V dnešním světě, kde se technologie každým dnem posouvají k vyšší výkonosti a přesnosti, se měření přesného času stává stále podstatnější problematikou. Ať už se jedná o satelitní navigační systémy, časově závislé výrobní procesy nebo i běžné fungování většiny elektronických zařízení, je zřejmé, že moderní společnost je závislá na měřících časech. Jedním z problémů tedy zůstávají nedokonalosti konstrukce měřících zařízení v hodinách. Ať už mluvíme o atomových hodinách nebo klasických ručičkových hodinách, všechny se s postupujícím časem předbíhají či opožďují, i když každé jinou rychlostí.

Přesto, že nedokážeme sestavit naprosto přesné generátory časového signálu, můžeme určit vlastnosti nedokonalých hodin a pomocí těchto vlastností určit přesnost měření času, popřípadě odhadnout vývoj budoucí odchylky od reálného času. Ovšem jak získáme tento reálný a naprosto přesný čas? Bez přesných generátorů časového signálu můžeme pouze porovnávat čas naměřený z různých zdrojů a určovat tak odchylky mezi nimi. Tyto odchylky, nebo také šумы, jsou určeny vlastnostmi samotných generátorů. V této práci uvažujeme odhad vlastností šumů generátorů časového signálu využívaných v dnešních běžně dostupných technologiích, jako jsou například krystalové generátory časového signálu [Hsi14], jejichž signál je porovnáván s řádově přesnějšími atomovými hodinami [LCZ19], jelikož v tomto případě se šумы atomových hodin dají zanedbat v porovnání s šумы hodin s mnohem menší přesností.

Základním prvkem pro analýzu vlastností šumů ve stochastických systémech, jako jsou například měření hodin, je definice jejich modelu. Model systému je vždy jen aproximací a jeho přesnost záleží na množství zanedbané, či špatně modelované dynamiky, popřípadě na nepřesné definici struktury modelu. Každý stochastický model můžeme dělit na dvě části. První částí je část deterministická, která je reprezentována exaktními rovnicemi, jejichž chování lze velmi snadno předpovídat. Druhou a pro tuto práci zajímavější částí je část stochastická, která je reprezentována šумы. Tyto šумы zastupují neznámou, či nemodelovanou dynamiku. V této práci budeme popisovat šумы pomocí dvou hodnot, takzvaných momentů, které popisují jejich chování a následně se pokusíme právě tyto modely odhadnout. Výho-

dou znalosti momentů šumů je skutečnost, že můžeme na místo zcela náhodného chování modelu uvažovat pouze určitou oblast, ve které náhoda v podobě šumů působí. Další výhodou znalosti vlastností šumů je, že známý popis šumu je jedním z prvních kroků při snaze jej potlačit.

Jako odhad se v této práci rozumí využití dostupných informací o dynamice systému a hodnot získaných jeho měřeními, ze kterých se pokusíme pomocí matematických rovnic určit právě hledané vlastnosti šumů. Samozřejmě jak již samotný název napovídá, odhad nemusí být roven přesně hledané hodnotě. Existuje nespočet metod ([DKS18], [Meh72], [Lee80], [Fri82], [Ma+11], atd.), které slouží k odhadování neznámých kovariančních matic, kde každá má své výhody a nevýhody. V této práci se zaměříme výhradně na Metodu rozdílu měření [Kos22], kterou aplikujeme na problematiku odhadu momentů šumů generátoru časového signálu.

Model stochastického systému a statistické vlastnosti

2

Jako stochastický model systému v této práci se používá diskretní stavový model [Söd02], který se skládá ze dvou částí. První částí je stavová rovnice

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \quad (2.1)$$

pro $k = 1, 2, 3, \dots, n$, kde $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ je neznámý vektor stavu, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ představuje známý vektor řízení, $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ je neměřitelný vektor šumu stavu a matice $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ je známá matice dynamiky.

K rovnici stavu náleží druhá část modelu, kterou je rovnice měření

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (2.2)$$

kde $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ je známý vektor měření, $\mathbf{H}_k \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ je známá matice měření a $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ je neměřitelný vektor šumu měření.

Pro stavový model systému je definována matice pozorovatelnosti jako

$$\mathcal{O}^{n_x} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \mathbf{HFF} \\ \vdots \\ \mathbf{HF}^{n_x-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_z n_x \times n_x}, \quad (2.3)$$

kde \mathbf{H} a \mathbf{F} jsou matice z rovnic (2.1) a (2.2) a $\mathcal{F}^{n_x-1} = \prod_{i=1}^{n_x-1} \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ je maticový součin.

Pokud má matice pozorovatelnosti \mathcal{O}^{n_x} plnou hodnotu, je systém označován jako pozorovatelný a je možné v každém okamžiku získat odhad stavu z posloupnosti měření $[\mathbf{z}_k^T, \mathbf{z}_{k+1}^T, \mathbf{z}_{k+2}^T, \dots, \mathbf{z}_{k+(n_x-1)}^T]^T$ a posloupnosti řízení $[\mathbf{u}_k^T, \mathbf{u}_{k+1}^T, \mathbf{u}_{k+2}^T, \dots, \mathbf{u}_{k+(n_x-2)}^T]^T$ pro všechny časové okamžiky k .

2.1 Náhodné šумы v modelu

Šумы představují náhodné složky modelu, jejichž budoucí hodnoty nelze předpovídat. Těmito náhodnými složkami modelu jsou šum stavu \mathbf{w}_k a šum měření \mathbf{v}_k . Šum stavu v sobě obsahuje vliv náhodných poruch, vliv okolního prostředí nebo nedomodelovanou dynamiku samotného systému. Šum měření představuje nedokonalost měřících zařízení a elektrických obvodů. Tyto náhodné veličiny bývají popisovány buď známými funkcemi (např. funkce hustoty pravděpodobnosti), nebo pomocí konečných momentů. V této práci se všechny náhodné veličiny popisují pomocí jejich střední hodnoty a kovarianční matice.

2.1.1 Střední hodnota a kovarianční matice

Střední hodnota $E[X]$ vyjadřuje očekávanou hodnotu náhodné veličiny (viz. anglický název expected value) a vyjadřuje v jistém smyslu průměr všech možných hodnot X vážený pravděpodobnostmi jejich výskytu a pro spojitou náhodnou veličinu je definována jako

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} xp(x)dx, \quad (2.4)$$

kde $p(x)$ je funkce hustoty pravděpodobnosti náhodné veličiny.

U vícerozměrných náhodných veličin se zavádí takzvaná kovarianční matice. Tato veličina je definována jako

$$\text{cov}[X_1, X_2] = E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])^T], \quad (2.5)$$

kde $\text{cov}[X_1, X_2] \in \mathbb{R}^{n_{x_1} \times n_{x_2}}$ je kovarianční matice a X_1 a X_2 jsou náhodné veličiny. Definiční vztah kovarianční matice lze upravit do podoby

$$\text{cov}[X_1, X_2] = E[X_1 X_2^T] - E[X_1]E[X_2]. \quad (2.6)$$

Pokud jsou všechny střední hodnoty náhodných veličin rovny nule a máme vektory diskretních realizací, je kovarianční matice náhodných veličin rovna jejich korelaci, která je definovaná jako

$$\text{cov}[X_1, X_2] = E[X_1 X_2^T]. \quad (2.7)$$

V případě, že určujeme kovarianční matici, kde obě náhodné veličiny jsou stejná jedno-dimenzionální náhodná veličina, je výsledkem skalární hodnota nazývaná variance.

Model generátoru časového signálu

3

V této práci se jako generátory časového signálu uvažují oscilátory, které využívají technologii snímání kmitů atomů, piezoelektrického jevu křemíkových krystalů, či jiných zdrojů stálých oscilací [Gal08].

3.1 Model generátoru časového signálu a jeho poruch

Tyto generátory časového signálu pracují na principu měření fáze kmitání oscilátorů na jejich rezonanční frekvenci. V ideálním případě by tento systém byl naprosto přesný a řídil se rovnicí oscilátoru

$$u(t) = U_0 \sin(2\pi\omega_0 t), \quad (3.1)$$

kde U_0 je amplituda kmitů a ω_0 je jejich frekvence.

V reálném světě ovšem není možné vytvořit zcela přesný oscilátor a tak všechny generátory časového signálu podléhají poruchám. Uvažují se dva základní druhy poruch, první je porucha v amplitudě U a druhou je porucha ve frekvenci ω . Po doplnění rovnice (3.1) o poruchy vypadá model oscilátoru následovně

$$u(t) = (U_0 + \epsilon(t)) \sin(2\pi\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (3.2)$$

kde $\epsilon(t)$ značí posuv v amplitudě a $\varphi(t)$ je porucha fáze oscilátoru.

Pro potřeby měření času je porucha v amplitudě zanedbatelná, jelikož je její vliv na frekvenci a fázi oscilátoru minimální. Pro reálné měření času se uvažuje rovnice měření času

$$h(t) = t + \frac{\varphi(t)}{2\pi\omega_0}, \quad (3.3)$$

kde t je přesný čas, který je v rámci této práce uvažován jako měření atomových hodin, jejichž nepřesnost je o několik řádů nižší než nepřesnosti generátorů, jejichž

parametry budeme odhadovat. Rovnice (3.3) vznikla z argumentu funkce sinus z (3.2) vydělením členem $2\pi\omega_0$. Pro modelování chyb v generátorech časového signálu se zavádí rovnice fázového posuvu

$$x(t) = h(t) - t. \quad (3.4)$$

Tato rovnice vyjadřuje fázový posuv v každém okamžiku měření. Po dosazení do rovnice (3.4) získáme rovnici

$$x(t) = \frac{\varphi(t)}{2\pi\omega_0}. \quad (3.5)$$

Tuto rovnici lze chápat jako první způsob měření poruch v generátorech časového signálu, konkrétně jejich fázového posuvu.

Pro oscilátor se definuje okamžitá frekvence jako

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (3.6)$$

S pomocí okamžité frekvence lze určit normalizovanou frekvenční odchylku

$$y(t) = \frac{\omega(t) - \omega_0}{\omega_0}, \quad (3.7)$$

po dosazení za $\omega(t)$ z (3.6) získáme

$$y(t) = \frac{1}{2\pi\omega_0} \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (3.8)$$

Při porovnání rovnice normalizované frekvenční odchylky (3.8) a rovnice fázového posuvu (3.5) vidíme, že platí

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (3.9)$$

Normalizovaná frekvenční odchylka představuje druhý způsob měření poruch v časovém signálu. Hodnota normalizované frekvenční odchylky bývá určována pomocí diferencí fázových posuvů $x(t)$ [Bre93] jako

$$\hat{y}(t) = \frac{1}{\tau}(x(t) - x(t - \tau)). \quad (3.10)$$

V realitě se jedná tedy pouze o odhad normalizované frekvenční odchylky.

3.1.1 Šumy generátorů časového signálu

Jelikož v minulosti bylo již měřeno chování různých generátorů časového signálu [ZT05], bylo experimentálně zjištěno, jaký model popisuje šumy pomocí Allanovy variance [All66]. Allanova variance byla navržena jako nástroj pro analýzu stability generátoru časového signálu.

Pomocí Allanovy variance bylo zjištěno, že normalizovaná frekvenční odchylka generátorů se skládá ze dvou náhodných procesů. První veličinou je bílý šum a druhým je Wienerův proces. S touto znalostí je možné přepsat rovnici normalizované frekvenční odchylky jako

$$y(t) = \xi_1(t) + W_2(t), \quad (3.11)$$

kde $\xi_1(t)$ představuje bílý šum a $W_2(t)$ je Wienerův proces.

3.1.2 Wienerův proces a bílý šum

Wienerův proces je stochastický proces s nulovou střední hodnotou a časově nezávislými přírůstky. Wienerův proces definován vztahem

$$W_2(t_n) = \int_0^{t_n} \xi(\tau) d\tau, \quad (3.12)$$

kde $W_2(0) = 0$ a $\xi(\tau)$ představuje bílý šum.

Jako bílý šum se nazývá náhodný proces, jehož současná hodnota není nijak závislá na hodnotách minulých ani budoucích. Jeho realizací je vektor náhodných hodnot, pro které platí, že kovarianční matice je definována jako

$$\text{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2)) = \delta(t_1 - t_2)Q. \quad (3.13)$$

V rovnici představuje Q výkonovou spektrální hustotu šumu $\xi(t)$ a $\delta(t)$ je Diracova funkce definovaná jako

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau \quad (3.14)$$

a platí, že $\delta(t) = 0$ pokud $t \neq 0$.

3.1.3 Stavový model

Dalším krokem potřebným pro následné odhady vlastností šumů v časovém signálu je vytvoření stavového modelu. Nejprve vyjádříme frekvenční odchylku $y(t)$ jako součet bílého šumu a Wienerova procesu, který je dán jako integrál bílého šumu

$$y(t) = \xi_1(t) + \int_0^t \xi_2(\tau) d\tau. \quad (3.15)$$

Tato rovnice představuje základní kámen pro tvorbu stavového modelu. Nyní zavedeme dvě nové proměnné, které budou reprezentovat stavy modelu

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t), \\ x_2(t) &= \int_0^t \xi_2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Po derivaci obou rovnic podle času získáme

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} = y, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \xi_2(t).\end{aligned}\tag{3.17}$$

Po dosazení za $y(t)$ z (3.15) získáme model popisující vývoj fázového posuvu časového signálu. V maticové podobě vypadá model následovně

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}_s(t)\mathbf{x}(t) + \xi(t),\tag{3.18}$$

kde $\mathbf{x}(t)$ představuje vektor stavů, $\mathbf{F}_s(t)$ je matice dynamiky a $\xi(t)$ je vektor obsahující šumy

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_s(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}.\tag{3.19}$$

U matice dynamiky \mathbf{F}_s nepředpokládáme změny v čase, bude tedy nadále uváděna bez časové závislosti. Vzhledem k tomu, že poruchy v modelu jsou uvažované jako bílé šumy, je kovarianční matice poruch diagonální

$$\mathbf{Q}_s = \text{cov}[\xi(t_1), \xi(t_2)] = \delta(t_1 - t_2) \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix},\tag{3.20}$$

kde q_1 a q_2 představují spektrální hustoty jednotlivých šumů.

3.2 Diskretizace stavového modelu

Pro potřeby numerických simulací a pro aplikaci metod odhadu vlastností poruch je potřeba spojitý model převést do diskrétní podoby, jelikož simulační i reálná data jsou měřena diskrétně. Pro diskrétní modely platí, že spojitá časová osa je rozdělena podle známé vzorkovací periody na jednotlivé časové okamžiky

$$t_k = kT_s, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.\tag{3.21}$$

T_s je známá vzorkovací perioda a k je krok, který vyjadřuje počet uběhlých period a n je celkový počet period.

Uvažujeme tedy převod

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}_s\mathbf{x}(t) + \xi(t) \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_k + \xi_k,\tag{3.22}$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots, n$ značí krok a matice \mathbf{F} je matice dynamiky diskrétního modelu určená vzorkovací periodou.

