



**FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI**

Diplomová práce

Řízení pohybu kolony vozidel s využitím vnitřní
symetrie

Vedoucí práce: Prof. Ing. Miloš Schlegel, CSc.
Vypracoval: Bc. Radek Pastyřík - A22N0097P

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2023/2024

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Bc. Radek PASTYŘÍK**
Osobní číslo: **A22N0097P**
Studijní program: **N0714A150011 Kybernetika a řídicí technika**
Specializace: **Automatické řízení a robotika**
Téma práce: **Řízení pohybu kolony vozidel s využitím vnitřní symetrie**
Zadávací katedra: **Katedra kybernetiky**

Zásady pro vypracování

1. Seznamte se s problematikou řízení vozidel v koloně. Zhodnoťte různé přístupy k řízení rozestupů mezi vozidly.
2. Seznamte se s definicí vstupně symetrického systému a metodou návrhu symetrické stavové zpětné vazby.
3. Ukažte, že kolona dynamicky identických vozidel tvoří vstupně symetrický systém.
4. Charakterizujte symetrické stavové zpětné vazby systému kolony vozidel a diskutujte jejich vlastnosti.
5. Vytvořte jednoduchý simulátor pro simulaci kolony vozidel s řízením.

Rozsah diplomové práce: **40-50 stránek A4**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

- J. Hou, G. Chen, J. Huang et al., Large-Scale Vehicle Platooning: Advances and Challenges in Scheduling and Planning Techniques, Engineering, (2023)
J. Königsmarkova, M. Schlegel, Input and Output Symmetric Dynamical Systems: Features and Control Design, 15th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis, (2022), 187-201
Z. Wang, G. Wu, M. J. Barth, A Review on Cooperative Adaptive Cruise Control (CACC) Systems: Architectures, Controls, and Applications, Proceedings of 2018 21st International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC), (2018), 2884-2891
E. Uhlemann, Platooning: Connected Vehicles for Safety and Efficiency [Connected Vehicles], IEEE Vehicular Technology Magazine, (2016), 13-18

Vedoucí diplomové práce: **Prof. Ing. Miloš Schlegel, CSc.**
Katedra kybernetiky

Datum zadání diplomové práce: **2. října 2023**
Termín odevzdání diplomové práce: **20. května 2024**



Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan



Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová
vedoucí katedry

Čestné prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne

.....

podpis autora

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu diplomové práce prof. Ing. Miloši Schleglovi, CSc. za odborné a kvalitní vedení práce, vynikající přístup, cenné rady a jeho veškerý čas, který mi věnoval v průběhu vypracování a při konzultacích práce. Nakonec děkuji mé rodině, která mě podporuje při studiu.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá návrhem řízení a jednoduchým simulátorem kolony vozidel. Cílem práce je navrhnout centrální symetrické řízení kolony a nalézt generalizované tvary zpětnovazebních matic se splněnými podmínkami na obecnou a řetězovou stabilitu. V práci jsou představeny definice řetězové stability, informační topologie, možné přístupy k centrální a distribuované strategii řízení. Velký důraz je kladen na aplikaci teorie symetrických systémů. Využitím dané teorie jsou rozšířeny metody LQR a stavové zpětné vazby. V případě symetrického LQR jsou hledány obecné tvary váhových matic vedoucí na symetrickou stavovou zpětnou vazbu stabilizující uzavřenou smyčku. Symetrická váhová matice $Q = C^T C$ je definována v závislosti na volbě výstupní matice C . V případě řízení symetrickou stavovou zpětnou vazbou jsou pro nižší počet vozidel analyzovány zpětnovazební matice přiřazující danou Jordanovu formu matici dynamiky uzavřeného systému. U některých Jordanových forem jsou nalezeny a představeny parametrizované zpětnovazební symetrické matice s volností ve vlastních číslech a počtu vozidel. Nakonec je uveden simulátor kolony využívající navržených a simulovaných symetrických řízení.

Klíčová slova: centrálně orientované řízení, konečně krokové řízení, lineární kolona, matematický model, parametrizované symetrické zpětnovazební řízení, řetězová stabilita, simulátor kolony vozidel, symetrická kolona vozidel, symetrická stavová zpětná vazba, symetrické konečně krokové řízení, symetrické LQR

Abstract

This master thesis deals with the design of a control system and a simple simulator of a vehicle platoon. The aim of the thesis is to design a central symmetric control of the platoon and to find generalized forms of feedback matrices with satisfied general and chain stability conditions. Definitions of string stability, information topologies, possible approaches to central and distributed control strategies are presented. Much emphasis is placed on the application of symmetric systems theory. Using the given theory, LQR and state feedback methods are extended. In the case of symmetric LQR, general forms of weight matrices leading to symmetric state feedback stabilizing closed loop are sought. The symmetric weight matrix $Q = C^T C$ is defined depending on the choice of the output matrix C . In the case of symmetric state feedback control, feedback matrices assigning a given Jordan form to the closed-loop system dynamics matrix are analyzed for a lower number of vehicles. For some Jordan forms, parameterized symmetric feedback matrices with freedom in eigenvalues and number of vehicles are found and presented. Finally, a platoon simulator using the proposed and simulated symmetric controls is presented.

Key words: centralized control, deadbeat control, linear platoon, mathematical model, parameterized symmetric feedback control, string stability, symmetric deadbeat control, symmetric LQR, symmetric state feedback, symmetric vehicle platoon, vehicle platoon simulator

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Úvod do řízení kolony vozidel	2
1.2	Rozvrhování a plánování kolony vozidel	4
1.2.1	Metody založené na pravidlech	5
1.2.1.1	Heuristické metody	5
1.2.1.2	Konečně stavový automat	5
1.2.1.3	Pole umělého potenciálu	6
1.2.2	Přístupy založené na modelu	7
1.2.2.1	Dynamika systému vozidla	7
1.2.2.2	Prediktivní řízení modelu	7
1.2.3	Další možné přístupy	7
1.3	Motivace	7
2	Kolona vozidel	9
2.1	Model kolony vozidel	9
2.1.1	Možné modely	10
2.1.2	Diferenciální rovnice kolony vozidel	10
2.1.3	Požadavky na rovnovážný stav	11
2.1.4	Model kolony vozidel v odchylnkách	12
2.1.5	Diferenciální rovnice odchylek polohy	13
2.1.6	Diferenciální rovnice odchylek rychlosti	14
2.1.7	Návrhové požadavky	14
2.1.7.1	Odchylnky poloh	14
2.1.7.2	Odchylnky rychlostí	15
2.1.7.3	Odchylnky vstupních sil	15
2.1.8	Stavový model kolony	15
2.1.8.1	Obecný model kolony	17
2.1.8.2	Typy kolony vozidel	17
2.1.8.3	Zjednodušený obecný model kolony	18
2.1.9	Vlastnosti systému	18
2.1.9.1	Obecná stabilita	18
2.1.9.2	Řiditelnost systému	19
2.1.9.3	Řetězová stabilita	19
2.2	Symetrické systémy	21
2.2.1	Podmínky symetrie systému	22
2.2.2	Určení matice symetrie	22
2.2.3	Vstupně symetrická kolona vozidel	23
3	Řízení rychlosti a rozestupů vozidel	25
3.1	Výhody strategií	26
3.2	Nevýhody strategií	26
3.3	Komunikace mezi vozidly	27
3.4	Přístupy centrálního řízení	28

	3.4.1	Stavová zpětná vazba	29
	3.4.2	Symetrické řízení	30
	3.4.3	Lineární kvadratický optimální regulátor	30
	3.4.4	Symetrické LQR	32
	3.4.5	Adaptivní řízení	33
	3.4.6	Prediktivní řízení modelu	34
	3.4.7	Proporcionálně-Derivační regulace	35
3.5		Přístupy distribuovaného řízení	35
	3.5.1	Proporcionálně-Derivační regulace	36
	3.5.2	Proporcionálně-Integračně-Derivační regulace	37
	3.5.3	Pole umělého potenciálu	38
	3.5.4	Lineární kvadratický optimální regulátor	38
	3.5.5	Prediktivní řízení modelu	39
	3.5.6	Řízení s dohodou	40
	3.5.7	Robustní řízení	40
	3.5.8	Vlnové řízení	41
	3.5.9	Adaptivní řízení	43
	3.5.10	Strojové učení	44
4		Návrh řídicích strategií	45
	4.1	LQR	45
	4.1.1	Volba matic C	46
	4.1.2	Určení váhových matic	46
	4.1.3	Určení řešení LQR	47
	4.2	Převedení na symetrické LQR	47
	4.2.1	Přínos symetrických systémů v koloně	48
	4.2.2	Úprava výstupních matic	48
	4.2.3	Určení váhových matic	48
	4.2.4	Určení symetrického řešení	49
	4.2.5	Symetrické LQR pro více vozidel	50
	4.2.6	Vývoj vlastních čísel	51
	4.2.7	Další možnosti výstupní matice	54
	4.3	Symetrická stavová zpětná vazba	57
	4.3.1	Nalezení stavové zpětné vazby	58
	4.3.1.1	Přiřazovaná matice L	58
	4.3.1.2	Návrh stavových zpětných vazeb	60
	4.3.2	Podmínky symetrické stavové zpětné vazby	61
	4.3.2.1	Struktura se shodnými vlastními čísly	61
	4.3.2.2	Struktura s jedním odlišným vlastním číslem	63
	4.3.2.3	Struktura rozdělená na vlastní čísla odchylek rychlostí a poloh	64
	4.3.2.4	Porovnání nalezených tvarů	65
	4.4	Diskrétní model	67
	4.4.1	Ověření vstupně symetrického diskrétního modelu	68
	4.4.2	Stabilita diskrétního systému	70
	4.4.3	Řízení s konečným počtem kroků	70
	4.4.3.1	Přiřazovaná matice L	70
	4.4.3.2	Návrh stavové zpětné vazby	71
	4.4.3.3	Symetrické řízení s konečným počtem kroků	71
	4.4.3.4	Omezení struktury stavovou zpětnou vazbou	73
5		Simulace navržených metod pro řízení kolony	74