Nejprve je potřeba diskretizovat matici \mathbf{F}_s . Vzhledem k tomu, že se jedná o matici dynamiky, u které se nepředpokládají změny v čase, je její diskrétní verze dána maticovou exponenciálou

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{F}_s T_s}. \quad (3.23)$$

Výpočet maticové exponenciály lze rozepsat jako součet

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}_{n_x} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 t^2 \cdots + \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n t^n + \cdots, \quad (3.24)$$

kde \mathbf{A} je diskretizovaná matice dynamiky a \mathbf{I}_{n_x} je identická matice, jejíž dimenze odpovídá počtu stavů. Za \mathbf{A} dosadíme matici dynamiky modelu \mathbf{F}_s z (3.19). Vzhledem k podobě matice \mathbf{F}_s se výpočet zjednoduší na

$$\mathbf{F} = e^{\mathbf{F}_s T_s} = \mathbf{I}_2 + \mathbf{F}_s T_s = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

jelikož platí, že všechny násobky matice $\prod_{i=1}^n \mathbf{F}_s$ jsou pro $n \geq 2$ rovny matici samých nul.

Pro kompletní odvození diskrétního modelu zbývá zjištění vlastností diskrétního šumu. Diskrétní šum lze popsat jako

$$\xi_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\mathbf{F}(t_k - \tau)} \xi_s(\tau) d\tau, \quad (3.26)$$

Diskrétní šum je tedy funkcí šumu spojitého a matice dynamiky.

U diskrétního šumu je potřeba odvodit střední hodnotu a kovarianční matici z důvodu budoucích simulací a pro možnost odhadu hodnot v kovarianční matici. Tyto dva parametry dostačují k popisu diskrétního šumu, protože operace integrace je lineární operátor a tak je diskrétní šum Gaussovský a bílý.

Střední hodnota diskrétního šumu je

$$\mu_k = E[\xi_k] = \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\mathbf{F}(t_k - \tau)} E[\xi_s(\tau)] d\tau, \quad (3.27)$$

kde $E[\xi_s(\tau)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je známý vektor středních hodnot spojitých šumů. Po dosažení je tedy střední hodnota diskretizovaného šumu

$$\mu_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Kovarianční matice šumu je dána vzhledem k nulové střední hodnotě šumů jako

$$Q_k = cov(\xi_k \xi_k^T), \quad (3.29)$$

$$= E[\xi_k \xi_k^T]. \quad (3.30)$$

3. Model generátoru časového signálu

Tento vztah je možné s využitím (3.26) rozepsat do podoby

$$Q_k = E \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\mathbf{F}(t_k-\tau)} \xi_s(\tau) \xi_s^T(\tau') \left(e^{\mathbf{F}(t_k-\tau')} \right)^T d\tau d\tau' \right]. \quad (3.31)$$

Můžeme přesunout operátor střední hodnoty přímo k členu $\xi_s(\tau) \xi_s^T(\tau')$. Tato střední hodnota je známá jako

$$E[\xi_s(\tau) \xi_s^T(\tau')] = Q_s \delta(\tau' - \tau), \quad (3.32)$$

kde Q_s je kovarianční matice spojitého šumu (3.20) a $\delta(\tau' - \tau)$ je Kroneckerova funkce, která vyjadřuje, že šum je časově nezávislý a je definována jako

$$\delta(\tau' - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } \tau' = \tau \\ 0 & \text{je-li } \tau' \neq \tau \end{cases} \quad (3.33)$$

Po dosazení do původní rovnice získáme

$$Q_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\mathbf{F}(t_k-\tau)} Q_s \delta(\tau' - \tau) \left(e^{\mathbf{F}(t_k-\tau')} \right)^T d\tau d\tau', \quad (3.34)$$

$$= \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{\mathbf{F}(t_k-\tau)} Q_s \left(e^{\mathbf{F}(t_k-\tau)} \right)^T d\tau, \quad (3.35)$$

jelikož integrál Kroneckerovy funkce je roven 1. Po dosazení známých matic \mathbf{F} a Q_s získáme rovnici ve tvaru

$$Q_k = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} \end{bmatrix} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \begin{bmatrix} q_1 + q_2(t_k - \tau)^2 & q_2(t_k - \tau) \\ q_2(t_k - \tau) & q_2 \end{bmatrix} d\tau. \quad (3.36)$$

Abychom získali výslednou podobu kovarianční matice, musíme integrovat všechny členy z matice v (3.36). První člen výsledné kovarianční matice vypočteme jako

$$Q_{1,1} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} q_1 + q_2(t_k - \tau)^2 d\tau, \quad (3.37)$$

$$= \left[q_1\tau + q_2 \left(t_k^2\tau - t_k\tau^2 + \frac{1}{3}\tau^3 \right) \right]_{t_{k-1}}^{t_k}, \quad (3.38)$$

$$= q_1(t_k - t_{k-1}) + q_2 \left(t_k^3 - t_{k-1}^3 + \frac{1}{3}t_k^3 - t_k^2 t_{k-1} + t_k t_{k-1}^2 - \frac{1}{3}t_{k-1}^3 \right). \quad (3.39)$$

Z (3.21) víme, že spojitý čas lze rozdělit na diskrétní časové okamžiky a je tak možné napsat, že $t_k = t_{k-1} + T_s$. S využitím této substituce můžeme dále upravit rovnici (3.39) a získat konečný tvar prvního členu kovarianční matice diskretizovaného

šumu

$$\begin{aligned}
 Q_{1,1} &= q_1 T_s + q_2 \left(\frac{1}{3} (t_{k-1} + T_s)^3 - (t_{k-1} + T_s)^2 t_{k-1} + (t_{k-1} + T_s) t_{k-1}^2 - \frac{1}{3} t_{k-1}^3 \right), \\
 &= q_1 T_s + q_2 \left(\frac{1}{3} t_{k-1}^3 + t_{k-1}^2 T_s + t_{k-1} T_s^2 + \frac{1}{3} T_s^3 - t_{k-1}^3 - 2 t_{k-1}^2 T_s - t_{k-1} T_s^2 + \right. \\
 &\quad \left. + t_{k-1}^3 + t_{k-1}^2 T_s - \frac{1}{3} t_{k-1}^3 \right), \\
 &= q_1 T_s + q_2 \frac{T_s^3}{3}.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Druhý a třetí člen kovarianční matice jsou totožné $Q_{1,2} = Q_{2,1}$ a tak je lze určit jediným výpočtem

$$\begin{aligned}
 Q_{1,2} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} q_2 (t_k - \tau) d\tau, \\
 &= q_2 \left[t_k \tau - \frac{1}{2} \tau^2 \right]_{t_{k-1}}^{t_k}, \\
 &= q_2 \left(t_k^2 - \frac{1}{2} t_k^2 - t_k t_{k-1} + \frac{1}{2} t_{k-1}^2 \right).
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Opět využijeme zavedené vzorkovací periody a dosadíme

$$\begin{aligned}
 Q_{1,2} &= q_2 \left(\frac{1}{2} (t_{k-1} + T_s)^2 - t_{k-1}^2 - t_{k-1} T_s + \frac{1}{2} t_{k-1}^2 \right), \\
 &= q_2 \frac{T_s^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

A poslední člen $Q_{2,2}$ určíme jako

$$\begin{aligned}
 Q_{2,2} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} q_2 d\tau, \\
 &= q_2 (t_k - t_{k-1}), \\
 &= q_2 T_s.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Nyní stačí pouze poskládat známé členy a získáme podobu kovarianční matice šumů diskretizovaného modelu jako

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 T_s + q_2 \frac{T_s^3}{3} & q_2 \frac{T_s^2}{2} \\ q_2 \frac{T_s^2}{2} & q_2 T_s \end{bmatrix}, \tag{3.44}$$

kde časový index k lze vynechat, jelikož tato kovarianční matice nezávisí na čase.

Výsledný diskretizovaný model má podobu

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{z}_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k,\end{aligned}\tag{3.45}$$

kde \mathbf{z}_k je měření, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ je matice měření a \mathbf{v}_k je šum měření s variancí R . Tato podoba matice měření určuje, že měření z_k odpovídá reálnému měření fázového posuvu $x(t)$ (3.5). Normalizovaná frekvenční odchylka (3.7) se jako měření nevyužívá, jelikož její hodnoty lze v realitě pouze odhadovat (3.10) a jsou funkcí měřitelného fázového posuvu.

Metoda rozdílu měření

4

Metoda rozdílu měření [Kos22; KDS23] (dále jako MDM, z anglického Measurement difference method) je metoda určená pro odhad parametrů popisujících šumy ve stochastických procesech. Metoda využívá statistickou analýzu rozdílu reálného a predikovaného měření procesu, která navazuje na celou řadu starších přístupů k odhadování vlastností šumů ve stochastických systémech [Dun+17].

V následujících kapitolách budou představeny rovnice používané samotnou metodou, určen postup výpočtu predikce měření a nakonec se představí postup výpočtu odhadu kovarianční matice šumů stochastického modelu.

4.1 Predikce a rozdíl měření

V této kapitole je popsán způsob výpočtu neznámého vektoru stavu systému, následně je ukázána predikce budoucích výstupů a nakonec rozdíl mezi měřením a jeho predikcí.

Aby bylo možné určit predikci výstupu systému, je nejprve nutné určit neznámý stav systému. Nyní si ukážeme jednoduchý příklad, kde matice \mathbf{H} má plnou sloupcovou hodnotu a můžeme vyjádřit stavy systému z rovnice měření (2.2) s použitím metody nejmenších čtverců

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{z}_k - \mathbf{H}^\dagger \mathbf{v}_k, \quad (4.1)$$

kde \mathbf{H}^\dagger značí pseudoinverzi matice \mathbf{H} a je definována jako $\mathbf{H}^\dagger = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$.

Dosazením za \mathbf{x}_k z (4.1) do rovnice měření (2.1) získáme

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{z}_k - \mathbf{F} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{v}_k + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k. \quad (4.2)$$

Tímto způsobem je možné určit budoucí hodnoty stavů systému z minulé hodnoty měření za předpokladu znalosti hodnot šumů v okamžiku k .

Dosazením predikce stavu do rovnice měření (2.2) a roznásobením získáme

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{z}_k - \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{v}_k + \mathbf{H} \mathbf{u}_k + \mathbf{H} \mathbf{w}_k + \mathbf{v}_{k+1}. \quad (4.3)$$

Vidíme, že nyní výpočet budoucí hodnoty měření závisí na minulém měření \mathbf{z}_k , vstupu \mathbf{u}_k a na hodnotách náhodných šumů.

Tuto rovnici můžeme přepsat do zkrácené podoby

$$\mathbf{z}_{k+1} = \widehat{\mathbf{z}}_{k+1} + \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}, \quad (4.4)$$

kde $\widehat{\mathbf{z}}_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{H}^\dagger \mathbf{z}_k + \mathbf{H}\mathbf{u}_k$ je predikce měření a $\tilde{\mathbf{z}}_{k+1} = -\mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{H}^\dagger \mathbf{v}_k + \mathbf{H}\mathbf{w}_k + \mathbf{v}_{k+1}$ je chyba predikce měření, kterou je možné vypočítat pomocí vztahu

$$\tilde{\mathbf{z}}_k = \mathbf{z}_k - \widehat{\mathbf{z}}_k. \quad (4.5)$$

Tato rovnice je základem MDM, jelikož umožňuje výpočet rozdílů měření, který v sobě obsahuje informaci o vlastnostech šumů systému, pouze ze známých hodnot měření a vstupů.

Protože rovnice (4.5) obsahuje deterministickou složku v podobě $\widehat{\mathbf{z}}_k$ a zároveň i stochastickou složku \mathbf{z}_k , ve které je obsažen šum měření \mathbf{v}_k i šum stavu v \mathbf{x}_{k-1} , jedná se o stochastický proces.

Pokud matice \mathbf{H} nemá plnou sloupcovou hodnotu, ale systém je pozorovatelný neboli když má jeho matice pozorovatelnosti \mathcal{O}^{n_z} (2.3) plnou hodnotu, definujeme rozšířený vektor měření

$$\mathbf{Z}_k^L = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} \\ \mathbf{z}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+L-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Ln_z}, \text{ pro } k = 0, 1, \dots, \tau + L - 1, \quad (4.6)$$

pro konečné celé $L \geq 1$. Tento vektor obsahuje posloupnost L po sobě jdoucích měření. Pro budoucí využití MDM je potřeba z rozšířeného vektoru měření \mathbf{Z}_k^L určit N -krokovou predikci měření $\widehat{\mathbf{Z}}_k^{L,N}$. Prvním krokem je způsob výpočtu samotného rozšířeného vektoru měření

$$\mathbf{Z}_k^L = \mathcal{O}^L \mathbf{x}_k + \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} + \mathbf{V}_k^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1}, \quad (4.7)$$

kde \mathcal{O}^L je matice pozorovatelnosti z rovnice (2.3), matice $\Gamma^{L-1} \in \mathbb{R}^{Ln_z \times (L-1)n_x}$ je definována jako

$$\Gamma^{L-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \dots & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} \\ \mathbf{H} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \dots & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} \\ \mathbf{H}\mathbf{F} & \mathbf{H} & \dots & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}\mathcal{F}^{L-2} & \mathbf{H}\mathcal{F}^{L-3} & \dots & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

kde $\mathcal{F}^j = \prod_{i=1}^j \mathbf{F}$, $\mathbf{0}_{i \times j}$ je matice samých nul o rozměrech $i \times j$ a vektory $\mathbf{W}_k^{L-1} \in \mathbb{R}^{(L-1)n_x}$, $\mathbf{V}_k^L \in \mathbb{R}^{Ln_z}$ a $\mathbf{U}_k^{L-1} \in \mathbb{R}^{(L-1)n_x}$ jsou určeny jako

$$\mathbf{W}_k^{L-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{w}_{k+1} \\ \mathbf{w}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{k+L-2} \end{bmatrix}, \mathbf{V}_k^L = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_{k+1} \\ \mathbf{v}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{k+L-1} \end{bmatrix}, \mathbf{U}_k^{L-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{u}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+L-2} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Ukázka platnosti (4.7)

Platnost rovnice je zde ukázána na odvození prvních 3 měření, neboli $L = 3$, čemuž odpovídají měření z_k , z_{k+1} a z_{k+2} . Nejprve tedy začneme se známou rovnicí měření

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k.$$

Rovnice pro výpočet \mathbf{z}_{k+1} je složitější, jelikož je nutné využít i rovnici dynamiky systému (2.1) pro výpočet hodnoty stavu \mathbf{x}_{k+1}

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}.$$

Po dosazení (2.1) získáme

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{H}\mathbf{u}_k + \mathbf{H}\mathbf{w}_k + \mathbf{v}_{k+1}.$$

Pro z_{k+2} postupujeme obdobně, nejprve vyjdeme z rovnice

$$\mathbf{z}_{k+2} = \mathbf{H}\mathbf{x}_{k+2} + \mathbf{v}_{k+2},$$

do které dosadíme za x_{k+2} a získáme

$$\mathbf{z}_{k+2} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{H}\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{H}\mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+2}.$$

Finální tvar rovnice dostaneme dosazením z (2.1) za x_{k+1}

$$\mathbf{z}_{k+2} = \mathbf{H}\mathcal{F}^2\mathbf{x}_k + \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{u}_k + \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{w}_k + \mathbf{H}\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{H}\mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+2}.$$

Po přepsání do maticové podoby vypadá výsledná rovnice následovně

$$\mathbf{Z}_k^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} \\ \mathbf{z}_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \mathbf{HF}^2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{H} & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{HF} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{W}_k^2 + \mathbf{V}_k^3 + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{H} & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{HF} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{U}_k^2,$$

Obdobným způsobem lze odvodit podobu výpočtu \mathbf{Z}_k^L pro všechny možné hodnoty L .

Dalším krokem potřebným pro výpočet rozdílů měření je výpočet stavu \mathbf{x}_k s využitím rozšířeného vektoru měření \mathbf{Z}_k^L . Výchozí rovnicí je rovnice výpočtu \mathbf{Z}_k^L (4.7), jejíž úpravou je možné vyčíslit stav systému. Rovnice pro výpočet stavu pak tedy vypadá následovně

$$\mathbf{x}_k = (\mathcal{O}^L)^\dagger \mathbf{Z}_k^L - (\mathcal{O}^L)^\dagger \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1} - (\mathcal{O}^L)^\dagger \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} - (\mathcal{O}^L)^\dagger \mathbf{V}_k^L. \quad (4.10)$$

S využitím známé hodnoty stavu je možné vypočítat predikci budoucích stavů systému. Tato hodnota se dá odvodit z rovnice dynamiky systému (2.1) jako

$$\mathbf{x}_k = \mathcal{F}^N \mathbf{x}_{k-N} + \Xi^N \mathbf{U}_{k-N}^N + \Xi^N \mathbf{W}_{k-N}^N, \quad (4.11)$$

pro $k = 1, 2, \dots, n$ a $N \geq 1$, kde $\Xi^N = [\mathcal{F}^{N-1}, \mathcal{F}^{N-2}, \dots, \mathbf{F}, \mathbf{I}_{n_x}] \in \mathbb{R}^{n_x \times N n_x}$, kde \mathbf{I}_i je jednotková matice o rozměrech $i \times i$. Po dosazení za \mathbf{x}_{k-N} z rovnice (4.10) získáme

$$\mathbf{x}_k = \mathcal{F}^N (\mathcal{O}^L)^\dagger (\mathbf{Z}_{k-N}^L - \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1} - \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} - \mathbf{V}_{k-N}^L) + \Xi^N \mathbf{U}_{k-N}^N + \Xi^N \mathbf{W}_{k-N}^N. \quad (4.12)$$

Se známými hodnotami predikce stavů systému je možné vypočítat budoucí měření $\mathbf{Z}_k^{L,N}$ s využitím rovnice (4.7), do které místo \mathbf{x}_k dosadíme z rovnice (4.12) a získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_k^{L,N} = & \mathcal{O}^L \mathcal{F}^N (\mathcal{O}^L)^\dagger (\mathbf{Z}_{k-N}^L - \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1} - \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} - \mathbf{V}_{k-N}^L) + \\ & + \mathcal{O}^L \Xi^N \mathbf{U}_{k-N}^N + \mathcal{O}^L \Xi^N \mathbf{W}_{k-N}^N + \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1} + \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} + \mathbf{V}_k^L, \end{aligned} \quad (4.13)$$

kde $\mathbf{Z}_k^{L,N} \in \mathbb{R}^{L n_z}$ je vektor budoucích měření. Nyní můžeme definovat predikci měření $\widehat{\mathbf{Z}}_k^{L,N}$ jako

$$\widehat{\mathbf{Z}}_k^{L,N} = \mathcal{O}^L \mathcal{F}^N (\mathcal{O}^L)^\dagger (\mathbf{Z}_{k-N}^L - \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1}) + \mathcal{O}^L \Xi^N \mathbf{U}_{k-N}^N + \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1}, \quad (4.14)$$

a chybu predikce měření $\widetilde{\mathbf{Z}}_k$ jako

$$\widetilde{\mathbf{Z}}_k = \mathcal{O}^L \mathcal{F}^N (\mathcal{O}^L)^\dagger (-\Gamma^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} - \mathbf{V}_{k-N}^L) + \mathcal{O}^L \Xi^N \mathbf{W}_{k-N}^N + \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} + \mathbf{V}_k^L. \quad (4.15)$$

Dosazením z (4.14) a (4.15) do rovnice (4.13) a vyjádřením $\widetilde{\mathbf{Z}}_k$ se definuje stochastický proces chyby predikce měření jako

$$\widetilde{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{Z}_k - \widehat{\mathbf{Z}}_k^{L,N}, \quad (4.16)$$

kde $\widetilde{\mathbf{Z}}_k \in \mathbb{R}^{L n_z}$ je rozdíl mezi reálnými měřeními a jeho predikovanými hodnotami.

4.2 Základní myšlenka MDM

V této kapitole je dokončeno odvozování rovnic používaných v MDM a ukázán postup využití metody pro odhad prvků kovarianční matice šumů stochastického systému.

Z předchozí kapitoly je známa rovnice výpočtu chyby predikce měření (4.16), tuto rovnici lze přepsat do podoby

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{A}\mathcal{E}_k, \quad (4.17)$$

kde vektor $\mathcal{E}_k \in \mathbb{R}^{(P-1)n_x + Pn_z}$ a matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{Ln_z \times (P-1)n_x + Pn_z}$ pro $P = L + N$ jsou definovány jako

$$\mathcal{E}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^w & \mathbf{A}^v \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

kde matice $\mathbf{A}^w \in \mathbb{R}^{Ln_z \times (P-1)n_x}$ a $\mathbf{A}^v \in \mathbb{R}^{Ln_z \times Pn_z}$ jsou definovány ve tvaru

$$\mathbf{A}^w = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{Ln_z} & \mathbf{I}_{Ln_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathcal{O}^L \boldsymbol{\Xi}^N, \boldsymbol{\Gamma}^{L-1}] \\ [-\mathcal{O}^L \mathcal{F}^N (\mathcal{O}^L)^\dagger \boldsymbol{\Gamma}^{L-1}, \mathbf{0}_{Ln_z \times Nn_x}] \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{A}^v = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{Ln_z} & \mathbf{I}_{Ln_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{0}_{Ln_z \times Nn_z}, \mathbf{I}_{Ln_z}] \\ [-\mathcal{O}^L \mathcal{F}^N (\mathcal{O}^L)^\dagger, \mathbf{0}_{Ln_z \times Nn_z}] \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Tento předpis ovšem neumožňuje výpočet chyby predikce, protože posloupnosti šumů \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} a \mathbf{V}_{k-N}^P nejsou známé ani měřitelné. Z rovnic (4.17) a (4.14) víme, že chybu predikce je možné určit z posloupností měření a vstupů. V MDM lze stejný výsledek určit pomocí

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{A} \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{Z}_{k-N}^P \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Ukázka platnosti rovnice (4.22)

Nejprve zapišme rovnici (4.22), tak že místo matice \mathbf{A} (4.19) rozepíšeme její složky

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^w & \mathbf{A}^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{Z}_{k-N}^P \end{bmatrix}.$$

Z vlastností maticového násobení platí, že můžeme upravit tuto rovnici do tvaru

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{A}^v \mathbf{Z}_{k-N}^P - \mathbf{A}^w \mathbf{U}_{k-N}^{P-1}.$$

Nyní se zaměříme na člen $\mathbf{A}^v \mathbf{Z}_{k-N}^P$, pokud roznásobíme matici \mathbf{A}^v (4.21) s vektorem měření, dostaneme

$$\mathbf{A}^v \mathbf{Z}_{k-N}^P = \mathbf{Z}_k^L - \mathcal{O}^L \mathcal{F}^N \left(\mathcal{O}^L \right)^\dagger \mathbf{Z}_{k-N}^L.$$

Tuto rovnici můžeme dále upravovat s pomocí rovnic (4.7) a (4.11) do následující podoby

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^v \mathbf{Z}_k^P &= \mathcal{O}^L \mathbf{x}_k + \Gamma^{L-1} \mathbf{w}_k^{L-1} + \mathbf{v}_k^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{u}_k^{L-1} \\ &\quad - \mathcal{O}^L \mathcal{F}^N \left(\mathcal{O}^L \right)^\dagger \left(\mathcal{O}^L \mathbf{x}_{k-N} + \Gamma^{L-1} \mathbf{w}_{k-N}^{L-1} + \mathbf{v}_{k-N}^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{u}_{k-N}^{L-1} \right) \\ &= \mathcal{O}^L \mathbf{x}_k + \Gamma^{L-1} \mathbf{w}_k^{L-1} + \mathbf{v}_k^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{u}_k^{L-1} - \mathcal{O}^L \mathcal{F}^N \mathbf{x}_{k-N} \\ &\quad - \mathcal{O}^L \mathcal{F}^N \left(\mathcal{O}^L \right)^\dagger \left(\Gamma^{L-1} \mathbf{w}_{k-N}^{L-1} + \mathbf{v}_{k-N}^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{u}_{k-N}^{L-1} \right) \\ &= \mathcal{O}^L \mathbf{x}_k + \Gamma^{L-1} \mathbf{w}_k^{L-1} + \mathbf{v}_k^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{u}_k^{L-1} \\ &\quad - \mathcal{O}^L \mathcal{F}^{N-1} \left(\mathbf{x}_{k-N+1} - \mathbf{w}_{k-N} - \mathbf{u}_{k-N} \right) \\ &\quad - \mathcal{O}^L \mathcal{F}^N \left(\mathcal{O}^L \right)^\dagger \left(\Gamma^{L-1} \mathbf{w}_{k-N}^{L-1} + \mathbf{v}_{k-N}^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{u}_{k-N}^{L-1} \right) \\ &= \mathcal{O}^L \mathbf{x}_k + \Gamma^{L-1} \mathbf{w}_k^{L-1} + \mathbf{v}_k^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{u}_k^{L-1} \\ &\quad - \mathcal{O}^L \mathbf{x}_k - \mathcal{O}^L \left(-\mathbf{w}_{k-1} - \mathbf{F} \mathbf{w}_{k-2} - \dots - \mathcal{F}^{N-1} \mathbf{w}_{k-N} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{F} \mathbf{u}_{k-2} - \dots - \mathcal{F}^{N-1} \mathbf{u}_{k-N} \right) \\ &\quad - \mathcal{O}^L \mathcal{F}^N \left(\mathcal{O}^L \right)^\dagger \left(\Gamma^{L-1} \mathbf{w}_{k-N}^{L-1} + \mathbf{v}_{k-N}^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{u}_{k-N}^{L-1} \right). \end{aligned}$$

Vidíme, že oba členy obsahující stav \mathbf{x}_k se navzájem odečtou a zůstane rovnice obsahující pouze šumy stavů a měření a vstupy systému. Tuto rovnici lze zkráceně zapsat jako

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^v \mathbf{z}_k^P &= \mathcal{O}^L \boldsymbol{\Xi}^N \mathbf{W}_{k-N}^N + \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} - \mathcal{O}^L \mathcal{F}^N \left(\mathcal{O}^L \right)^\dagger \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} \\ &\quad + \mathbf{V}_k^L - \mathcal{O}^L \mathcal{F}^N \left(\mathcal{O}^L \right)^\dagger \mathbf{V}_{k-N}^L \\ &\quad + \mathcal{O}^L \boldsymbol{\Xi}^N \mathbf{U}_{k-N}^N + \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1} - \mathcal{O}^L \mathcal{F}^N \left(\mathcal{O}^L \right)^\dagger \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1} \\ &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix} + \mathbf{A}^w \mathbf{U}_{k-N}^P. \end{aligned}$$

Z této rovnice lze jednoduchou úpravou ukázat, že platí

$$\tilde{\mathbf{z}}_k = \mathbf{A} \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{z}_{k-N}^P \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix},$$

neboli, že rovnice (4.22) a (4.17) jsou ekvivalentní.

Nyní se vrátíme zpět k rovnici (4.17), pokud obě strany rovnice umocníme na druhou získáme

$$\tilde{\mathbf{z}}_k \tilde{\mathbf{z}}_k^T = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix} \left[\left(\mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \right)^T \quad \left(\mathbf{V}_{k-N}^P \right)^T \right] \mathbf{A}^T \quad (4.23)$$

Po roznásobení získáme

$$\tilde{\mathbf{z}}_k \tilde{\mathbf{z}}_k^T = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \left(\mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \right)^T & \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \left(\mathbf{V}_{k-N}^P \right)^T \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \left(\mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \right)^T & \mathbf{V}_{k-N}^P \left(\mathbf{V}_{k-N}^P \right)^T \end{bmatrix} \mathbf{A}^T. \quad (4.24)$$

Pokud aplikujeme operátor střední hodnoty na danou rovnici, získáme

$$E \left[\tilde{\mathbf{z}}_k \tilde{\mathbf{z}}_k^T \right] = \mathbf{A} \left(E \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \left(\mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \right)^T & \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \left(\mathbf{V}_{k-N}^P \right)^T \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \left(\mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \right)^T & \mathbf{V}_{k-N}^P \left(\mathbf{V}_{k-N}^P \right)^T \end{bmatrix} \right) \mathbf{A}^T. \quad (4.25)$$

Na pravé straně rovnice vidíme, že matice uvnitř střední hodnoty odpovídá kovarianční matici šumů samotného systému. V tomto případě se ovšem jedná jen o výběrovou kovarianční matici, jelikož máme k dispozici pouze omezený počet měření a tak nelze přímo tuto kovarianční matici nahradit kovarianční maticí šumů samotného systému. Nyní zadefinujeme nový proces ve tvaru

$$E \left[\tilde{\mathbf{z}}_k \tilde{\mathbf{z}}_k^T \right] = \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T, \quad (4.26)$$

kde matice $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{(P-1)n_x + Pn_z \times (P-1)n_x + Pn_z}$ je kovarianční matice definována jako

$$\mathbf{S} = \text{BlkDiag} \left(\mathbf{I}_{P-1} \otimes \mathbf{Q}, \mathbf{I}_P \otimes \mathbf{R} \right), \quad (4.27)$$

kde \mathbf{Q} je kovarianční matice šumů stavu a \mathbf{R} je kovarianční matice šumu měření a operátor \otimes značí Kroneckerův součin a kde $\text{BlkDiag}()$ je funkce vytvářející blokově diagonální matici z bloků ve svém argumentu. Kovarianční matice \mathbf{S} je tedy blokově diagonální matice, na jejíž diagonále se nachází $P-1$ bloků matice \mathbf{Q} a P bloků matice \mathbf{R} .

Pokud tedy budeme uvažovat, že v rovnici (4.26) použijeme na levé straně známý člen $\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T$ jako odhad střední hodnoty, dopustíme se chyby. Když přidáme vyjádření této chyby do rovnice, získáme

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T = \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T + \mathcal{V}_k, \quad (4.28)$$

kde matice \mathcal{V}_k je definována jako

$$\mathcal{V}_k = \mathbf{A} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} (\mathbf{W}_{k-N}^{P-1})^T & \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} (\mathbf{V}_{k-N}^P)^T \\ \mathbf{V}_{k-N}^P (\mathbf{W}_{k-N}^{P-1})^T & \mathbf{V}_{k-N}^P (\mathbf{V}_{k-N}^P)^T \end{bmatrix} - \mathbf{S} \right) \mathbf{A}^T, \quad (4.29)$$

Analýzou chyby \mathcal{V}_k zjistíme, že

$$\begin{aligned} E[\mathcal{V}_k] &= E \left[\mathbf{A} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} (\mathbf{W}_{k-N}^{P-1})^T & \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} (\mathbf{V}_{k-N}^P)^T \\ \mathbf{V}_{k-N}^P (\mathbf{W}_{k-N}^{P-1})^T & \mathbf{V}_{k-N}^P (\mathbf{V}_{k-N}^P)^T \end{bmatrix} - \mathbf{S} \right) \mathbf{A}^T \right], \\ &= \mathbf{A} (\mathbf{S} - \mathbf{S}) \mathbf{A}^T, \\ &= \mathbf{0}_{(Ln_z)^2 \times 1}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Chyba \mathcal{V}_k má tedy pro všechny možné k nulovou střední hodnotu.