5.1	Simulace navržených metod	74
5.1.1	Symetrické LQR	75
5.1.2	Struktura se shodnými vlastními čísly	77
5.1.3	Struktura s jediným různým vlastním číslem	81
5.1.4	Struktura ze shodných rychlostních a polohových vlastních čísel	82
5.1.5	Konečně krokové řízení	84
5.2	Simulátor kolony	86
5.3	Budoucí práce a vylepšení	87
6	Závěr	88
Seznam obrázků		90
Reference		93
7	Přílohy	99

1 Úvod

Práce je zaměřena na řízení kolony vozidel, které vychází z požadavku na efektivní automobilovou dopravu. Automobilová doprava ohrožuje lidské životy, a proto je nutné před uvedením do provozu splňovat velké množství požadavků, norem a standardů [1, 2]. V průběhu vývoje automobilové dopravy došlo k mnoha klíčovým vynálezům umožňující řešit a zabývat se řízením kolony vozidel.

Automobilový průmysl má od počátku výroby až do aktuální doby mnoho významných milníků. První automobil, jeho postupné zdokonalování, první radio v automobilu, elektrické vstřikování paliva, bezpečnostní pásy, ale i globální polohový systém, různé asistenční systémy a autonomní automobily představují některé důležité vynálezy posledních století. Důležitým vynálezem, který je možno využít ke komunikaci kooperativního řízení je **globální polohový systém (GPS)**. Jedná se o globální družicový polohový systém určující přesnou polohu. Dále asistenční systémy v podobě **protisrážkového systému** využívající senzory, tedy radary a případně kamery či lidary. Pomocí sensorů se určí vzdálenost objektů v cestě a umožňují automobilu reagovat na možnou srážku s objektem. Oblast asistentů při dopravě je v neustálém vývoji a možnosti asistenčních služeb v automobilech neustále zvyšují bezpečí a komfort řidiče. V aktuální době plno automobilek klade důraz na vývoj **autonomních automobilů**. Autonomní vozidla využívají informace o okolních vozidlech ze sensorů jako jsou lidary, kamery, radary a podobně. Využitím všech možných asistenčních služeb by autonomním vozům dodávalo dodatečnou bezpečnost k zaručení bezproblémového provozu. Zavedení autonomních vozidel by pro mnohé přepravní podniky představovalo snížení nákladů na dopravu a případných emisí. Další možné snížení spotřeby paliva mohou představovat automatické převodovky [1]. Automatické převodovky bývají téměř vždy využívány u nákladních vozidel přepravujících náklad na velkou vzdálenost s požadovanou maximalizací dojezdu. V případě nedostatečné kapacity vozu tak může být zavedení kolony nákladních automobilů přípustné a finančně výhodnější řešení přepravních podniků.

V předchozím odstavci je uvedeno několik významných technologií používaných v automobilovém průmyslu a to včetně zavedení autonomních automobilů do nákladní dopravy. S touto problematikou má úzký vztah tzv. "truck platooning", který si lze představit jako několik kamionů seřazených za sebou a spojených, dá se říct, do dálničního vlaku. Takovéto spojení více vozidel za sebou lze také označit jako kolonu vozidel. Mezi hlavní cíle jednoznačně patří zaručení snížení nákladů na dopravu, emisí a dále také zvýšení bezpečnosti, plynulosti a efektivity provozu. Jeden z možných náhledů na problematiku kolony vozidel představuje teorie multi-agentních systémů. Multi-agentní systémy rozdělují procesy rozhodování a řízení na jednotlivé agenty, kteří mají omezený přístup k informacím od ostatních agentů [3]. Tyto systémy zjednodušují složité problémy. Oblastí využití je mnoho a může se jednat o drony, automobily, nákladní automobily, armádu, ale dají se využít i v distribuované optimalizaci, energetice, vesmíru a podobně [4]. Zjednodušení může být využito i pro řízení kolony vozidel se zaměřením na kooperativní řízení a autonomní vozidla [5]. Aplikace agentů mají značný vliv na snížení zpoždění, emisí a spotřebu paliva [6]. Uspořádání více autonomních vozidel v podélné koloně lze vnímat jako inteligentní agenty, což může vést k efektivnějšímu řízení kolony [5]. V práci [3] je zveřejněna teoretická analýza ke kooperativnímu držení formace více agentů využitím maticové teorie, algebraické grafové teorie a teorie řízení.

Rozdíly mezi přístupy k řízení zahrnují způsob komunikace mezi agenty. Centrální

řízení využívá komunikaci s hlavním inteligentním agentem a centrální infrastrukturou silnice. Vedoucí agent řídí zbylé agenty kolony. V případě selhání centrálního řídicího objektu může dojít k fatálnímu selhání celého systému. U distribuovaného řízení inteligentní agenti komunikují mezi sebou bez centrálního zprostředkovatele. Distribuovaná strategie zohledňuje samotné agenty pracující v týmu se společným cílem. Užití distribuované strategie může snížit rozsah infrastruktury a náklady na údržbu. Náročná informační komunikace může mít nežádoucí účinky, jako je dopravní zpoždění přenosu informace, zhoršení účinnosti a náklady na infrastrukturu a údržbu [6]. Další nežádoucí situace distribuovaných metod mohou vést na zašuměná data, výpadek informace (drop-off packet) a podobně [7, 8].

1.1 Úvod do řízení kolony vozidel

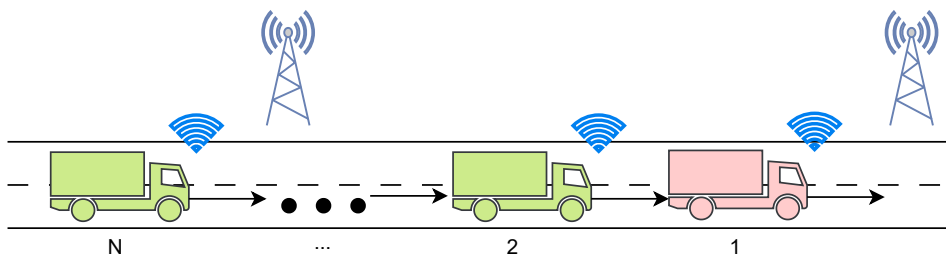
Hlavní téma práce je zaměřeno na aktuálně řešenou problematiku ve světě zabývající se automatickým řízením podélného pohybu kolony vozidel. Upřesnění problematiky vychází zejména z požadavků praktického hlediska a technických možností určení či měření aktuálního stavu pohybující se kolony vozidel. K hlavním požadavkům kolony vozidel jednoznačně patří stabilita a i takzvaná řetězová stabilita. Práce bude zaměřena na návrh statické zpětné vazby. Konkrétně se bude práce zaměřovat na využití symetrické stavové zpětné vazby a hledání nejrozsáhlejší množiny všech možných řešení. Určení dostatečné kvantity řešení pro různě rozsáhlou kolonu vozidel by taktéž mohlo vést na zaručení zobecněných výsledků návrhu řízení. Využití symetrické stavové zpětné vazby vyžaduje znalost veškerých stavů modelu kolony vozidel. Tento způsob řízení kolony vozidel poté prozatím představuje centrální řízení. To zejména z výpočetní náročnosti, která aktuálně nedovoluje najít i řízení s omezenou strukturou [9].