Aby bylo možné dále pracovat s rovnicí (4.28), převedme ji nyní do vektorizované podoby

$$\left(\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T \right)_{vec} = \left(\mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T + \mathcal{V}_k \right)_{vec}, \quad (4.31)$$

kde index *vec* znamená převedení matice do sloupcového vektoru. Protože vektorizace je lineární operace, je možné upravit rovnici do tvaru

$$\left(\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T \right)_{vec} = \left(\mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T \right)_{vec} + \left(\mathcal{V}_k \right)_{vec}. \quad (4.32)$$

Na člen $\left(\mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T \right)_{vec}$ můžeme využít jednu z vlastností Kroneckerova součinu

$$\left(\mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D}^T \right)_{vec} = \left(\mathbf{D} \otimes \mathbf{B} \right) \mathbf{C}_{vec}, \quad (4.33)$$

kde \mathbf{C} , \mathbf{B} a \mathbf{D} jsou dané matice. Po využití tohoto pravidla se změnění (4.32) na

$$\left(\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T \right)_{vec} = \left(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \right) \mathbf{S}_{vec} + \left(\mathcal{V}_k \right)_{vec}. \quad (4.34)$$

Cílem MDM je odhadnout prvky kovarianční matice \mathbf{S} (4.27). Povšimněme si, že většinu prvků této matice tvoří nuly a na zbylých pozicích se opakuje v daném

tvaru známý počet hledaných parametrů. Tato podoba není vhodná pro následný odhad, jelikož maximální možný počet odhadnutých hodnot závisí na dimenzi stavů a měření, jak uvádí Kost [Kos22], v případě modelu hodinového šumu se jedná o maximální počet tří odhadovaných prvků. Abychom dodrželi tento počet odhadovaných prvků, je nutné nejprve vytvořit vektor unikátních prvků \mathcal{S}_{vec}^u , pro který platí

$$\mathcal{S}_{vec} = \Psi \mathcal{S}_{vec}^u, \quad (4.35)$$

kde $\mathcal{S}_{vec}^u \in \mathbb{R}^{n_u}$, n_u je počet unikátních prvků a $\Psi \in \mathbb{R}^{n_{Svec} \times n_{Q^u}}$ je unifikací matice obsahující pouze nuly a jedničky, jejíž konstrukce bude popsána v dalších kapitolách na modelu generátoru časového signálu.

Dosazením za \mathcal{S}_{vec} do (4.34) získáme

$$\left(\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T \right)_{vec} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \mathcal{S}_{vec}^u + (\mathcal{V}_k)_{vec}. \quad (4.36)$$

Tuto rovnici můžeme využít opakovaně pro různé rozdíly měření $\tilde{\mathbf{Z}}_k$, neboli v maticové podobě

$$\begin{bmatrix} \left(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T \right)_{vec} \\ \left(\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T \right)_{vec} \\ \vdots \\ \left(\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T \right)_{vec} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \\ \vdots \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \end{bmatrix} \mathcal{S}_{vec}^u + \begin{bmatrix} (\mathcal{V}_1)_{vec} \\ (\mathcal{V}_2)_{vec} \\ \vdots \\ (\mathcal{V}_n)_{vec} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Pokud matice $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi$ má plnou sloupcovou hodnost, můžeme odhadnout prvky vektoru \mathcal{S}_{vec}^u s pomocí metody nejmenších čtverců jako

$$\widehat{\mathcal{S}}_{vec}^u = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \\ \vdots \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \left(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T \right)_{vec} \\ \left(\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T \right)_{vec} \\ \vdots \\ \left(\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T \right)_{vec} \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Pokud rozepíšeme operátor pseudoinverze, získáme

$$\widehat{\mathcal{S}}_{vec}^u = \left(\begin{bmatrix} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \\ \vdots \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \\ \vdots \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \\ \vdots \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \left(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T \right)_{vec} \\ \left(\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T \right)_{vec} \\ \vdots \\ \left(\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T \right)_{vec} \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

kde díky časové nezávislosti $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi$ můžeme upravit část rovnice

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ \vdots \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T)_{vec} \\ (\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T)_{vec} \\ \vdots \\ (\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T)_{vec} \end{bmatrix} = ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi)^T \left[(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T)_{vec} + (\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T)_{vec} + \dots + (\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T)_{vec} \right]. \quad (4.40)$$

Zároveň můžeme upravit i člen v inverzi

$$\left(\begin{bmatrix} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ \vdots \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ \vdots \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{n} \left[((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi)^T (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \right]^{-1}, \quad (4.41)$$

kde n značí počet dostupných rozdílů měření $\tilde{\mathbf{Z}}_i$. Pokud nyní využijeme obě tyto úpravy do původní rovnice (4.39), dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_{vec}^u &= \left[((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi)^T (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \right]^{-1} ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi)^T \\ &\quad \cdot \frac{1}{n} \left[(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T)_{vec} + (\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T)_{vec} + \dots + (\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T)_{vec} \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$= ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi)^\dagger \frac{1}{n} \left[(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T)_{vec} + (\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T)_{vec} + \dots + (\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T)_{vec} \right], \quad (4.43)$$

kde výraz $\frac{1}{n} \left[(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T)_{vec} + (\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T)_{vec} + \dots + (\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T)_{vec} \right]$ představuje odhad korelace $\tilde{\mathbf{Z}}_k$. Pomocí této rovnice je možné odhadnout prvky kovarianční matice šumů dříve definovaného stochastického systému.

V této kapitole je popsán způsob využití MDM pro odhad prvků kovarianční matice šumů generátoru časového signálu. Následně budou provedeny simulace s využitím programu MATLAB [Mat21] za účelem ověření kvality odhadů.

Nejprve je vhodné upravit obecné rovnice MDM. Jelikož předpokládáme, že generátory časového signálu nemají vstupní signál, můžeme upravit rovnici (4.22), která slouží pro výpočet rozdílů měření, na

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{Z}}_k &= [\mathbf{A}^w \quad \mathbf{A}^v] \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(P-1)n_x} \\ \mathbf{Z}_{k-N}^P \end{bmatrix}, \\ &= \mathbf{A}^v \mathbf{Z}_{k-N}^P.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Předpokládáme, že generátor časového signálu odpovídá definovanému modelu (3.45). V tom případě je známá podoba kovariančních matic stavového šumu (3.44) a šumu měření R , kde unikátní prvky hledaných kovariančních matic šumů jsou

$$\begin{bmatrix} q_1 T_s + \frac{T_s^3}{3} \\ q_2 \frac{T_s^2}{2} \\ q_2 T_s \\ R \end{bmatrix}.\tag{5.2}$$

Na základě dostupných publikací se ukazuje, že pro model uvažovaný v této práci jako generátor časového signálu, který obsahuje dva stavy a jedno měření, je možné odhadnout pouze 3 unikátní prvky hledaných kovariančních matic šumů [AR18; KDS21].

5.1 Odhad s aproximací kovarianční matice šumů stavu

V této kapitole je popsán způsob odhadu parametrů šumů modelu s využitím známých vlastností generátoru časového signálu a aproximace matice \mathbf{Q} .

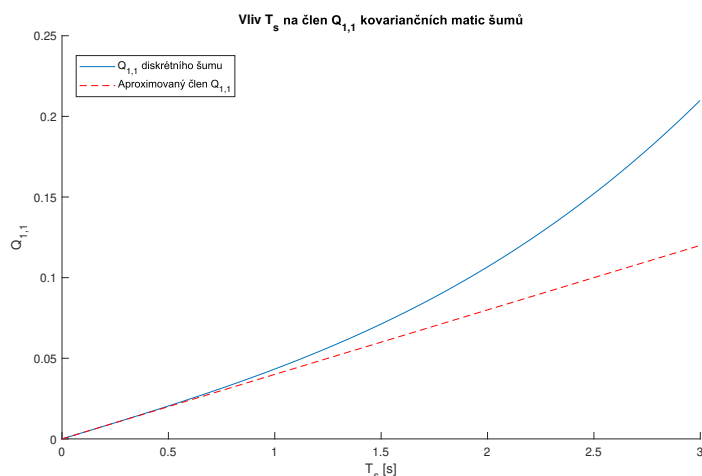
Jelikož kovarianční matice \mathcal{S} (4.27) obsahuje složené členy $q_1 T_s + \frac{T_s^3}{3}$, popřípadě závislé členy $q_2 \frac{T_s^2}{2}$ a $q_2 T_s$, nelze najít unifikační matici Ψ tvořenou kombinací nul a jedniček, pro kterou by platila rovnice (4.35), jejíž výsledkem by byl vektor s počtem odhadovaných parametrů menší než čtyři. Jedním ze způsobů řešení tohoto problému je nejprve analyzovat model systému a hledat možné řešení pomocí úprav kovariančních matic.

Při bližším pohledu na kovarianční matici šumů stavu systému (3.44) si můžeme všimnout, že všechny členy jsou ovlivněny vzorkovací periodou T_s . Tato závislost se dá využít pro zjednodušení kovarianční matice. Pokud budeme měnit velikost vzorkovací periody, můžeme si všimnout, že pokud snižujeme vzorkovací periodu, platí přibližně

$$\begin{bmatrix} q_1 T_s + q_2 \frac{T_s^3}{3} & q_2 \frac{T_s^2}{2} \\ q_2 \frac{T_s^2}{2} & q_2 T_s \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} q_1 T_s & 0 \\ 0 & q_2 T_s \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

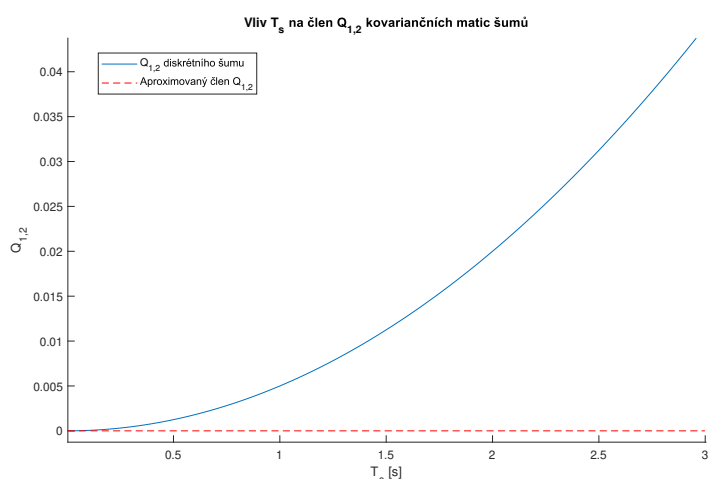
neboli při snižující se vzorkovací periodě se kovarianční matice diskretních šumů blíží ke kovarianční matici šumů spojitých. Toto tvrzení jsem ověřil pomocí grafů, ve kterých jsem uvažoval vzorkovací periodu $T_s \in \langle 10^{-6}, 3 \rangle$ a jako parametry jsem použil $q_1 = 4,5 \cdot 10^{-1} \text{ s}$ a $q_2 = 1,1 \cdot 10^{-19} \text{ s}^{-1}$.

Pro první člen kovarianční matice $Q_{1,1}$ jsem získal graf:



Obrázek 5.1: Vliv velikosti vzorkovací periody na člen $Q_{1,1}$.

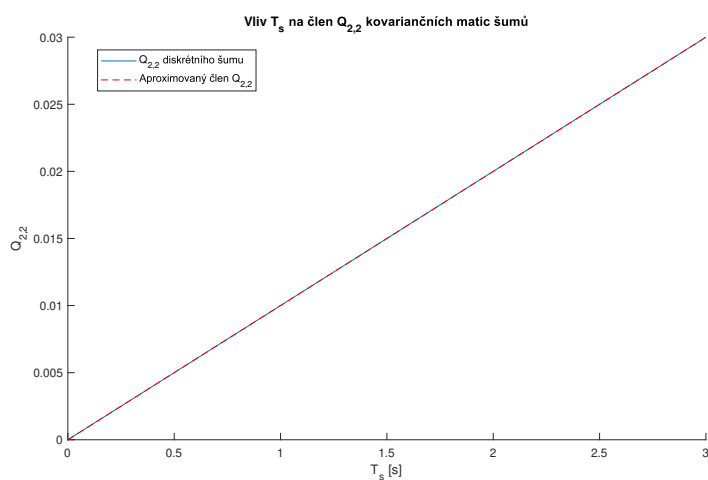
Z průběhu grafů přesné hodnoty členu $Q_{1,1}$ a jeho aproximace je zřejmé, že snižující vzorkovací periodou se aproximace blíží ke skutečné hodnotě. Pro členy mimo diagonálu $Q_{1,2}$ a $Q_{2,1}$ vyšel graf:



Obrázek 5.2: Vliv velikosti vzorkovací periody na člen $Q_{1,2}$.

Tento graf vyjadřuje očekávanou vlastnost, že člen diskrétní kovarianční matice $Q_{1,2}$ se blíží k nule pokud se i T_s blíží k nule.

Poslednímu členu $Q_{2,2}$ odpovídá graf:



Obrázek 5.3: Vliv velikosti vzorkovací periody na člen $Q_{2,2}$.

Tento graf ukazuje lineární vliv velikosti T_s na hodnotu diskrétního členu $Q_{2,2}$. Jelikož aproximace na tento člen nemá žádný vliv, obě hodnoty si přesně odpovídají. To ovšem nelze tvrdit o vlivu na samotné odhady, jelikož na odhad $Q_{2,2}$ by měly působit i aproximace ostatních členů.

Celkově můžeme říct, že tvrzení o vlivu velikosti periody na podobnost kovariančních matic spojitých a diskrétních šumů stavů se zdá být pravdivé a tudíž lze

zavést aproximativní kovarianční matici diskretních šumů

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

pro kterou platí, že $\frac{\tilde{Q}_{11}}{T_s} \approx q_1$ a $\frac{\tilde{Q}_{22}}{T_s} \approx q_2$, při vhodné volbě T_s .

Pokud nyní na místo \mathbf{Q} (3.44) využijeme novou $\tilde{\mathbf{Q}}$, můžeme opět poskládat matici \mathcal{S} (4.27), která má následně podobu

$$\tilde{\mathcal{S}} = \text{BlkDiag} \left(\mathbf{I}_{P-1} \otimes \tilde{\mathbf{Q}}, \mathbf{I}_P \otimes \mathbf{R} \right). \quad (5.5)$$

O této matici víme, že všechny její prvky mimo hlavní diagonálu jsou nulové a tudíž je možné ji vyjádřit jako součin unifikční matice a vektoru unikátních prvků (4.35).

Tvorba unifikční matice a vektoru unikátních prvků je přímočarý proces skládající se jen z několika kroků. Prvním krokem je stanovení samotných unikátních prvků, které se snažíme odhadnout. V matici se opakovaně objevují jen tři prvky odpovídající hledaným parametrům a tak vektor unikátních prvků lze zapsat jako

$$\tilde{\mathcal{S}}_{vec}^u = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} \\ \tilde{Q}_{22} \\ R \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Druhým krokem je stanovení pozic každého z prvků. Pokud vytvoříme vektor $\tilde{\mathcal{S}}_{vec}$, můžeme vidět, že člen \tilde{Q}_{11} se nachází na každé pozici odpovídající posloupnosti

$$a_0 = 1, \quad a_{i+1} = a_i + 2n_{\tilde{\mathcal{S}}} + 2, \quad \text{pro } i = 0, 1, \dots, P-2, \quad (5.7)$$

kde $n_{\tilde{\mathcal{S}}}$ značí počet sloupců matice $\tilde{\mathcal{S}}$. Nyní vytvoříme vektor samých nul o velikosti $n_{\tilde{\mathcal{S}}_{vec}}$ a na všechny pozice odpovídající posloupnosti a dáme jedničky, tento vektor označíme jako $\tilde{\Psi}_1$. Stejně postupujeme u členu \tilde{Q}_{22} . Pro tento člen získáme posloupnost pozic

$$b_0 = n_{\tilde{\mathcal{S}}} + 2, \quad b_{i+1} = b_i + 2n_{\tilde{\mathcal{S}}} + 2, \quad \text{pro } i = 0, 1, \dots, P-2 \quad (5.8)$$

a opět vytvoříme vektor samých nul a pozice odpovídající posloupnosti b změníme na 1, tak vznikne vektor $\tilde{\Psi}_2$.

A pro člen R vyjde posloupnost

$$c_0 = 2n_{\tilde{\mathcal{S}}}(P-1) + n_{\tilde{\mathcal{S}}} - P + 1, \quad c_{i+1} = c_i + n_{\tilde{\mathcal{S}}} + 1, \quad \text{pro } i = 0, 1, \dots, P-1. \quad (5.9)$$

Stejným postupem jako v předchozích případech vytvoříme vektor $\tilde{\Psi}_3$.

Nakonec poskládáme výslednou unifikční matici jako

$$\tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_1 & \tilde{\Psi}_2 & \tilde{\Psi}_3 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

neboli výsledná unifikační matice $\tilde{\Psi}$ je tvořena sloupcovými vektory $\tilde{\Psi}_1$, $\tilde{\Psi}_2$ a $\tilde{\Psi}_3$, které tvoří její tři sloupce. Tímto postupem získáme potřebný tvar vektoru $\tilde{\mathcal{S}}_{vec}$, který můžeme dosadit do rovnice odhadu (4.43)

$$\begin{bmatrix} \hat{q}_1 T_s \\ \hat{q}_2 T_s \\ \hat{R} \end{bmatrix} \approx \left((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \tilde{\Psi} \right)^\dagger \frac{1}{n} \left[\left(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T \right)_{vec} + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T \right)_{vec} + \dots + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T \right)_{vec} \right]. \quad (5.11)$$

Výsledné odhady \hat{q}_1 a \hat{q}_2 pak získáme vydělením známou vzorkovací periodou.

Ukázka výpočtu unifikačně matice $\tilde{\Psi}$ (5.10)

Mějme kovarianční matici $\tilde{\mathcal{S}}$ (5.5) o velikosti $n_{\tilde{\mathcal{S}}} = 4$ odpovídající parametrům odhadu $L = 1$, $N = 1$ a $P = 2$ v podobě

$$\tilde{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}.$$

Nejprve stanovíme všechny členy posloupností a_n (5.7), b_n (5.8) a c_n (5.9)

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & b_0 &= 6, & c_0 &= 11, \\ & & & & c_1 &= 16 \end{aligned}$$

Nyní vytvoříme vektory $\tilde{\Psi}_1$, $\tilde{\Psi}_2$ a $\tilde{\Psi}_3$ a získáme rovnici (4.35) ve tvaru

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{Q}_{1,1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{Q}_{2,2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathcal{S}}_{vec}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\Psi}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{Q}_{1,1} \\ \tilde{Q}_{2,2} \\ R \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathcal{S}}_{vec}^u},$$

Neboli vytvoříme vektory samých nul, do kterých na pozice příslušné prvkům posloupností dáme jedničky, vektor $\tilde{\Psi}_1$ má jedničku na pozici a_0 , vektor $\tilde{\Psi}_2$ ji má na pozici b_0 a do vektoru $\tilde{\Psi}_3$ doplníme jedničky na pozici c_0 a c_1 . Nakonec pouze poskládáme tyto vektory jako sloupce matice $\tilde{\Psi}$ (5.10). Platnost této rovnice lze jednoduše ověřit roznásobením pravé strany.

5.2 Simulace odhadu s aproximací kovarianční matice šumů stavu

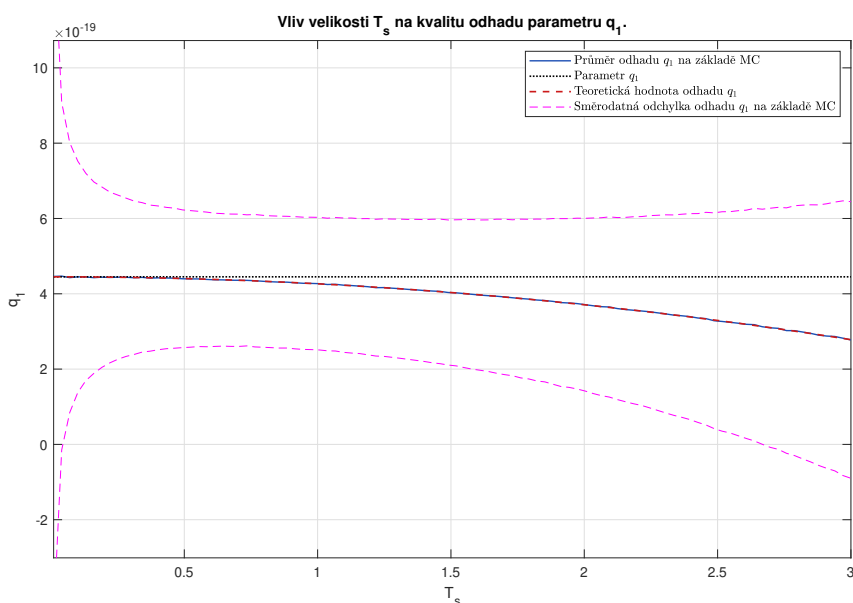
Jelikož se podařilo pro známý model šumu časového signálu odvodit aproximativní tvar matice \mathcal{S} (5.26) a matici \mathbf{A} (4.19) lze jednoduše dopočítat ze známých matic modelu, je nyní možné ověřit vlastnosti odhadu pomocí simulací.

Protože bylo využito aproximací kovarianční matice šumů diskrétního modelu, je nutné ověřit vliv této aproximace na kvalitu samotného odhadu. V předchozí části bylo ukázáno, že různá volba velikosti vzorkovací periody T_s má vliv na přesnost aproximace a tak bude nyní zkoumán vliv vzorkovací periody na výsledky odhadu. Proto nyní zafixujeme ostatní parametry odhadu. Počet měření L , který udává velikost vektoru \mathbf{Z} (4.6) jsem zafixoval na hodnotě 5 a počet kroků predikce N jsem pro tuto simulaci nastavil na 1. Pro samotnou simulaci jsou také potřeba parametry modelu chyb generátoru časového signálu. Těmito parametry jsou q_1 a q_2 . Tyto hodnoty byly pro různé druhy hodin v minulosti již odhadovány a tak jsem využil známé hodnoty $q_1 = 4,5\text{s}$ a $q_2 = 1,1\text{s}^{-1}$, které odpovídají hodinám TCXO [Gro13] využívajícím teplotně kompenzovaný krystalový oscilátor. Jako variance šumu měření byla použita hodnota $R = 2,1 \cdot 10^{-19}\text{s}$.

Se známými parametry jsem provedl Monte Carlo (zkráceně MC) simulace sestávající z 10^5 simulací odhadů parametrů kovarianční matice šumů modelu pomocí MDM, kde jsem v každé simulaci simuloval 100 tisíc měření odpovídající vzorkovací periodě $T_s = 0,1\text{s}$. Následně jsem určoval odhady odpovídající různým vzorkovacím periodám z intervalu $\langle 0, 1; 3 \rangle$ sekund. Odhady odpovídající větším velikostem T_s jsem uskutečnil simulací počtu měření, která odpovídá dané vzorkovací periodě v poměru k základní $T_s = 0,1\text{s}$, neboli při použití $T_s = 1$ se využije desetkrát méně dat než pro $T_s = 0,1\text{s}$. Ze získaných odhadů pro každou T_s jsem odhadl střední hodnotu a varianci na základě MC simulací. Pro účely zobrazení kvality odhadu v grafech jsem z odhadnutých variancí určil směrodatnou odchylku. Směrodatná odchylka vyjadřuje oblast, kolem odhadnuté střední hodnoty odpovídající \pm odmocnině z variance odhadu. Zároveň grafy obsahují teoretickou střední hodnotu odhadu (5.11), která byla určena jako

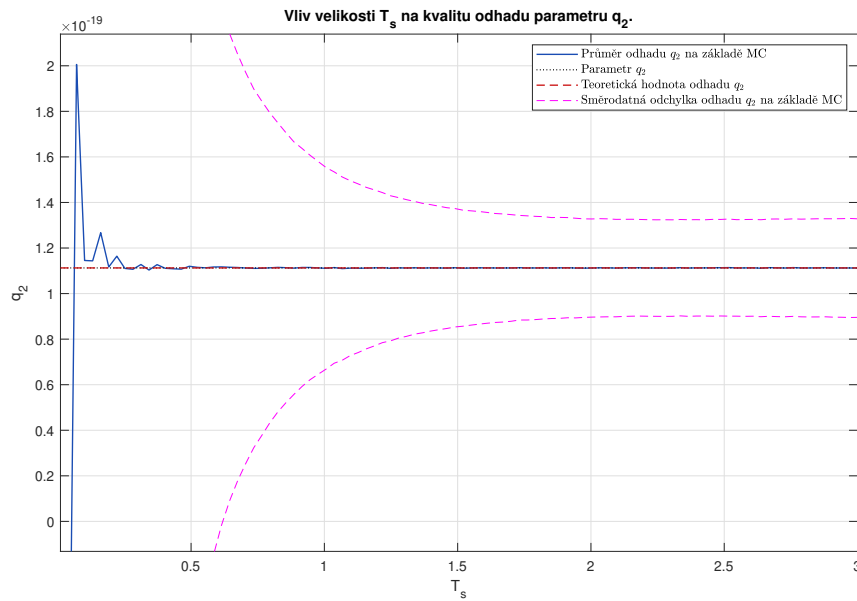
$$\widetilde{\mathcal{S}}_{vec}^u = ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\widetilde{\Psi})^\dagger (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathcal{S}_{vec} \quad (5.12)$$

Výsledné hodnoty byly zaneseny v následujících grafech:

Obrázek 5.4: Vliv velikosti vzorkovací periody na aproximovaný odhad q_1 .

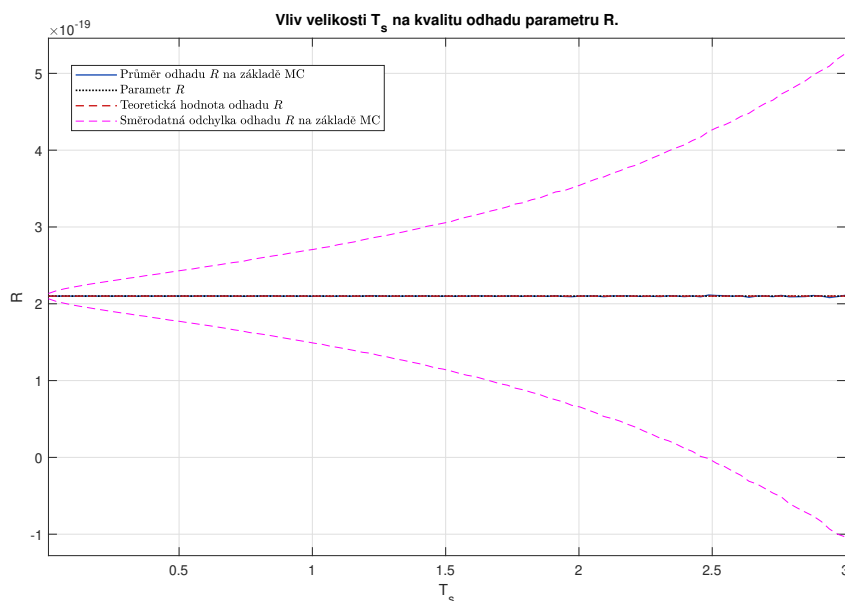
První graf zachycuje vliv velikosti vzorkovací periody na odhadnuté hodnoty hledaného parametru q_1 . Vidíme, že předpoklad o vlivu zmenšování vzorkovací periody na kvalitu odhadu se zdá být pravdivý. Na základě simulací můžeme tvrdit, že při zvyšování T_s roste nejen variance odhadu, ale také odhadovaná střední hodnota se vzdaluje od hledané hodnoty simulačního parametru, ale sleduje průběh teoretické střední hodnoty odhadu. Toto chování tedy vyplývá z využití aproximace. Jedinou výjimku od očekávaného průběhu je oblast velmi malých vzorkovacích period, kde odhadovaná směrodatná odchylka roste. Toto neočekávané chování může souviset s problematikou numerické nepřesnosti nebo by mohlo vyplývat z vlastností modelu. Pro odhad parametru q_1 pomocí této metody by mělo být vhodné využívat menší vzorkovací periody.

5.2. Simulace odhadu s aproximací kovarianční matice šumů stavu



Obrázek 5.5: Vliv velikosti vzorkovací periody na aproximovaný odhad q_2 .

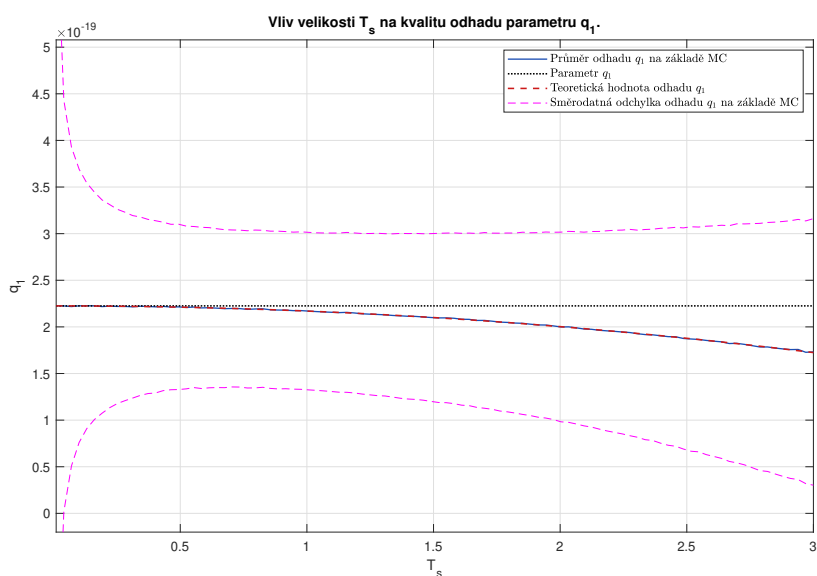
V tomto grafu je zachycen vliv velikosti vzorkovací periody na odhad parametru q_2 . V tomto případě se ukazuje, že příliš malá vzorkovací perioda v případě simulací způsobuje vysokou varianci odhadů a proto se odhad střední hodnoty pro velmi malé vzorkovací periody odchyluje od hledané hodnoty i od teoretické střední hodnoty odhadu. Pro tento model se zdá nejlepší volbou vzorkovací periody být hodnota kolem $2s$, kde je nízká odhadnutá variance a průměrný odhad je blízko hledanému parametru.