Řízená kolona vozidel, čili jízda vozidel v těsné formaci za sebou, s minimálními rozestupy (platooning) představuje inovativní technologický vývoj. Jedná se zejména o oblast silniční dopravy s potenciálem značně zlepšit náklady na dopravu, bezpečnost, efektivitu a plynulost provozu. Hlavním cílem vědců je aplikace těchto metod v praxi, které by tak mohli vést ke snížení spotřeby paliva. Zároveň dokáže přispět i k udržitelnosti společnosti současným snížením produkováných emisí. Platooning se velmi často využívá pro skupinu v řadě uspořádaných nákladních automobilů [10, 11]. Při menších rozestupech se zmenšuje odpor vzduchu s výjimkou vedoucího automobilu, který má odpor vzduchu větší. Jízda v této blízké formaci tak může zaručit žádaného snížení spotřeby paliva až od 14%. Jakákoliv úspora spotřeby paliva zaručuje i další pozitivní vliv v podobě snížení vypuštěných emisí do našeho ovzduší [11]. Bezpečnost při platooningu spočívá zejména v úplném či částečném potlačení lidského faktoru. Lidský faktor v dopravě může představovat právě sešlápnutí plynového či brzdového pedálu a nebo další jakési akutní manévry. Každopádně, veškeré tyto situace člověk vyhodnotí opožděně. V extrémních situacích se lze při opožděném úkonu dostat až do velmi kritických dopravních nehod. Řízení kolony vozidel na minimálních rozestupech mezi vozidly při praktickém využití automaticky udržuje požadované vzdálenostní či časové rozestupy. Zároveň je žádané udržovat kolonu na požadované rychlosti, která se může průběžně měnit. Při viditelné překážce před prvním vozidlem (vedoucí, leader) se rychlost jedoucí kolony bude postupně snižovat až do případného zastavení, při kterém budou vozidla stále s požadovanými rozestupy. Různé rozšíření problematiky by tak mohlo dále navrhovat využití případného odbočení z pruhu pro celou kolonu. Při řízení kolony vozidel může docházet k problému spojeného s šířením poruchy postupně mezi vozidly. Jedná se o takzvanou řetězovou stabilitu. Při splnění této podmínky se porucha nezesiluje postupným šířením kolonou

vozidel. Při dostatečném potlačení poruch a vhodně navrženém stabilizujícím řízení se celá kolona bude pohybovat s požadovanou rychlostí a rozestupy vozidel. Tím je zaručeno vyšší plynulost a efektivitu provozu, které eliminují zpomalování dopravy lidským faktorem v podobě postupného brzdění či nezbytného přidávání plynu [9]. V práci proběhne rozbor různých přístupů k řízení rozestupů vozidel v koloně a jejich aplikací v praxi.

Velký vliv a zároveň jeden z hlavních požadavků na kolonu vozidel je stabilita řízené kolony. Oproti klasickým metodám řízení, kde se využívá pouze obecná stabilita, se zde vyskytuje i takzvaná řetězová stabilita. Obecná stabilita zajišťuje dosledování požadovaných hodnot a potlačení (regulaci) vzniklých chyb. U řetězové stability je nutno se zabývat jakou odezvu budou mít zbylá vozidla v řetězci při vzniklé poruše na nějakém z vozidel. Jedná se tedy o chybu postupující řetězcem neboli linií kolony. Je žádoucí, aby se chyba přenesená z jednoho vozidla postupně na další vozidla v linii nezvyšovala. Dodaná chyba se tedy snižuje postupným průchodem jednotlivých vozidel řetězce. Takové pravidlo řetězové stability se dá jednoduše zformulovat do zápisu v podobě H_∞ normy. Konkrétní zápis bude v práci následně popsán a budou i taktéž zmíněny některé možné zápisy řetězové stability. Matematické zápisy řetězové stability je možné volit různě, ale jsou použity podle zvolené komunikační topologie mezi jednotlivými vozidly [9, 12].

Při návrhu zpětnovazebního řízení je možno se zabývat centrálně orientovaným či distribuovaným přístupem řízení [3, 13]. Na obrázku (1) lze vidět rozvržení kolony o libovolné délce N vozidel.



Obrázek 1: Uspořádání kolony vozidel

Každý z těchto přístupů má pro aplikaci své výhody i nevýhody a dle zvoleného přístupu je nutno návrh dle toho přizpůsobit. Výhoda pro centrální řízení spočívá v umístění řídicího algoritmu do společné infrastruktury, která by určovala rychlosti a vzdálenosti jednotlivých vozidel. Nevýhodou by byl ihned opak představující náročnost znalosti požadovaných veličin (poloha, rychlost) veškerých vozidel v koloně. Zavedením distribuovaného řízení je možno redukovat potřebnou znalost veškerých veličin systému, ale rozšiřujeme komunikaci mezi více vozidel. Dle zvolené informační topologie se určuje náročnost komunikace mezi vozidly a poté získané výsledky nemusí být tak přesné. U centrálního přístupu existuje centrální objekt, který pomocí komunikace přes vysílače či satelity ovládá veškeré regulované stavy vozidel. V případě, že je využita stavová zpětná vazba, je nutno se zabývat strukturou zpětnovazební matice. Omezená struktura zpětnovazební matice představuje, které stavy modelu se využívají při řízení. V práci [9] jsou ukázány možnosti volby struktur zpětnovazebních matic k docílení centrálního nebo distribuovaného řízení. Omezováním struktury matice tak je možné získat některé z nejpoužívanějších informačních topologií pro rozestupy mezi vozidly. V práci [12] je taktéž ukázáno, že volba informační topologie má značný vliv na stabilitu a dynamiku kolony. Pro distribuovaný návrh se problematika může rozdělit do čtyř částí, a tedy na

dynamiku vozidla, informační topologii, distribuované regulátory a způsoby rozestupů mezi vozidly [14, 15]. V práci [16] je tato základní čtveřice rozšířena ještě o dvě další části zabývající se kvalitou komunikace a poruchami různého typu. Nejčastěji používané poruchy v koloně vozidel tak mohou být klasifikovány do několika typů. Nejčastěji mohou představovat počáteční podmínky na vedoucí vozidlo či pro veškerá vozidla kolony. Další nejčastěji používané poruchy představují působení jakékoliv vnější přidané poruchy bez počátečních podmínek a případně i s nimi.

Hlavní úkol řízení kolony vozidel představuje automatický pohyb všech jedoucích vozidel v linii za sebou se stanovenými rozestupy a danou rychlostí. Rozestupy vozidel tak lze rozdělit na konstantní a proměnné rozestupy. Mnoho výzkumů se zabývá určováním co nejmenších rozestupů při použití proměnných vzdálenostních rozestupů. Konstantní přístup představuje klasickou metodu. Metoda je rozsáhle prozkoumanou v mnoha různých situacích (komunikační zpoždění, saturace aktuátoru, neurčitost parametrů, neznámé poruchy, heterogenní kolona a podobně). Mezi proměnné přístupy rozestupů lze zařadit pár klasických přístupů, například časově konstantní rozestup před vozidlem, kvadratický rozestup a adaptivní rozestup. Využití těchto přístupů je obdobně prozkoumáno pro různá využití a v konkrétních případech (vliv různých architektur řízení, nenulové počáteční chyby rozestupů a podobně). Následně, vzniká nová strategie, využívající kombinaci konstantního vzdálenostního a časového rozestupu. Využití zaručuje řetězovou stabilitu, zlepšuje kapacitu na silnici a bere ohled na saturaci aktuátoru a neznalost parametrů a poruch. Každopádně mnoho situací (sníh, mlha, déšť) se značným vlivem na bezpečnost není důkladně vyšetřeno. V takových situacích může být mezi dynamikou vozidla a silničními podmínkami zaveden vztah silničního tření. Dle silničního tření je možno následně měnit vzdálenostní rozestupy vozidel [17].

1.2 Rozvrhování a plánování kolony vozidel

V dané části budou stručně zmíněny některé další oblasti výzkumu vycházející z řízení kolony vozidel. Budou stručně zmíněny obecné přístupy či techniky využívané k rozvrhování a plánování kolony vozidel. Takové přístupy vedou k formování kolony, řízení kolony při vyjíždění z kolony a tak dále. Tyto přístupy jsou založené na pravidlech, modelu, učení, optimalizaci a agentech.

Řízení kolony vozidel vychází ze základních bloků, jako je podélné udržování vzdáleností a komunikačních technologií mezi vozidly [18, 19]. V posledních letech se ale z těchto přístupů vyvinulo mnoho dalších technik zaměřených na problematiku řízení kolon vozidel [20]. Kolona vozidel může být rozdělena do čtyř oblastí výzkumu zabývající se: řízením, plánováním, rozhodováním a komunikací v koloně. Od přístupu plánování rychlosti jediného vozidla se liší dodatečnými požadavky. Požadavkem na dodržení řetězové stability a zároveň udržování rozestupů mezi vozidly. S problematikou tak vznikalo více možných oblastí výzkumu, jako je například projíždění kolonou na křižovatkách se světelnou signalizací, řízení kolony se změnou směru, řízení formací a dále spojování více kolon [21].

S kvalitnějším vývojem modelů vozidel a kolon jsou zabudovány přesnější modely do metod založených na pravidlech umožňující přesnější odhad budoucích stavů. Taktéž s postupným zpřesňováním hodnotících kritérií existují studie na optimalizační metody, kde je využito celočíselného lineárního programování a dynamického programování. Každopádně, pro zvyšující se komplexnost prostředí tak měřením ze sensorů se generuje

příliš velké množství dat. Využití takového množství pozorovaných dat tak zaručuje extrémní složitost nastavovat pravidla. V poslední době začíná být více populární přístup založený na učení se zvyšující inteligencí rozhodování pro jednotlivá vozidla v podobě agentů. Učící se přístupy jsou tedy využívány v kombinaci s více agentovými metodami založenými na teorii her ke koordinaci a rovnováze zájmů jednotlivých agentů. Jednotlivé přístupy nemusí být tedy použity samostatně, jelikož samotné přístupy mají své výhody i nevýhody. Mohou být využity v kombinaci, která zaručí větší efektivitu a případné odstranění některých nedostatků [21].

1.2.1 Metody založené na pravidlech

Využití těchto metod je založeno na zisku zkušeností od expertů. Takové metody disponují zřejmou logikou s jednoduchou pochopitelností. Aplikace těchto jednodušších algoritmů mají v reálném čase dostatečně dobrou funkčnost. S poměrnou jednoduchostí a pochopitelností však dochází k nedostatkům metod při složitějších dopravních situacích. To převážně z důvodu, že nelze nadefinovat dostatečně mnoho až nekonečně mnoho žádaných komplexních dopravních situacích, ke kterým může neobvykle dojít. Nedostatky takových metod jsou značně omezující v hlubším vývoji. Každopádně plno metod, jako jsou heuristické metody, konečně stavový automat a pole umělého potenciálu, se z daného přístupu adoptovalo k jednoduchému a rychlému řešení problému kolony vozidel [21].

1.2.1.1 Heuristické metody

Heuristické metody jsou taktéž založeny na předání zkušeností od lidského experta k sestavení pravidel v podobě heuristické funkce. Využitím těchto metod lze docílit pouze sub-optimálního globálního řešení v porovnání s dalšími optimalizačními algoritmy. Přestože výsledné řešení je sub-optimální, heuristické metody mají většinou v reálném čase vyhovující funkčnost vedoucí na efektivní nasazení algoritmů do vozidel reálného světa [21].

Využitím heuristických metod tak je možno nalézt aproximované optimální řešení, neboli řešení blízké optimálnímu, pro rozvrhování řízení formace kolony vozidel větších rozměrů [21, 22]. Využití heuristických metod je rozsáhlé. Může být využíváno i u určování rychlosti vozidla při průjezdu křižovatkou [23]. Heuristické metody bývají každopádně využívány převážně jen jako záložní metody k zajištění funkčnosti v reálném čase v situacích s velkým počtem vozidel nebo pro problémy s malým optimalizačním prostorem. To i přestože mají dobrou funkčnost v reálném čase, efektivnost a pohodlnost [21].

1.2.1.2 Konečně stavový automat

Jedná se o metodu využívající konečného počtu stavů odlišných funkčních módů. Systém se tak může nacházet vždy pouze v jednom jediném stavu v daném časovém okamžiku a dle odlišných situacích přepíná mezi definovanými stavy. Daná metoda je využívána především na rozvrhování řízení kolony vozidel při spojování, rozdělování kolon a změny do jiného pruhu. Proces spojování kolon je možno rozdělit do čtyř procesů konečně stavového automatu, tedy vytváření tempa, současného a sekvenčního párování a posledně bezpečného slučování kolony [21].

Pomocí této metody se dá řešit taktéž plánování rychlosti při procesu spojování

kolon. Proběhla studie, z které vychází protokol využívající konečně stavového automatu s manévry umožňující sloučení, oddělení a změnu jízdního pruhu. Pomocí těchto manévru tak je umožněno zaručit operace představující vstup vozidla do kolony, opuštění vedoucího vozidla kolony a případně i následníků. Komunikace mezi těmito vozidly je založena na kooperativní komunikaci vozidel, konkrétně s komunikací jednoho prvního předchůdce. Proces spojování kolon je rozdělen do tří procesů, a tedy požadavku, odpovědi a provedení sloučení. Obdobně tomu tak je i u opuštění kolony vozidel [24].

Nedostatky metod nastávají zejména z nemožného definování všech možných stavů při zvyšování komplexnosti prostředí. Je obtížné zaručit správné vypořádání s komplexním prostředím zahrnující nekonečně mnoho odlišných situací. Přidání nových stavů může mít zároveň negativní účinek na některé již vytvořené stavy. Taktéž příliš velká kvantita stavů může zaručit komplikovanost logiky. Stavovým konečným automatům použitých v komplexních prostředích vzrůstá konkurence metodami umělé inteligence, jako je například posilovací učení (reinforcement learning) [21].

1.2.1.3 Pole umělého potenciálu

Jedná se o metodu využívanou k plánování cesty více objektů s funkcí potenciálového pole navrženou běžně v závislosti na bezpečnosti, rychlosti či na mnoha dalších požadavcích. Jelikož tato metoda plánování slouží i k řízení podélného pohybu kolony, bude rozepsána a vysvětlena značně více oproti dalším metodám plánování a rozhodování. Princip spočívá v simulaci různých vyhodnocovacích funkcí v prostorovém měřítku jako potenciální pole, a tím simulovat silou pohyb agenta v prostoru [21]. V práci [25] je odvozen zákon řízení pro PD regulaci podélné kolony založen na gradientu potenciální funkce. Taktéž jsou definovány potenciálové funkce, kde jedna z nich je kvadratická a další jsou exponenciální. Průběh těchto potenciálních funkcí představuje energii systému v závislosti na chybě polohy. Pro chybu polohy v ustáleném stavu zaručuje nulovou chybu polohy a taktéž zaručuje nulovou energii systému. Exponenciální potenciálové funkce slouží jako odpuzovací funkce v případě dostatečného přibližování vozidel. Pro dostatečně se blížící vozidla dojde k razantnímu vzrůstu energie. Hlavním cílem vozidel je minimalizovat energii systému, což se zaručí postupným snižováním energie pomocí exponenciální potenciální funkce. Trajektorie pohybu agenta vychází relativně optimálně a splňuje více vyhodnocovacích kritérií najednou.

Metoda je taktéž využita k řízení rozestupů mezi vozidly podélné kolony poprvé v podobě jedno-dimenzionálního potenciálového pole. Hlavní využití metody tak směřuje na udržování malých vzdáleností mezi vozidly a k zamezení srážek vozidel. Funkce potenciálového pole je definována takzvanou Morseovou funkcí potenciálního pole. Konkrétní definice této funkce pochází z atomové fyziky a v práci je mírně adaptována. Zákon řízení je následně určen gradientem Morseovy funkce a druhé složky odpovídající součtu chybových odchylek. Využitím metody zaručuje dosažení svých cílů, ale nezaručuje splnit dodatečné požadavky v podobě komfortu či vysoké bezpečnosti [25].

Metoda jedno-dimenzionálního potenciálového pole je dále rozšířena na dvou-dimenzionální metodu k řízení rozestupů vozidel podélné kolony. Využití metody umělého potenciálního pole se dále rozšířilo i na řízení postranní vzdálenosti, a tedy určující vybočování z pruhu [26]. Metoda představuje elegantní a jednoduché řešení, které umožňuje si poradit s velkým množstvím překážek při malé výpočetní náročnosti. Každopádně, metodu je nutno využívat v kombinaci s dalšími optimalizačními

vyhledávacími technikami k zajištění trajektorie [21].

1.2.2 Přístupy založené na modelu

Metody založené na modelu slouží k analýze dynamických modelů řízených objektů. Taková analýza slouží k implementaci řízení, jako je řízení inverzní dynamikou nebo prediktivní řízení. Postupným vývojem teorie vozidel a dopravy se vyvíjí komplexnější modely vozidel a dopravy. Kvůli detailnějším modelům pro kolonu vozidel je možno zaručit lepší výsledné chování využitím pokročilejších algoritmických řízení [21].

1.2.2.1 Dynamika systému vozidla

Využití modelu dynamiky systému dodává různým řídicím algoritmům teoretické podklady. Pomocí teorie tak je možno určit například konvergenci. Při rozvrhování bývá využívána podélná dynamika vozidel k určení doby jízdy. To může vést k sestavení plánu, podle kterého za sebou budou následovat určená vozidla [21].

1.2.2.2 Prediktivní řízení modelu

Hlavním požadavkem využití prediktivního řízení je znalost řízeného modelu. Zaručením velmi kvalitní znalosti modelu poté při využití dosahuje velmi přesné a dobré funkčnosti a výsledků řízení. Nicméně, při využití prediktivního řízení se musí brát v potaz, že doba výpočtů bude poměrně dlouhá. Existuje mnoho výzkumů využívající prediktivní řízení v oblasti kolony vozidel. Některé z nich jsou zaměřeny na změnu pruhu [27]. Další výzkumy kombinují zároveň změnu pruhu a podélné řízení založené na kinematickém modelu [28].