Obrázek 5.6: Vliv velikosti vzorkovací periody na aproximovaný odhad R .

Graf pro třetí parametr, tedy varianci šumu měření R , vykazuje podobné vlastnosti jako odhad q_1 . Pro tento parametr se tedy, stejně jako u odhadu q_1 , zdá nejvhodnější volbou velmi malá vzorkovací perioda.

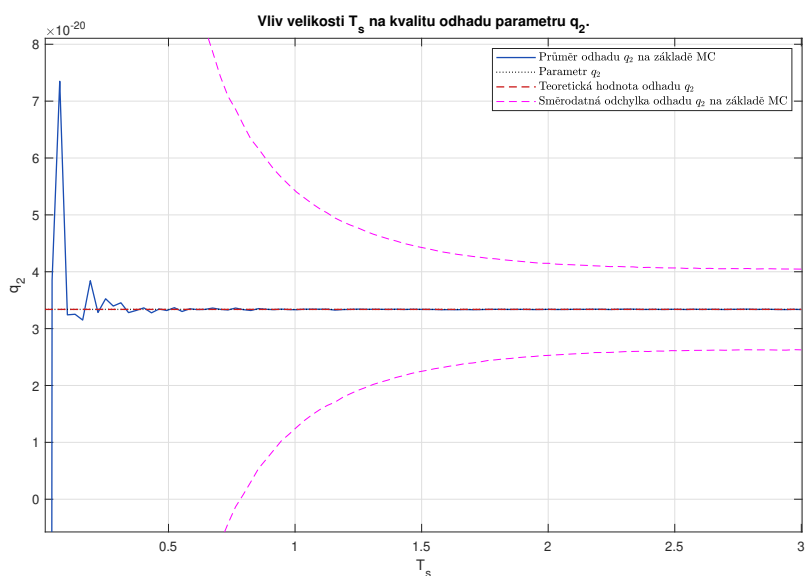
Na základě simulací se tedy zdá, že s využitím aproximací kovarianční matice šumů modelu chyb generátoru časového signálu lze nalézt relativně dobré odhady, ale minimálně v případě parametru q_1 se na základě simulací odhad jeví jako stranný. Pro odhad každého parametru lze nalézt vhodnou T_s , pro kterou průměr odhadu poměrně přesně odpovídá hledanému parametru. Je ale nutné si uvědomit, že se jedná o simulaci s jedněmi konkrétními parametry. Nelze tedy říct, že nalezené optimální vzorkovací periody platí pro všechny různé generátory časového signálu. Proto jsem provedl další simulace s rozdílnými parametry, abych ověřil vliv modelu na vhodnou hodnotu T_s . Tentokrát jsem využil parametry hodin podobné kvality o hodnotách $q_1 = 2.23 \cdot 10^{-19} s$, $q_2 = 3,34 \cdot 10^{-20} s^{-1}$ a $R = 1 \cdot 10^{-19} s$. Pro tyto odhady jsem opět vykreslil grafy zobrazující odhad střední hodnoty, směrodatné odchylky a hodnotu hledaného parametru.

5.2. Simulace odhadu s aproximací kovarianční matice šumů stavu



Obrázek 5.7: Vliv velikosti T_s na aproximovaný odhad q_1 se změněnými parametry.

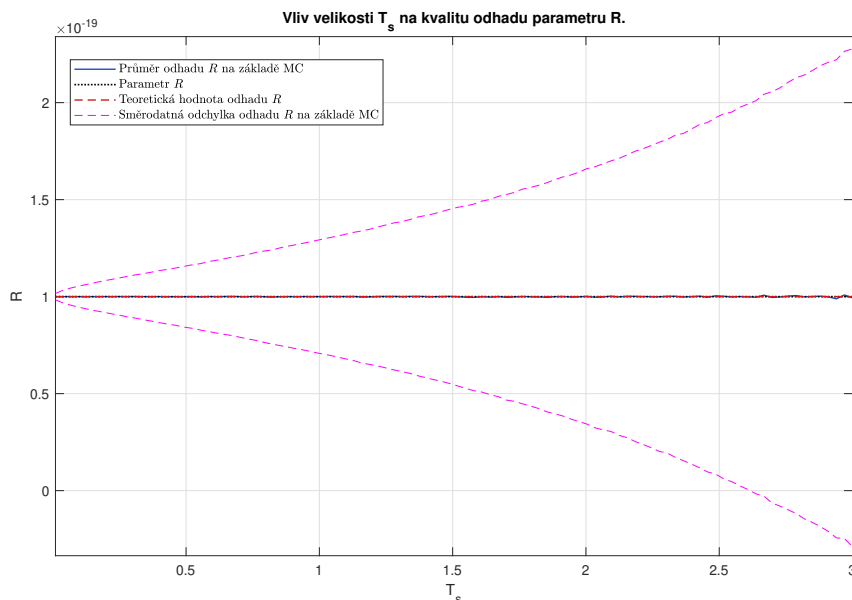
V grafu odhadů q_1 se změněnými parametry modelu můžeme pozorovat velmi podobné chování jako u první simulace. Na základě této simulace můžeme usoudit, že pro generátory podobných vlastností je možné odhadnout parametr q_1 s využitím vhodně zvolené malé vzorkovací periody.



Obrázek 5.8: Vliv velikosti T_s na aproximovaný odhad q_2 se změněnými parametry.

Graf znázorňující vliv T_s na odhad parametru q_2 po změně parametru vykazuje

také velmi podobný průběh jako při simulacích s původními parametry, ovšem tentokrát se optimální hodnota T_s nachází kolem hodnoty 2,5s, kde je variance odhadu nejnižší a zároveň je průměrný odhad velmi blízko hodnotě hledané. Je tedy zřejmé, že pro každý generátor časového signálu bude existovat jiná optimální velikost vzorkovací periody pro odhad q_2 .



Obrázek 5.9: Vliv velikosti T_s na odhad R se změněnými parametry.

Graf Odhadu parametru R je opět velice podobný předešlé simulaci. Opět platí, že čím menší je vzorkovací perioda, tím lepší jsou charakteristiky samotného odhadu.

Na základě těchto dvou simulací z různými parametry se zdá, že pro každou možnou hodnotu hledaných parametrů existuje jiná optimální vzorkovací perioda, která vede na nejpřesnější výsledky. Obecně ale můžeme tvrdit, že odhad pomocí MDM s využitím aproximace kovarianční matice šumů modelu může vést k velmi dobrým odhadům. Zásadním nedostatkem je ovšem obecná neznalost optimální T_s , kterou nelze určit, pokud neznáme přesně hledané parametry.

5.3 Odhad parametrů kovariančních matic bez aproximace

Jelikož každá aproximace zavádí potenciální nepřesnosti do odhadu, je vhodné pokusit se nalézt řešení, které by aproximace nevyužívalo. Z předchozí kapitoly víme,

že při zjednodušení kovarianční matice \mathcal{S} můžeme získat relativně dobré odhady hledaných parametrů, pokud dokážeme zvolit vhodnou vzorkovací periodu, což nemusí být vždy možné. Pokud by existoval postup odhadu, který by toto zjednodušení nevyužíval, dalo by se předpokládat, že vliv velikosti T_s na jeho kvalitu nebude tak zásadní.

5.3.1 Univerzální postup vyjádření \mathcal{S}_{vec} jako součinu matice a vektoru parametrů

V této kapitole zavedeme univerzální postup převzatý od Bélanger [Bel74], který umožňuje získat \mathcal{S}_{vec} jako součin matice a vektoru parametrů bez ohledu na rozložení prvků v kovariančních maticích. Bélanger tento postup využil pro svoji metodu odhadu, která by byla také aplikovatelná na problematiku odhadu parametrů kovariančních matic šumů, ovšem v této práci využíváme MDM, kvůli její univerzálnosti, jelikož MDM umožňuje odhadovat všechny momenty náhodné veličiny. Zapišeme nový tvar kovarianční matice šumů stavů modelu (3.44) a variance šumu měření R jako

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 T_s + q_2 \frac{T_s^3}{3} & q_2 \frac{T_s^2}{2} \\ q_2 \frac{T_s^2}{2} & q_2 T_s \end{bmatrix} = q_1 \underbrace{\begin{bmatrix} T_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q_1} + q_2 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{T_s^3}{3} & \frac{T_s^2}{2} \\ \frac{T_s^2}{2} & T_s \end{bmatrix}}_{Q_2} + R \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q_3} \quad (5.13)$$

$$= \sum_{i=1}^{p_n} p_i Q_i, \quad (5.14)$$

$$R = q_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{R_1} + q_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{R_2} + R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}_{R_3} \quad (5.15)$$

$$= \sum_{i=1}^{p_n} p_i R_i, \quad (5.16)$$

$$(5.17)$$

neboli zapišeme kovarianční matice šumů jako součet p_n matic násobených odpovídajícími parametry, kde p_n značí počet parametrů, které lze zapsat do vektoru $\mathcal{P} = [p_1 \ p_2 \ p_3]^T = [q_1 \ q_2 \ R]^T$.

Tento postup lze použít obecně pro všechny podobné modely, kde jsou parametry kovariančních matic šumů separabilní. Pokud tedy stanovíme obecný vektor hledaných parametrů \mathcal{P} ve tvaru

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

S využitím vektoru hledaných parametrů zavedeme novou definici kovarianční matice \mathcal{S} (4.27) ve tvaru

$$\mathcal{S} = p_1 \mathcal{K}_1 + p_2 \mathcal{K}_2 + \dots + p_n \mathcal{K}_n, \quad (5.19)$$

kde matice $\mathcal{K}_i \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$ jsou známé konstantní matice ve tvaru

$$\mathcal{K}_i = \text{BlkDiag}(\mathbf{I}_{p-1} \otimes Q_i, \mathbf{I}_p \otimes R_i). \quad (5.20)$$

Dalším krokem je vektorizace celé rovnice (5.19)

$$\mathcal{S}_{vec} = p_1 \mathcal{K}_{1,vec} + p_2 \mathcal{K}_{2,vec} + \dots + p_n \mathcal{K}_{n,vec}. \quad (5.21)$$

Pokud nyní využijeme vlastností vektorového násobení, můžeme rovnici upravit do tvaru

$$\mathcal{S}_{vec} = \Lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

kde matice $\Lambda \in \mathbb{R}^{n_s^2 \times p_n}$ je unifikačně-extrakční matice definovaná jako

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{1,vec} & \mathcal{K}_{2,vec} & \dots & \mathcal{K}_{n,vec} \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

S využitím tohoto nového tvaru \mathcal{S}_{vec} (5.22) dosadíme do rovnice (4.34) získáme

$$\left(\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T \right)_{vec} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Lambda \mathcal{P} + (\mathcal{V}_k)_{vec}. \quad (5.24)$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit člen \mathcal{S}_{vec}^u s využitím odhadu metodou nejmenších čtverců a získáme upravenou rovnici pro odhad

$$\hat{\mathcal{P}} = ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Lambda)^\dagger \frac{1}{n} \left[\left(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T \right)_{vec} + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T \right)_{vec} + \dots + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T \right)_{vec} \right]. \quad (5.25)$$

Tato rovnice nám umožní uskutečnit přímý odhad parametrů kovariančních matic šumů generátoru časového signálu bez použití aproximace.

Ukázka výpočtu unifikačně-extrakční matice Λ (5.23)

Mějme kovarianční matici \mathcal{S} (4.27) odpovídající volbě $L = 2$ a $N = 1$ v podobě

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} q_1 T_s + q_2 \frac{T_s^3}{3} & q_2 \frac{T_s^2}{2} & 0 & 0 \\ q_2 \frac{T_s^2}{2} & q_2 T_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}.$$

Pro tuto matici zavedeme vektor hledaných parametrů jako

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ R \end{bmatrix}$$

Dalším krokem je vyjádření \mathcal{S} podle unikátních prvků jako v (5.19):

$$\mathcal{S} = q_1 \begin{bmatrix} T_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + q_2 \begin{bmatrix} \frac{T_s^3}{3} & \frac{T_s^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{T_s^2}{2} & T_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po vektorizaci a poskládání do maticové podoby získáme finální rovnici v podobě

$$\underbrace{\begin{bmatrix} q_1 T_s + q_2 \frac{T_s^3}{3} \\ q_2 \frac{T_s^2}{2} \\ 0 \\ 0 \\ q_2 \frac{T_s^2}{2} \\ q_2 T_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix}}_{S_{vec}} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_s & \frac{T_s^3}{3} & 0 \\ 0 & \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ 0 & T_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ R \end{bmatrix}}_{\mathcal{P}}.$$

Roznásobením pravé strany lze snadno ukázat, že tato rovnice je platná.

5.3.2 Bélangerův přístup jako rozšíření odhadu s aproximací

Pokud se nyní vrátíme k postupu použitému pro odhad s aproximací kovarianční matice šumů stavů. Můžeme ukázat, že Bélangerův přístup je možné chápat jako rozšíření odhadu s aproximací kovarianční matice.

Zavedeme nový tvar vektoru \mathcal{S}_{vec} jako

$$\mathcal{S}_{vec} = \Psi \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 T_s + q_2 \frac{T_s^3}{3} \\ q_2 \frac{T_s^2}{2} \\ q_2 T_s \\ R \end{bmatrix}}_{\mathcal{S}_{vec}^u}, \quad (5.26)$$

kde Ψ je unifikační matice.

Konstrukce unifikační matice Ψ je prováděna stejným způsobem jako v rovnici (5.10). Ovšem je nutné si uvědomit, že unifikační matice má v tomto případě jeden sloupec navíc, který odpovídá členu $q_2 \frac{T_s^2}{2}$, který byl v přístupu s aproximací nahrazen nulou a na výsledné matici se nijak nepodílel. Unifikační matice má tedy podobu

$$\Psi = [\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \Psi_3 \quad \Psi_4], \quad (5.27)$$

kde všechny vektory $\Psi_i \in \mathbb{R}^{n_s^2}$. Vektory Ψ_1 , Ψ_3 a Ψ_4 odpovídají již nalezeným vektorům z minulé části. Vektor Ψ_1 se získá z posloupnosti (5.7), vektor Ψ_3 je možné určit z posloupnosti (5.8) a vektor Ψ_4 z (5.9). Jediným neznámým vektorem tak zůstává Ψ_2 . Stejně jako v (5.7) definujeme posloupnost určující jednotkové členy v jinak nulovém vektoru. Pro tento vektor definujeme dvě posloupnosti, jelikož se tento člen vyskytuje v kovarianční matici šumů stavů \mathbf{Q} (3.44) dvakrát. Posloupnosti mají tvar

$$\begin{aligned} d_0 &= 2, & d_{i+1} &= d_i + 2n_S + 2, & \text{pro } i &= 0, 1, \dots, P-2, \\ e_0 &= n_S + 1, & e_{i+1} &= d_i + 2n_S + 2, & \text{pro } i &= 0, 1, \dots, P-2, \end{aligned} \quad (5.28)$$

kde n_S je počet sloupců matice \mathcal{S} . Spojením členů obou posloupností do vektoru $[d, e]$ získáme potřebné indexy a vytvoříme hledaný vektor Ψ_2 .