1.2.3 Další možné přístupy

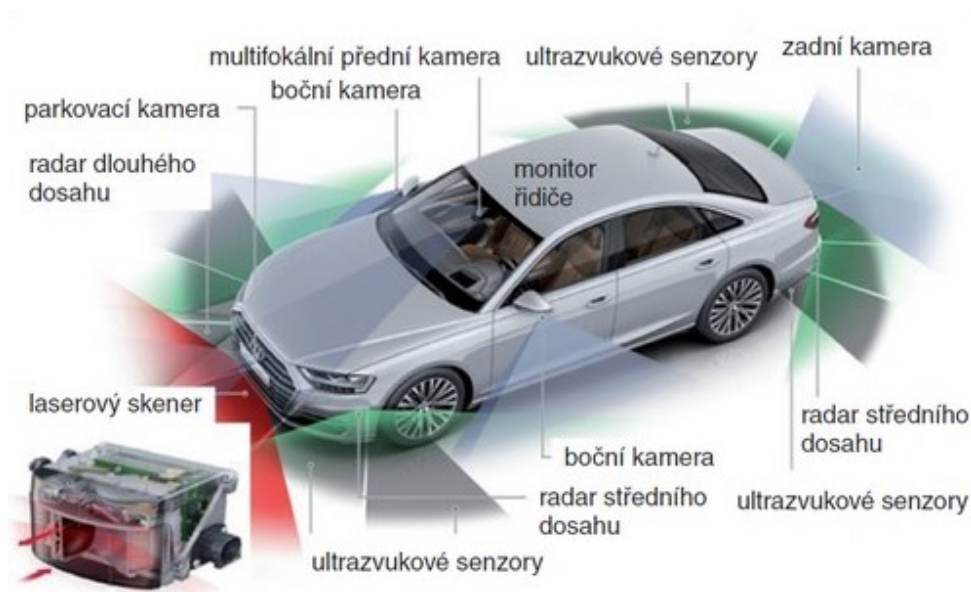
V práci [21] je zmíněno mnoho dalších přístupů a jejich principů, které jsou i podrobně popsány. Další možné zmíněné přístupy jsou optimalizační metody, datově řízené učící metody a multi-agentní metody. Mezi optimalizované metody lze zařadit dynamické a celočíselné lineární programování. Dále datově řízené učící metody představují metody umělé inteligence a využívají například dozorové učení (supervised learning) a nebo posilující učení. Posledně se využívají multi-agentní systémy, které vychází z teorie her a nebo jejich kombinací s metodami umělé inteligence, tedy multi-agentní posilující učení.

1.3 Motivace

Práce představuje rozšíření bakalářské práce [9] zaměřující se na teorii symetrických systémů a její využití při návrhu stavové zpětné vazby, tedy návrh symetrické stavové zpětné vazby. Využití symetrické stavové zpětné vazby spočívá ve zjednodušení celého problému. Teorií symetrických systémů jsou zavedeny pravidla, pomocí kterých se kolona vozidel převede do formace kruhové kolony, přestože bude stále fungovat jako podélná kolona jedoucí v linii. To znamená, že první vozidlo má dva sousedy, místo jediného následujícího. Obdobně tomu tak je i u posledního vozidla kolony, který má svého předchůdce a dodatečně musí znát i předchůdce vyskytujícího se na počátku kolony. Využití této teorie zavádí do problematiky zjednodušení i v podobě odstraňující potřebnou znalost pořadí vozidel v koloně. Každé vozidlo tak může být libovolně rozmístěné v koloně a zákon řízení bude pro každé vozidlo stále stejný. Volnost ve výběru vlastních čísel lze využít pro snížení informačních vazeb potřebných k realizaci řízení zpětnou vazbou. Každopádně dosažení cíle značně komplikuje výpočetní náročnost, a

proto je požadována důkladná analýza všech možných nalezených řešení a nalezení obecného řešení.

Vozidla řízena bez potřeby člověka? Tak by bylo možné si představit poměrně blízkou budoucnost. V nynější době již existují vozidla, která využívají různých asistenčních služeb či velkého množství senzorů viz obrázek (2). Navržené a implementované funkce jsou v podobě tempomatů, adaptivních tempomatů, udržování aktuálního pruhu, ale i samostatného zaparkování a mnoho dalších již implementovaných funkcí v nejnovějších vozidlech [29]. Každopádně nároky na vývoj dopravy se zvyšují a tak mnoho dalších problémů při zkoumání vzniká. Plně automatická doprava je velkým krokem do budoucnosti a zároveň si žádá vyřešit mnoho rozvětvených oblastí vycházející právě z problematiky řízení kolony vozidel. Daná problematika tak může zaujmout, motivovat a mířit na mnoho cílů. Jak vlastníky vozidel z pohledu pohodlnosti či zmenšení nákladů na palivo, tak například naši planetu z pohledu snížení emisí vycházejících ze snížení potřebného paliva. Přínos by byl značně obohacující pro naši společnost, mírně čistější ovzduší, plynulejší a cenově lepší dopravu, dodatečnou bezpečnost a dle možností i jakousi úroveň pohodlnosti. Každopádně by se v řešení muselo zahrnout velké množství komplexních situací při dopravě a splnění potřebných standardů a bezpečnosti.



Obrázek 2: Zobrazení bezpečnostních senzorů automatizovaných vozidel [30]

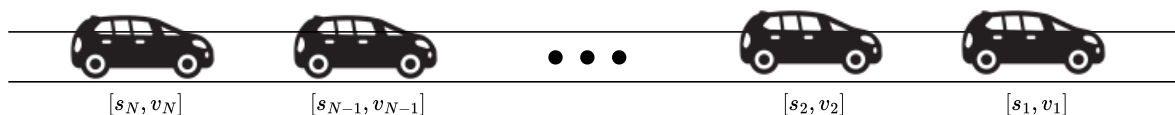
2 Kolona vozidel

Kolonu vozidel je možno definovat jako uspořádání, minimálně dvou až libovolného počtu, za sebou zařazených různých vozů. Význam udržování těsných rozestupů vozidel spočívá v optimalizaci jejich uspořádání na rovinné podélné ploše za účelem dosažení efektivního a bezpečného provozu. Praktické využití umožňuje minimalizovat spotřebu paliva, snížit náklady spojené s provozem vozidel a omezit emise škodlivých látek do ovzduší. Dále přispívá k zajištění bezpečnosti dopravy tím, že se minimalizuje riziko kolizí a umožňuje se lépe kontrolovat plynulost provozu na silnicích. Uspořádání vozidel může být klíčové i z hlediska organizace dopravního systému a optimalizace dopravních toků ve městech i na dálnicích. Tímto způsobem lze efektivněji využívat infrastrukturu a minimalizovat dopravní zácpy.

V dané části práce bude postupně zavedena potřebná terminologie a vyjádřen obecný model kolony vozidel. Dále je vyjádřen model, který bude v práci využíván i s veškerými zavedenými zjednodušeními. Poté je vysvětlena teorie symetrických systémů s potřebnými podmínkami a je představena kolona vozidel jako symetrický systém. Pomocí zmíněného přístupu ke koloně proběhne v dalších částech práce návrh řízení pro vstupně symetrický systém. Pomocí tohoto přístupu se provedou pokusy směřující na nalezení co největšího množství možných řešení. Pomocí nalezených řešení proběhnou experimenty cílené na omezení informační topologie a určení zobecněného algoritmu přiřazení vlastních čísel při libovolném počtu vozidel.

2.1 Model kolony vozidel

Jsou předpokládány za sebou seřazená vozidla, které je možno uspořádat do lineární či kruhové kolony. Každé vozidlo má zadefinované veličiny určující polohu s_i a rychlost vozidla v_i , kde $i \in \langle 2, \dots, \infty \rangle$ představuje celočíselnou pozici vozidla. Lineární uspořádání představuje seřazení libovolného počtu N vozidel na rovinné silnici (například dálnice), a tedy veškerá vozidla sledují vždy svého vlastního předchůdce. První vozidlo, taktéž vůdce či leader, udává rychlost celé kolony, která se dle využití kooperativní adaptivního řízení může v průběhu lišit či adaptovat. Požadovaná rychlost je tak shodná pro každé vozidlo kolony a každé z nich se jí snaží udržovat. Taková lineární či podélná kolona je zobrazena pro přehled na obrázku (3).