Víme, že vektor \mathcal{S}_{vec}^u obsahuje závislé členy a mocniny známé vzorkovací periody T_s , jejíž hodnotu není nutné odhadovat, zároveň víme, že odhad tří unikátních prvků je pro tento model možný, musíme tedy najít způsob úpravy \mathcal{S}_{vec}^u do podoby s maximálně třemi unikátními prvky. Toho je možné docílit pomocí rovnice

$$\mathcal{S}_{vec}^u = \Upsilon \mathcal{P}, \quad (5.29)$$

kde \mathcal{P} je vektor parametrů

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ R \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

a Υ je extrakční matice ve tvaru

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} T_s & \frac{T_s^3}{3} & 0 \\ 0 & \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ 0 & T_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Poznamenejme nyní, že tento tvar extrakční matice Υ platí pouze pro vektor unikátních prvků \mathcal{S}_{vec}^u ve tvaru (5.26) a vektorizovanou kovarianční matici \mathcal{S}_{vec} odpovídající našemu modelu generátoru časového signálu.

Pokud nyní spojíme rovnice (5.26) a (5.29) získáme

$$\mathcal{S}_{vec} = \Psi\Upsilon\mathcal{P}, \quad (5.32)$$

neboli způsob, jak vyjádřit \mathcal{S}_{vec} jako součin dvou známých matic a vektoru parametrů.

Porovnáním rovnic (5.32) a (5.22) zjistíme, že

$$\Lambda = \Psi\Upsilon. \quad (5.33)$$

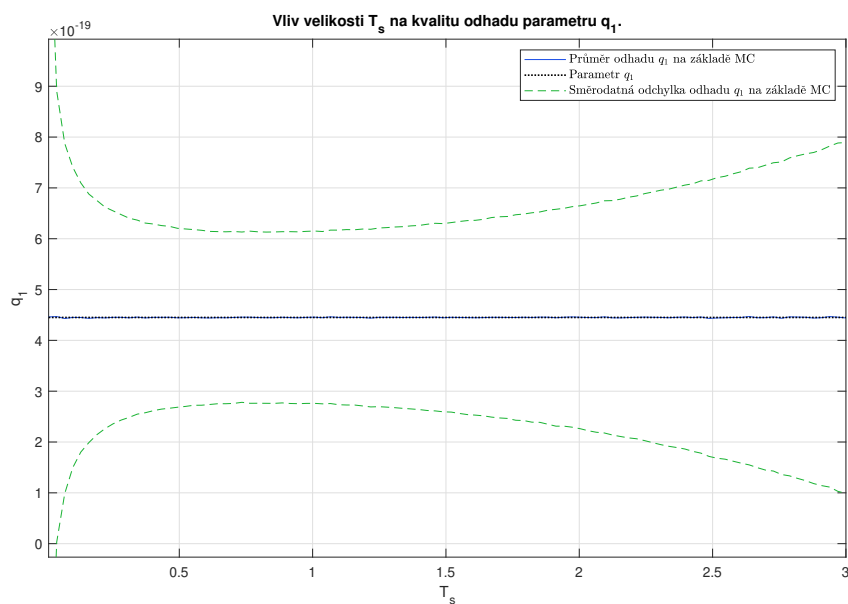
Neboli Bélangerův přístup lze chápat jako rozšíření odhadu s aproximací a rovnicí samotného odhadu lze upravit do podoby

$$\hat{\mathcal{P}} = ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi\Upsilon)^\dagger \frac{1}{n} \left[\left(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T \right)_{vec} + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T \right)_{vec} + \dots + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T \right)_{vec} \right]. \quad (5.34)$$

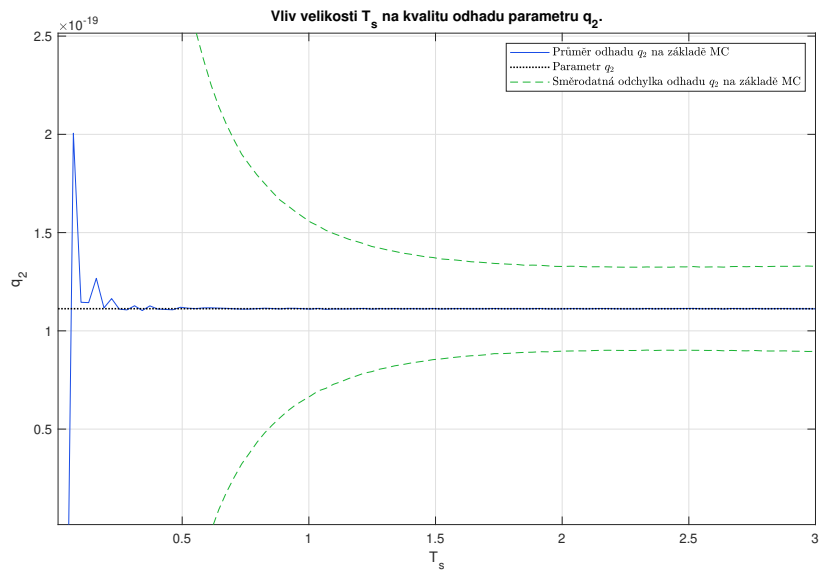
5.4 Simulace odhadu parametrů bez aproximace

V této kapitole jsou analyzovány výsledky simulačních experimentů za účelem získání charakteristik odhadů.

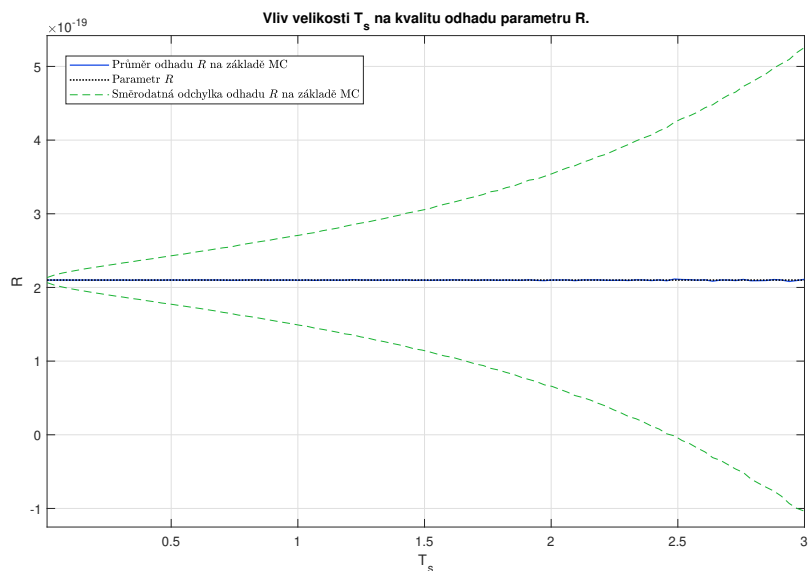
V předchozí kapitole je odvozen tvar vektorizované kovarianční matice \mathcal{S}_{vec} (5.32), s jehož pomocí je možné odhadovat přímo koeficienty kovarianční matice bez nutnosti využití aproximací. U tohoto odhadu očekáváme minimální vliv velikosti vzorkovací periody T_s . Abychom ověřili tento předpoklad, využijeme stejný postup jako v minulých simulacích. Využijeme již známé parametry hodin TCXO, neboli $q_1 = 4.5 \cdot 10^{-19}s$, $q_2 = 1.1 \cdot 10^{-19}s^{-1}$ a $R = 2, 1 \cdot 10^{-19}s$. Ostatní parametry odhadu jsou také zafixovány jako v minulých simulacích, tedy $L = 5$ a $N = 1$. Pro toto ověření také provedeme 10^5 Monte Carlo simulací, z nichž každá bude obsahovat 100 tisíc dat. Výsledky jsou zaneseny v následujících grafech:

Obrázek 5.10: Vliv velikosti T_s na odhad q_1 bez aproximací.

První graf zobrazuje výsledky simulace pro odhad parametru q_1 . Střední hodnota parametru odhadnutá ze simulací se pohybuje v blízkosti hledané hodnoty parametru. Pokud se zaměříme na varianci odhadu, nebo v případě grafu na směrodatnou odchylku vypočtenou na základě Monte Carlo simulací, vidíme mírný růst s rostoucí T_s . Ovšem tento růst by bylo možné spojit se skutečností, že odhady s vyšší T_s využívají menší počet dat, která těmto vzorkovacím frekvencím náleží. Co se týče nárůstu odhadu směrodatné odchylky pro malé vzorkovací periody, je možné, že tyto nepřesnosti jsou způsobeny numerickými problémy, nebo tvarem samotného modelu.

Obrázek 5.11: Vliv velikosti T_s na odhad q_1 bez aproximací.

V tomto grafu jsou ukázány výsledky simulací odhadu parametru q_2 . Podobně jako v případě odhadu q_1 vidíme malou přesnost odhadů pro velmi malé vzorkovací periody. Na druhou stranu, pokud se zaměříme na vzorkovací periody vyšší než 1,5s, můžeme pozorovat, že simulační variance odhadu se ustaluje a neroste jako v případě q_1 .

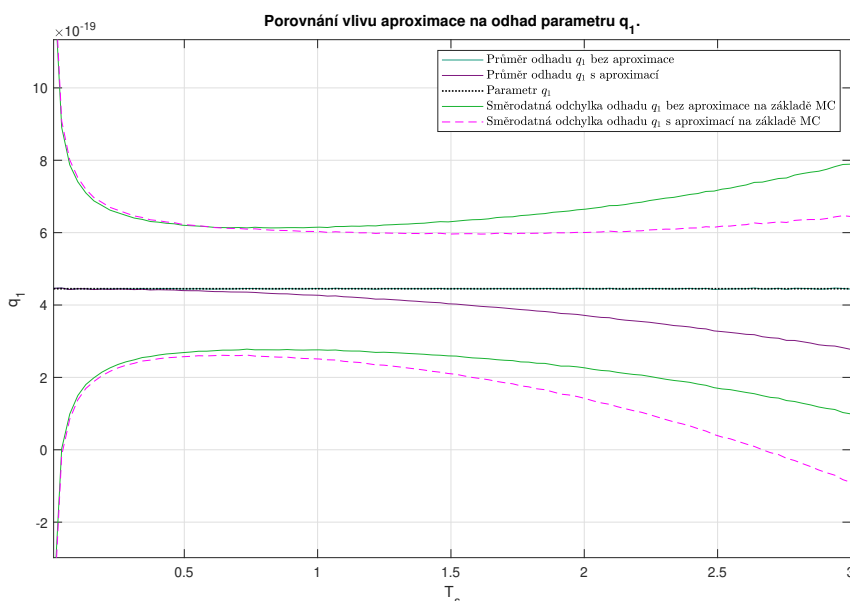
Obrázek 5.12: Vliv velikosti T_s na odhad q_1 bez aproximací.

V případě grafu pro odhad parametru R se ukazuje, že se snižující se T_s v případě simulací klesá směrodatná odchylka odhadu, zatím co odhadovaná střední hodnota se zdá být téměř totožná s hledanou hodnotou parametru. Je možné, že růst simulační variance odhadu s rostoucí vzorkovací periodou je opět zapříčiněn klesajícím počtem dat.

5.5 Porovnání výsledků odhadů

V této kapitole jsou porovnány oba způsoby odhadu parametrů šumů generátoru časového signálu z hlediska jejich kvality.

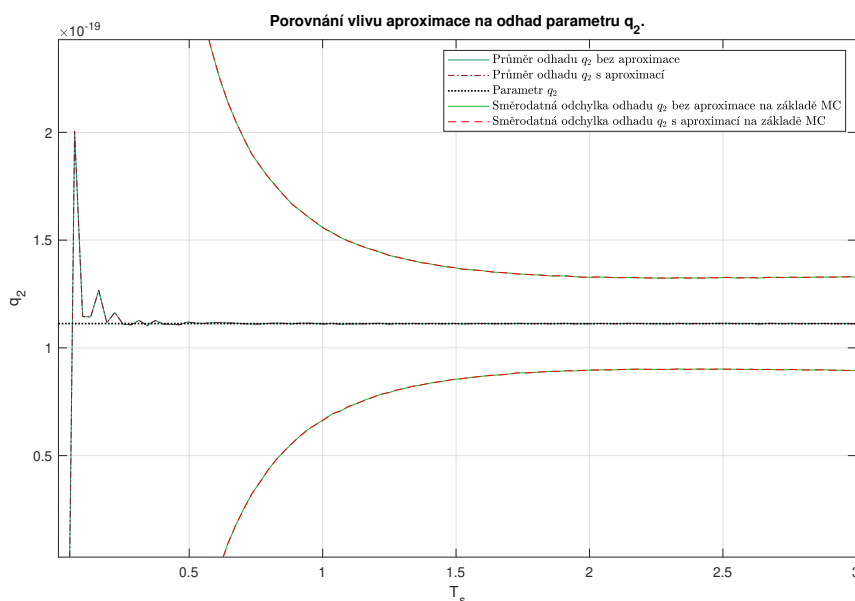
Jelikož máme k dispozici jak simulace odhadů parametrů s využitím aproximace kovarianční matice šumů stavů systému, tak i simulaci odhadu parametrů bez využití aproximací na totožných datech, můžeme nyní oba odhady navzájem porovnat. Porovnání bude ukázáno vykreslením výsledků obou odhadů do jednoho obrázku. Nejprve tedy porovnáme odhady pro parametr q_1 .



Obrázek 5.13: Porovnání odhadů parametru q_1 .