Obrázek 3: Lineárně (podélně) uspořádaná kolona vozidel

Pro cyklické uspořádání jednotlivých automobilů je chování obdobné. Cyklickou kolonu si lze představit jako vozidla na kruhovém objezdu. Jednotlivé automobily opětovně sledují vozidlo před sebou. Změna chování nastává u posledního vozidla celého uspořádání, které je následováno vůdcem kolony. Pro definovanou lineární či kruhovou kolonu je tak možno zavést pohyb k -tého vozidla pomocí dvou diferenciálních rovnic. V praxi se nachází rozsáhlá množina modelů, které je možno využít pro modelování kolony vozidel. V této práci budou využívány diferenciální rovnice a model kolony vycházející z [31]. Taktéž budou zmíněny některé další modely, které je možno využít.

2.1.1 Možné modely

V dané části proběhne souhrn použitelných modelů této problematiky a stručně bude řečena výhodnost využití některých z nich:

- obecný lineární model [32, 33],
- model druhého řádu [31, 34, 35],
- model třetího řádu [25, 35, 36],
- nelineární model [37, 38].

Volba vhodného modelu může zaručit přesnější výsledky. Naopak volba modelu nedostatečně popisující chování vozidel, jako je model se samostatným integrátorem, zaručuje horších výsledků. I když model druhého řádu dává vhodné výsledky, stále nezahrnuje některé funkce reálného vozidla. Trendem ke zlepšení kvality bývá zvětšení vektoru stavu v modelu, tedy přidání další derivace [35]. Přestože model druhého řádu nedává tak podrobný popis vozidel, stále představuje vhodnou volbu. Proto se bude v práci využívat právě tento model, který popisuje změnu polohy a rychlosti. Popis těchto veličin bude představen v další části pomocí dvou diferenciálních rovnic.

2.1.2 Diferenciální rovnice kolony vozidel

Vozidlům tvořící řetězové uspořádání je nutno zavést dynamiku. Pomocí dynamiky seskupených vozidel je dále možno využít mnoha zákonů řízení. Pomocí zvolených zákonů řízení bude dále možno tyto modely automaticky ovládat. Je nutno definovat potřebné veličiny:

- $s_k(t)$ - poloha k -tého vozidla v čase t ,
- $y_k(t)$ - rychlost k -tého vozidla v čase t ,
- $f_k(t)$ - hnací síla k -tého vozidla v čase t ,
- m_k - hmotnost k -tého vozidla,
- k - index neboli pořadí z dvou až libovolného počtu N vozidel.

Zavedením tohoto popisu lze zapsat první diferenciální rovnici k -tého vozidla ve tvaru:

$$\frac{d}{dt}s_k(t) = y_k(t), \quad (1)$$

kde časové derivaci aktuální polohy k -tého vozidla odpovídá přímo úměrně rychlosti daného vozidla. Druhá diferenciální rovnice vychází z druhého Newtonova pohybového zákonu. Hmotností vynásobená změna rychlosti k -tého vozidla v čase odpovídá působícím silám.

$$m_k \frac{d}{dt}y_k(t) = -g_k(y_k(t)) + f_k(t) \quad (2)$$

Funkce g_k v závislosti na rychlosti vozidla představuje třecí sílu k -tého vozidla. Pro třecí sílu platí, že:

$$g_k(0) = 0, \quad (3)$$

$$y_k(t)g_k(y_k(t)) \geq 0, \quad (4)$$

kde zmíněné podmínky (3,4) určují počáteční nulovou třecí sílu a třecí sílu, která je definována jako nezáporná.

V práci [31] jsou zavedeny odchylky poloh od požadovaných hodnot. Dále budou představeny požadavky rovnovážných stavů.

2.1.3 Požadavky na rovnovážný stav

Řízení kolony vozidel je důležité především z důvodu, že je možno udržovat dostatečně nízké rozestupy mezi těmito vozidly. Rozestupy mezi vozidly je nutno definovat předem vhodnou volbou, tedy jako kladný rozestup. Taktéž je možno v průběhu řízení tyto rozestupy upravovat, případně i zmenšovat. Rozestup představuje požadovanou vzdálenost mezi k -tým a $(k + 1)$ -tým vozidlem. Jedná se tak o konstantní bezpečnostní vzdálenost poloh dvou vozidel, která se může lišit mezi jednotlivými vozidly. Do této konstantní mezery vozidel je zahrnut i bezpečnostní rozestup, který je v práci zvolen shodně u veškerých vozidel. Rozestupy vozidel však nemusí být pouze konstantní, ale mohou představovat i časově proměnné rozestupy [31]. Často využívaný bývá taktéž časový rozestup, který udržuje časovou mezeru před každým vozidlem. Taková mezer je závislá dle rychlosti jízdy. Tento rozestup se určí jako $D_k = h_k v_k(t)$, kde pro každé vozidlo k představuje h_k časový rozestup a $v_k(t)$ rychlost v čase t [33]. Tyto rozestupy lze označit následovně:

- Δ_k - požadovaný konstantní vzdálenostní rozestup mezi vozidly,
- D_k - požadovaný časový rychlostně závislý rozestup mezi vozidly.

Dalším požadavkem je rychlost vozidel v řetězovém uspořádání. Rychlost kolony je definována vedoucím vozidlem. To znamená, že veškerá vozidla se snaží udržovat rychlost shodnou podle vedoucího vozu. Jedná se tak o referenční rychlost shodnou pro každé vozidlo, která se může v průběhu řízení měnit či adaptovat dle potřeby. Tato rychlost je označena:

- v - požadovanou rychlost vozidel celé kolony.

Poslední požadavek je zaměřen na třecí sílu. Při pohybu kolony s požadovanou rychlostí v lze definovat konstantní sílu potřebnou k převýšení síly odporu vzduchu, která působí na k -té vozidlo. Taková síla je označena:

- ϕ_k - potřebná síla převyšující sílu odporu vzduchu při konstantní rychlosti v .

Konstantní síla je úměrná třecí síle v závislosti na ustálené požadované rychlosti a lze ji zapsat:

$$\phi_k = g_k(v). \quad (5)$$

Tyto požadavky budou dále využity při odvození modelu využívajícího odchylek veličin od požadovaných hodnot.

2.1.4 Model kolony vozidel v odchykách

Pomocí původního modelu je možno určit polohy a rychlosti jednotlivých vozidel. V této části bude představen model popsany diferenciálními rovnicemi, určující změnu polohy a rychlosti, na model s odchykami. Odchyky tak budou představovat chybu rozdílu původních veličin od požadovaných veličin, tedy rovnovážných stavů kolony zmíněných dříve (2.1.3). Budou zdefinovány nové proměnné, které budou dále využity v práci pro model kolony vozidel a při návrhu řízení. Návrh řízení bude nutno provést tak, aby stabilizoval uzavřený systém a jednotlivé odchyky byly velmi blízké nule. Odchykové veličiny, představují veličiny součástí vektoru stavu a vektoru řízení daného modelu a jsou označeny:

- $\delta w_k(t)$ - odchyka požadovaného rozestupu vzdálenosti k -tého vozidla v čase t ,
- $\delta y_k(t)$ - odchyka požadované rychlosti k -tého vozidla v čase t ,
- $\delta f_k(t)$ - odchyka aplikované a třecí síly při konstantní rychlosti k -tého vozidla v čase t .

Zavedením těchto proměnných jsou následně vyjádřeny chybové veličiny k -tého vozidla z rozdílu proměnných dané veličiny a zvoleného rovnovážného stavu. Jak již je zmíněno, vzdálenostní rozestupy mezi vozidly v koloně budou využívány. Pro polohovou odchyku platí:

$$\delta w_k(t) = (s_k(t) - s_{k+1}(t)) - \Delta_k, \quad (6)$$

kde s_k představují dříve definované aktuální polohy vozidel s indexem k (2.1.2) a Δ_k určuje požadované vzdálenostní rozestupy mezi vozidly. Dále pro k platí, že nabývá hodnot $k = 1, \dots, N - 1$ pro celkový počet automobilů N . V praktickém využití představuje tato chybová veličina mezeru mezi jednotlivými vozidly. Dle zvoleného počtu N vozidel v podélné koloně obsahuje model $N - 1$ těchto veličin. Tato definice (6) platí pro podélné i kruhové uspořádání kolony. Každopádně při využití kruhového uspořádání je nutno zavést i poslední polohovou odchyku. Taková odchyka určuje vzdálenost mezi prvním a posledním vozidlem v koloně a lze ji definovat obdobně:

$$\delta w_N(t) = (s_N(t) - s_1(t)) - \Delta_N,$$

kde Δ_N určuje vzdálenostní rozstup nacházející se mezi prvním a posledním vozidlem. Konstantní vzdálenost udržovaná mezi vozidly je jednou z možných variant. Další zmíněnou variantou představuje časový rozstup mezi vozidly a je možno ji zapsat následovně dle požadavků v (2.1.3):

$$\delta w_k(t) = (s_k - s_{k+1}(t)) - h_k v_k(t). \quad (7)$$

Rychlost $v_k(t) = v$ by se měla udržovat shodně pro celou kolonu a odvíjí se od vedoucího vozidla. Časový rozstup před vozidlem h_k je v průběhu algoritmu řízení proměnný v závislosti na aktuální rychlosti kolony. Mezi další možné řešení lze zahrnout kombinaci těchto dvou přístupů. To by představovalo zahrnutí vzdálenostní konstanty a proměnné časové vzdálenosti. Pro N vozidel v koloně postupným dosazením indexů k jsou získány proměnné veličiny polohových odchylek $\delta \mathbf{w}(t) = [\delta w_1(t), \delta w_2(t), \dots, \delta w_{N-1}(t)]^T$.

Dále je potřebné převést rychlost vozidla do chybového tvaru z rovnice (1). Je žádáno hledat chybový rozdíl rychlosti aktuálního vozidla $v_k(t)$ od rychlost celé kolony

v . Pro takový rozdílový člen odpovídá rychlostní odchylka:

$$\delta y_k(t) = y_k(t) - v. \quad (8)$$

Pro N vozidel v koloně je získáno, na rozdíl od polohových odchylek, právě N rychlostních odchylek. Dosazováním indexů je složen vektor: $\delta \mathbf{y}(t) = [\delta y_1(t), \delta y_2(t), \dots, \delta y_N(t)]^T$.

Nakonec je nutno definovat odchylku síly, která představuje vstupní signál modelu. Tato proměnná popisuje rozdíl aplikované síly od třecí síly při konstantní rychlosti k -tého vozidla.

$$\delta f_k(t) = f_k(t) - \phi_k$$

Každé vozidlo kolony inkrementuje počet vstupních veličin. Pro N vozidel je určen vektor N odchylek aplikovaných sil: $\delta \mathbf{f}(t) = \mathbf{u}(t) = [\delta f_1(t), \delta f_2(t), \dots, \delta f_N(t)]^T$.

Mimo vstupního vektoru je nutno vytvořit vektor stavu, který se skládá z vektorů (7, 8). Přeražením stavů v dříve zmíněných vektorech je získán vektor stavu.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \delta y_1(t) \\ \delta w_1(t) \\ \vdots \\ \delta y_{N-1}(t) \\ \delta w_{N-1}(t) \\ \delta y_N(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Pomocí definovaných chybových proměnných je převedena původní diferenciální rovnice na odchylkové diferenciální rovnice.

2.1.5 Diferenciální rovnice odchylek polohy

Předchozí úpravou modelu a představením odchylkových proměnných umožňuje provést žádoucí úpravy. Časovou derivací rovnice (6) je získána diferenciální odchylková rovnice:

$$\frac{d}{dt} \delta w_k(t) = \frac{d}{dt} s_k(t) - \frac{d}{dt} s_{k+1}(t).$$

Dosazením (1) za časové derivace poloh je obdržena chyba změny polohy. Úpravou je obdržen následující tvar diferenciální rovnice s využitím rychlostí:

$$\frac{d}{dt} \delta w_k(t) = y_k(t) - y_{k+1}(t).$$

Taková rovnice určuje rozdíl rychlostí k -tého a $(k+1)$ -tého vozidla odpovídající změně odchylky polohy. Dále je žádoucí převést celou rovnici do podoby využívající pouze odchylkových proměnných. Definované rovnice (8) jsou k tomu využity. Z této rovnice je vyjádřena rychlost vozidla $y_k(t)$, která je následně dosazena do předchozí rovnice. Použitím je obdržena rovnice (10).

$$\frac{d}{dt} \delta w_k(t) = \delta y_k(t) - \delta y_{k+1}(t) \quad (10)$$

Diferenciální rovnice v odchylkových proměnných (10) vyjadřuje změnu odchylky požadované polohy. Tato změna odpovídá rozdílu odchylek rychlostí dvou za sebou pohybujících se vozidel v koloně závislé na čase pro $k = 1, \dots, N$ prvků.

2.1.6 Diferenciální rovnice odchylek rychlosti

Vyjádření diferenciální rovnice využívající odchylkových proměnných vychází z rovnice (8). Zmíněná rovnice je zderivována podle času, čímž je získána změna odchylky rychlosti za změnu jednotky času, tedy:

$$\frac{d}{dt}\delta y_k(t) = \frac{d}{dt}y_k(t). \quad (11)$$

Vyjádřený vztah (11) představuje změnu odchylky požadované rychlosti, která je přímo úměrná změně rychlosti vozidla. Snadnou úpravou rovnice (2) a jejím dosazením do rovnice (11) je obdržen finální tvar diferenciální rovnice s odchylkovými proměnnými:

$$m_k \frac{d}{dt}\delta y_k(t) = -g_k(\delta y_k(t) + v) + f_k(t),$$

kde člen $g_k(\delta y_k(t) + v)$ představuje třecí sílu vozidla. Zmíněná třecí síla v rovnici je nahrazena viskózním třením použitím vztahu (12) získaného Taylorovým rozvojem.

$$g_k(\delta y_k(t) + v) = g_k(v) + \alpha_k \delta y_k(t) + H.O.T. \quad (12)$$

Náhrada na pravé straně rovnice v (12) využívá výrazu $H.O.T.$ představující výrazy vyšších řádů, které budou v rovnici zanedbány. Do rovnice (12) bude následně dosazena třecí síla při konstantní rychlosti (5). Vyjádřením časové derivace odchylky rychlosti vozidla je získán finální tvar diferenciální odchylkové rovnice rychlosti (13) využívající pouze odchylkových proměnných.

$$\frac{d}{dt}\delta y_k(t) = -\frac{\alpha_k}{m_k}\delta y_k(t) + \frac{1}{m_k}\delta f_k(t) \quad (13)$$

Linearizační prvek α_k lze definovat jako poměr změny třecí síly závislé na rychlosti v čase a změně rychlosti v čase.

$$\alpha_k = \left. \frac{\partial g_k(y_k(t))}{\partial y_k(t)} \right|_{y_k(t)=v}$$

2.1.7 Návrhové požadavky

Návrh řízení je nutno provádět pro některá kritéria. Kritéria, neboli návrhové požadavky, požadovaným způsobem omezují návrh a běžný chod řízení kolony vozidel. Je tedy nutno definovat požadavky na odchylky polohy, rychlosti a aplikované síly.

2.1.7.1 Odchylky poloh

Jeden z požadavků se zaměřuje na odchylku od polohy jednotlivých vozidel. Pro vzdálenost mezi vozidly nesmí nastávat žádný z extrémů, tedy nesmí být příliš malá ani velká odchylka od polohy. To převážně z důvodu klesající bezpečnosti při příliš malých rozestupech u jednotlivých vozidel. Každopádně, v opačném případě se odchylka od poloh může zvyšovat a to vede na problém s propustností systému. Taková tvrzení vedou k definování kritéria, že odchylka δw_k musí být co možná nejmenší a ideálně se její hodnota blíží nule, tedy:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta w_k(t) = 0.$$

2.1.7.2 Odchyly rychlostí

Návrhový požadavek se taktéž musí vztahovat i na jednotlivé odchyly rychlostí kolony vozidel. Rychlost každého vozidla sdruženého řetězce by měla být co nejbližší ustálené neměnné hodnotě v představující rovnovážný stav. Ideální případ této rychlosti by se měl shodovat rovnovážnému stavu. Rovností vyplývající z předchozího tvrzení lze říct, že veličiny všech odchylek rychlostí by měla být co možná nejmenší a ideálně nulová, tedy:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta y_k(t) = 0.$$

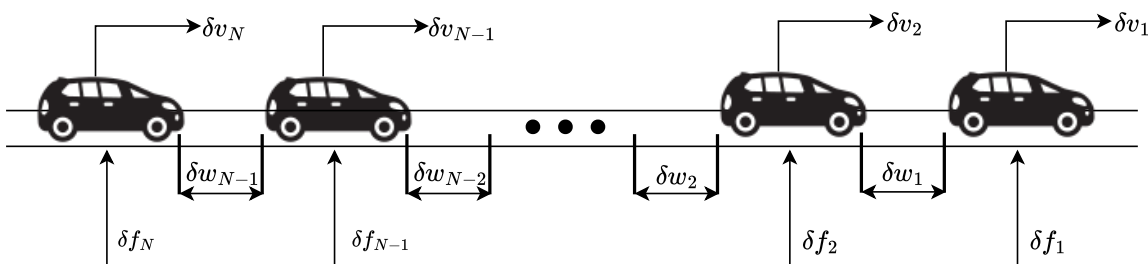
2.1.7.3 Odchyly vstupních sil

Poslední návrhový požadavek je zaměřen na aplikovanou sílu řízení. Je nutno říct, že při každém užití vstupní síly potřebného k zaručení požadovaných hodnot, předchozích požadavků, je navýšena cena řízení představující užití paliva. U daného požadavku je kladen důraz na akceleraci a deceleraci, neboli zrychlení či zpomalení jízdy kolony a jednotlivých vozidel. Za normálních podmínek řízení kolony by k akceleraci či deceleraci nemělo docházet, pokud se nejedná o výjimku v podobě vynucených manévru. Pro dané tvrzení je možno uvést požadavek na minimální hodnotu odchylky od aplikované síly. Cílem je zaručit minimální odchylku, což odpovídá ideálně nulové hodnotě v čase:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta \phi_k(t) = 0.$$

2.1.8 Stavový model kolony

Stavový model potřebný pro modelování, simulace a návrhy řízení je určen z dříve zmíněných diferenciálních rovnic (1,2). Upravený model s libovolným počtem N vozidel využívající veličin s odchylkami lze zobrazit na obrázku 4.