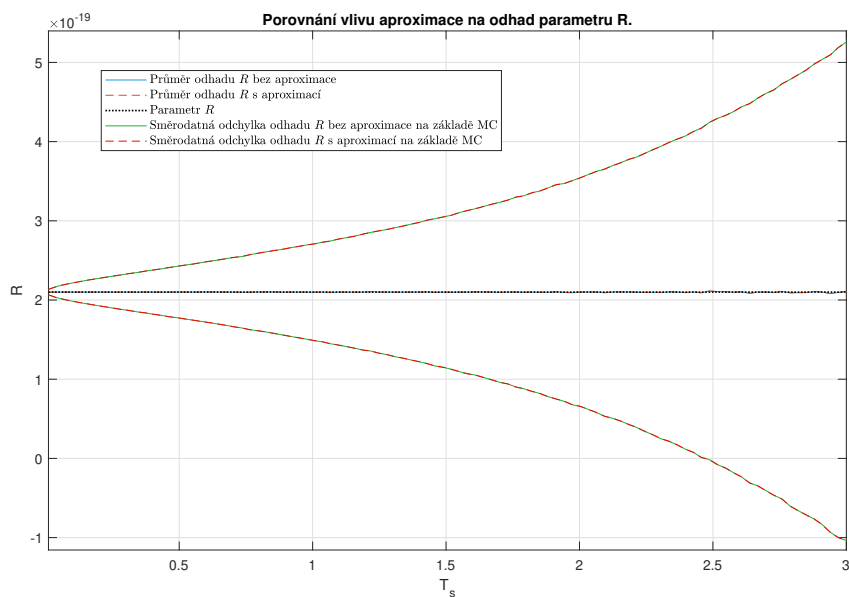
Při pohledu na odhady parametru q_1 , můžeme konstatovat, že odhad bez aproximací se, na základě simulací, jeví jako lepší z hlediska odhadované střední hodnoty, jelikož jeho průměrná hodnota je v případě simulací pro všechny vzorkovací periody ze simulačního intervalu blíže hledané hodnotě a s rostoucí T_s se výrazně nevzdaluje od skutečné hodnoty parametru. Při pohledu na odhady variance obou odhadů se

ukazuje, že variance obou odhadů mírně roste s rostoucí vzorkovací periodou, až na případ velmi malých vzorkovacích frekvencí.



Obrázek 5.14: Porovnání odhadů parametru q_2 .

Graf zobrazující porovnání odhadů parametru q_2 ukazuje, že průměrné hodnoty obou odhadů jsou pro oba přístupy v rámci těchto simulací totožné a stejně tak i odhadované variance. Toto zjištění je velice překvapivé, jelikož na základě simulací se ukazuje, že aproximace kovarianční matice \mathbf{Q} (3.44) nemá na výsledný odhad žádný zásadní vliv.



Obrázek 5.15: Porovnání odhadů parametru R .

V případě simulačních grafů porovnání odhadů parametru R se ukazuje, že oba přístupy jsou jak v rámci odhadu střední hodnoty, tak i variance totožné. Opět se tedy ukazuje, že na odhad parametru R nemá aproximace rozpoznatelný vliv.

Ukázka vlivu aproximace na výsledky odhadů ze simulací

V této ukázce se zaměříme na podobnost obou přístupů k odhadu, jelikož se ukázalo, že pro dva parametry poskytují totožné výsledky. Jelikož oba odhady pracovaly se stejnými daty, byly i všechny chyby predikce \tilde{Z}_k (4.17) pro oba odhady stejné. V rovnicích odhadů tak zbývají pouze určité členy, které se mohou navzájem lišit.

V případě odhadu s aproximací se jedná o člen

$$((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi)^\dagger,$$

který pochází z rovnice (5.11). Musíme ještě vzpomenout na skutečnost, že výsledkem tohoto aproximovaného odhadu je vektor (5.6), kde odhady \hat{q}_1 a \hat{q}_2 jsou ještě násobeny příslušnou vzorkovací periodou. Pokud bychom chtěli vyjádřit výsledný vektor pouze jako parametry kovariančních matic šumů, museli bychom obě strany rovnice (5.11) vynásobit zleva maticí $\text{BlkDiag}(\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}, \mathbf{R})$ a získali bychom tím pádem člen

$$G_{ap} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi)^\dagger.$$

U odhadu parametrů bez aproximace je tímto členem

$$G = ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Lambda)^\dagger,$$

z rovnice (5.25). Nyní se podíváme na podoby těchto členů, které se objevily v simulacích, z každé této matice si ukážeme prvních pět sloupců. Začneme s odhadem s aproximací při vzorkovací periodě $T_s = 0,1$ s a parametrech odhadu $L=5$ a $N=1$:

$$G_{ap} = \begin{bmatrix} -2,2736 & 65,266 & -87,015 & 33,197 & 237,2 & \dots \\ -92607 & -1,1889 \cdot 10^5 & 2,5255 \cdot 10^5 & -1,0681 \cdot 10^5 & -6,7319 \cdot 10^5 & \dots \\ 0,22827 & -0,29729 & 0,22988 & -0,08036 & -0,68511 & \dots \end{bmatrix},$$

V případě odhadu parametrů bez aproximace získáme

$$G = \begin{bmatrix} -3,817 & 63,285 & -82,806 & 31,416 & 225,98 & \dots \\ -92607 & -1,1889 \cdot 10^5 & 2,5255 \cdot 10^5 & -1,0681 \cdot 10^5 & -6,7319 \cdot 10^5 & \dots \\ 0,22827 & -0,29729 & 0,22988 & -0,08036 & -0,68511 & \dots \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že obě matice mají totožný druhý a třetí sloupec a tudíž budou odhady q_2 a R totožné a bez vlivu aproximace.

Celkově, s ohledem na všechny odhadované parametry, můžeme tvrdit, že oba přístupy umožňují odhadnout hledané parametry. Zároveň porovnání ukázalo, že pro simulovaný systém poskytuje odhad bez aproximace lepší výsledky odhadu parametru q_1 při použití větších vzorkovacích frekvencí. Tyto vlastnosti bychom mohli předpokládat i při použití odhadů na generátory podobných parametrů.

5.6 Simulační program

Algoritmus použitý pro simulační experimenty vytvořený v programu MATLAB [Mat21] byl zveřejněn na internetové adrese <https://github.com/Hefik/DP-Hefler-2024>.

V adresáři je umístěn samotný simulační program, funkce vytvářející potřebné matice pro MDM, obrázky použité v této práci a kopie této práce. Samotný program je možné využít pro další simulace (např. jiných generátorů časového signálu) nebo použít jako základ pro aplikaci na odhad parametrů kovariančních matic šumů z reálných dat.

Tato práce se zabývala možnostmi odhadování parametrů variancí a kovariančních matic šumů působících na generátory časového signálu. Její cíle byly stanoveny v zadání práce jako:

- Cíl 1: Seznámení s generátorem časového signálu popsaného stavovým stochastickým modelem.
- Cíl 2: Seznámení se a implementace MDM pro odhad parametrů kovariančních matic šumů stavového modelu.
- Cíl 3: Analýza vlivu parametrů MDM a typu modelu na kvalitu odhadu a návrh přístupu pro jeho volbu.
- Cíl 4: Zhodnocení dosažených výsledků.

Cíl 1 byl splněn v kapitolách 2 a 3 této práce, kde byl ukázán postup modelování obecného systému pomocí stavových rovnic. Následně je odvozen model generátoru časového signálu a jeho šumů, které způsobují nepřesnosti měření. Tento model se ukázal jako nepostradatelná součást řešení problému, jelikož bez známé dynamiky systému a definice šumů, nelze provádět žádaný odhad.

Cíl 2 byl splněn v kapitole 4, kde byla představena Metoda rozdílu měření jako nástroj určený k odhadu parametrů popisujících kovarianční matice šumů. Tato metoda byla v práci odvozena pro obecný stochastický systém a byl ukázán postup jejího použití. Ukázalo se, že ze samotné podoby modelu generátoru časového signálu vyplývá maximální možný počet odhadnutelných parametrů, proto byly v kapitole 5 ukázány dva postupy úpravy kovarianční matice na vektor unikátních prvků. První postup ukazoval používanou aproximaci a druhý odvodil přístup k exaktnímu odhadu parametrů.

Cíl 3 byl splněn volbou modelu generátoru časového signálu v kapitole 3, který je běžně v praxi a vědeckých pracích využíván pro popis těchto generátorů a v kapitole 5 byl analyzován vliv vzorkovací periody na kvalitu odhadů pomocí Monte

Carlo simulací. Bylo ukázáno, že optimální volba tohoto parametru je možná pouze v případě předem známých hodnot parametrů kovariančních matic šumů.

Cíl 4, neboli zhodnocení výsledků práce bylo částečně splněno popisem výsledných grafů simulací v kapitole 5 a popisem vlivu aproximace na odhady a bude doplněno nyní v závěru.

Ukázalo se, že při použití odhadu s aproximací kovarianční matice je zásadní volba vzorkovací periody. Nevhodná volba této periody může vést na nepřesný odhad parametru q_1 . Z výsledných grafů zobrazujících výsledky simulací bylo usouzeno, že je vhodné volit relativně malé vzorkovací periody pro odhad parametrů q_1 a R , při kterých se chyba aproximace zmenšuje. Naopak při odhadování parametru q_2 je vhodnější volit větší vzorkovací periody. Zásadní nevýhodou tohoto postupu je skutečnost, že nelze, bez předešlé znalosti přesným hodnot parametrů kovariančních šumů v systému, určit vhodnou vzorkovací periodu.

Naopak druhý přístup k odhadování parametrů bez aproximací kovariančních matic vykazuje, že se vliv volby vzorkovací periody na střední hodnotu odhadu parametru q_1 zmenší. Výhodou tohoto odhadu je, že je možné najít vzorkovací periodu, se kterou by odhad poskytl kvalitní výsledky pro všechny parametry najednou. Výslednou kvalitu odhadu by bylo možné ovlivnit vhodnou volbou počtu rozdílů měření L a délkou predikce N , ovšem tato práce kladla důraz na parametr vzorkovací periody s jehož vhodným nastavením můžeme odhadnout všechny tři parametry kovarianční matice šumů.

Celkově se v této práci podařilo aplikovat dva přístupy k odhadu parametrů kovariančních matic šumů působících na generátory časového signálu. Porovnáním obou přístupů byly zjištěny následující vlastnosti:

- Oba přístupy umožňují odhad všech tří parametrů kovarianční matice šumů generátoru časového signálu.
- Odhad bez aproximace kovarianční matice šumů stavu (5.25) vede pro parametr q_1 na nestranný odhad na rozdíl od odhadu s aproximací.
- V případě odhadů parametrů q_2 a R dávají oba přístupy totožné výsledky.

Bibliografie

- [All66] ALLAN, D.W. Statistics of atomic frequency standards. *Proceedings of the IEEE*. 1966, roč. 54, č. 2, s. 221–230. Dostupné z DOI: 10.1109/PROC.1966.4634.
- [AR18] ARNOLD, Travis J; RAWLINGS, James B. Uniqueness conditions for ALS problems. *IFAC-PapersOnLine*. 2018, roč. 51, č. 20, s. 469–474.
- [Bel74] BELANGER, Pierre R. Estimation of noise covariance matrices for a linear time-varying stochastic process. *Automatica*. 1974, roč. 10, č. 3, s. 267–275.
- [Bre93] BREAKIRON, Lee A. A comparative study of clock rate and drift estimation. 1993, s. 401–412.
- [DKS18] DUNÍK, Jindřich; KOST, Oliver; STRAKA, Ondřej. Design of measurement difference autocovariance method for estimation of process and measurement noise covariances. *Automatica*. 2018, roč. 90, s. 16–24. ISSN 0005-1098. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.12.040>.
- [Dun+17] DUNÍK, Jindřich; STRAKA, Ondřej; KOST, Oliver; HAVLÍK, Jindřich. Noise covariance matrices in state-space models: A survey and comparison of estimation methods—Part I. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2017, roč. 31, č. 11, s. 1505–1543. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1002/acs.2783>.
- [Fri82] FRIEDLAND, Bernard. Estimating noise variances by using multiple observers. *IEEE transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 1982, č. 4, s. 442–448.
- [Gal08] GALLEANI, Lorenzo. A tutorial on the two-state model of the atomic clock noise. *Metrologia*. 2008, roč. 45, č. 6, s. 175–182. Dostupné z DOI: 10.1088/0026-1394/45/6/S23.
- [Gro13] GROVES, Paul. *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, Second Edition*. 2013.

- [Hsi14] HSIAO, Keng-Jan. 17.7 A 1.89nW/0.15V self-charged XO for real-time clock generation. In: *2014 IEEE International Solid-State Circuits Conference Digest of Technical Papers (ISSCC)*. 2014, s. 298–299. Dostupné z DOI: 10.1109/ISSCC.2014.6757442.
- [Kos22] KOST, Oliver. *Odhad vlastností šumů v dynamických modelech*. Západočeská univerzita v Plzni, 2022. Dostupné také z: <http://hdl.handle.net/11025/50473>.
- [KDS23] KOST, Oliver; DUNÍK, Jindřich; STRAKA, Ondřej. Measurement Difference Method: A Universal Tool for Noise Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2023, roč. 68, č. 3, s. 1792–1799. Dostupné z DOI: 10.1109/TAC.2022.3160679.
- [KDS21] KOST, Oliver; DUNIK, Jindřich; STRAKA, Ondřej. Identifiability of unique elements of noise covariances in state-space models. *IFAC-PapersOnLine*. 2021, roč. 54, č. 7, s. 316–321.
- [Lee80] LEE, T. A direct approach to identify the noise covariances of Kalman filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1980, roč. 25, č. 4, s. 841–842.
- [LCZ19] LI, Xiang; CAI, Chenglin; ZHANG, Shougang. Research and Performance Evaluation of Atomic Clock in GPS Timing Terminal. 2019, s. 333–336. Dostupné z DOI: 10.1109/ICISCAE48440.2019.221646.
- [Ma+11] MA, Tao; CHEN, Jie; PENG, Zhihong; CHEN, Wenjie. Estimation of time series noise covariance using correlation technology. *Journal of Control Theory and Applications*. 2011, roč. 9, č. 2, s. 165–170.
- [Mat21] MATHWORKS, Inc. The. *MATLAB version: 9.12.0(R2021b)*. Natick, Massachusetts, United States: The MathWorks Inc., 2021. Dostupné také z: <https://www.mathworks.com>.
- [Meh72] MEHRA, Raman. Approaches to adaptive filtering. *IEEE Transactions on automatic control*. 1972, roč. 17, č. 5, s. 693–698.
- [Söd02] SÖDERSTRÖM, Torsten. *Discrete-time stochastic systems: estimation and control*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [ZT05] ZUCCA, C.; TAVELLA, P. The clock model and its relationship with the Allan and related variances. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. 2005, roč. 52, č. 2, s. 289–296. Dostupné z DOI: 10.1109/TUFFC.2005.1406554.

Seznam obrázků

5.1	Vliv velikosti vzorkovací periody na člen $Q_{1,1}$	26
5.2	Vliv velikosti vzorkovací periody na člen $Q_{1,2}$	27
5.3	Vliv velikosti vzorkovací periody na člen $Q_{2,2}$	27
5.4	Vliv velikosti vzorkovací periody na aproximovaný odhad q_1	32
5.5	Vliv velikosti vzorkovací periody na aproximovaný odhad q_2	33
5.6	Vliv velikosti vzorkovací periody na aproximovaný odhad R	34
5.7	Vliv velikosti T_s na aproximovaný odhad q_1 se změněnými parametry.	35
5.8	Vliv velikosti T_s na aproximovaný odhad q_2 se změněnými parametry.	35
5.9	Vliv velikosti T_s na odhad R se změněnými parametry.	36
5.10	Vliv velikosti T_s na odhad q_1 bez aproximací.	42
5.11	Vliv velikosti T_s na odhad q_1 bez aproximací.	43
5.12	Vliv velikosti T_s na odhad q_1 bez aproximací.	43
5.13	Porovnání odhadů parametru q_1	44
5.14	Porovnání odhadů parametru q_2	45
5.15	Porovnání odhadů parametru R	46