Obrázek 4: Zobrazení lineární kolony s odchylkami vozidel

Z obyčejných diferenciálních rovnic jsou vyjádřeny diferenciální rovnice využívající odchylkové proměnné (10,13). Problematika řízení dvou diferenciálních rovnic, popisující průběh chování každého vozidla, je převedena na vnitřní popis systému. Převedením na vnitřní popis je zavedena stavová reprezentace neboli stavový model. Princip stavového popisu spočívá v získání dvou párů matic kompletně popisující chování v čase. Jsou získány vstupní a výstupní rovnice, kde ve stavové rovnici (14) se nachází pár matic (A,B) a ve výstupní rovnici (15) se nachází pár (C,D). Stavový model je definován následovnými rovnicemi:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (14)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \quad (15)$$

Stavový model dle (14, 15) je složen ze tří vektorových časově závislých veličin (\mathbf{x} , \mathbf{u} , \mathbf{y}) a čtyř časově nezávislých matic (A , B , C , D). Je dána kolona vozidel s libovolným počtem vozidel N a pro N vozidel v koloně je získáno $n = 2N - 1$ diferenciálních rovnic s odchylkovými proměnnými. Vektor stavu je definován jako $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, ve kterém se vyskytují veškeré odchylkové proměnné pro každé vozidlo z kolony viz (9).

$$\mathbf{x}(t) = [\delta y_1(t), \delta w_1(t), \delta y_2(t), \delta w_2(t), \dots, \delta w_{N-1}(t), \delta y_N(t)]^T \quad (16)$$

Pro lineární kolonu ve vektoru stavu neexistuje odchylka polohy náležící poslednímu vozidlu δw_N . Vektor stavů lineární kolony obsahuje na posledním indexu odchylku rychlosti kolony. Pro cyklickou kolonu by již stav δw_N byl obsažen ve vektoru stavů z důvodu, že je nutné mít tento stavový prvek k popisu vzdálenosti mezi prvním a posledním vozidlem. Nicméně, pro takto zavedený stavový vektor a následně upravenou dynamiku systému nastává problém spočívající s říditelností systému. Systém představující kruhovou kolonu by následně byl neříditelný. To znamená, že by se některá vlastní čísla nedala řídit a libovolně umístit jejich poloha k zajištění potřebné dynamiky. Takto rozšířený vektor by byl ve tvaru:

$$\mathbf{x}(t) = [\delta y_1(t), \delta w_1(t), \delta y_2(t), \delta w_2(t), \dots, \delta y_N(t), \delta w_N(t)]^T.$$

Využitím tohoto rozšířeného stavu pro homogenní model, určením matice říditelnosti a kontrolou hodnoty bylo odzkoušeno, že se jedná o neříditelný systém [9]. V této práci se bude klást zaměření pouze na řešení podélné kolony vozidel. Dále bude využita teorie symetrických systémů, která zavede chování jako v kruhové koloně. Při aplikaci symetrických systémů tak stále bude zaručeno říditelnosti systému.

Dále je definována vstupní veličina jako aplikovaná síla na vozidlo. Na každé vozidlo je přiveden právě jeden vstup. Pro kolonu s délkou N existuje právě N možných vstupů, které budou složité jako řídicí veličiny. Vektor vstupů složený z odchylkových proměnných je následně definován (17).

$$\mathbf{u}(t) = [\delta f_1(t), \delta f_2(t), \dots, \delta f_N(t)]^T \quad (17)$$

Pomocí vektoru řízení je možno ovládat systém a libovolně volit agresivitu řízeného systému v případě jeho říditelnosti. Definováním vektoru stavu (16) a vektoru vstupů neboli řízení (17), společně s maticí dynamiky kolony A a její vstupní maticí B , je popsán vývoj stavové (14) i výstupní rovnice (15) celé kolony vozidel. Dle modelu a jeho popisu je zřejmé, že se jedná o systém s více vstupy a výstupy neboli MIMO systém. Počet stavových proměnných odpovídá $n = 2N - 1$ pro lineární kolonu z důvodu, že každé vozidlo obsahuje veličinu rychlosti a polohy. Výjimka nastává u posledního vozidla, který má pouze veličinu rychlosti. Obecně bude používáno pro systém s N vstupy a $2N - 1$ výstupy představující rychlost a polohu [9]. Výstupní rovnice (15) je popsána působením vstupu na výstup, možným měřením stavů a posledně vektorem stavu a řízení. Každopádně, matice D je pro daný model nulová a je o velikosti $p \times m$ pro m vozidel a p měřených stavů. To znamená, že model nemá žádné působení vstupu na výstup. Výstupní rovnice tak závisí pouze na stavu a výstupní matici C , která určuje možnosti měření stavů senzorem. Velikost této výstupní matice je $n \times p$. Vstupní matice B stavové rovnice škáluje jednotlivé signály přivedené na vstup. Taková matice obsahuje reálná čísla a velikost této matice je $n \times m$, kde m odpovídá počtu vozidel neboli počtu aplikovaných sil. Posledně matice dynamiky systému A je složena z reálných čísel a její rozměr je $n \times n$ [39].

2.1.8.1 Obecný model kolony

Průběh chování stavového modelu definují matice A, B, C a D. Tyto matice kompletně popisují chování systému spolu s vektorem stavu a vstupů stavovou i výstupní rovnicí. Jak je zmíněno dříve, model má N vstupů. Každému vozidlu náleží jeden vstup, pomocí kterého může být dané vozidlo řízeno. Počet stavových proměnných odpovídá $n = 2N - 1$ při podélné koloně. Pro N vozidel je sestrojeno pomocí n diferenciálních odchylkových rovnic matice dynamiky A pro celou kolonu. Následně z diferenciálních rovnic převedením je získána i vstupní matice B pro celý systém kolony. Pro danou úlohu bude využit převážně tento popis určený stavovou rovnicí. Tento stavový model je zapsán následovně. Z důvodu zjednodušení a zkrácení výpisu budou odchylkové veličiny uvnitř modelu následně psány bez časové závislosti.

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta y_1 \\ \delta w_1 \\ \delta y_2 \\ \delta w_2 \\ \delta y_3 \\ \delta w_3 \\ \vdots \\ \delta y_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_3}{m_3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \delta y_1 \\ \delta w_1 \\ \delta y_2 \\ \delta w_2 \\ \delta y_3 \\ \delta w_3 \\ \vdots \\ \delta y_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \delta f_2 \\ \delta f_3 \\ \vdots \\ \delta f_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(t)}$$

Z obecného modelu podélné kolony vozidel lze vidět, že je složen stále shodnými prvky. Model je tedy po blocích shodný pro veškerá vozidla s výjimkou diagonálních prvků na lichých indexech. Takové indexy obsahují prvky $\frac{\alpha_k}{m_k}$, které mohou definovat různé vlastnosti jednotlivých vozidel. Pro různé volby těchto prvků tak je možno docílit různých dynamik vozidel v koloně. Naopak při shodné volbě všech vozidel je zaručena shodná dynamika každého vozidla. Dále se v práci bere ohled právě na shodnou volbu dynamik a představení možných definic určující typ kolon v (2.1.8.2). Pomocí následně předvedené definice je zavedeno zjednodušení do problematiky řízení kolony vozidel spočívající ve shodnosti dynamik vozidel.

2.1.8.2 Typy kolony vozidel

Kolona vozidel je obecně složena z vozidel různých typů, řad či různých automobilů. Nicméně, je možno i seskupit kolonu pro identická vozidla či zavést zjednodušení k docílení shodných dynamik vozidel v koloně. V práci proběhne zaměření na kolonu s identickou dynamikou vozidel, kde se využije zjednodušení zavádějící shodnost dynamiky každého vozidla. Pro zjednodušení práce bude využit pojem homogenity kolony. Homogenní kolona je určena dle následující definice homogenity kolony viz definice (2.2). V opačném případě vozidel s různou dynamikou vozidel by se jednalo o kolonu heterogenní definovanou následovně viz definice (2.1).

Definice 2.1 Je dána "heterogenní" kolona vozidel. Potom kolona musí obsahovat minimálně jedno vozidlo zařazené v dané libovolně dlouhé koloně odlišnou dynamiku vzhledem k ostatním vozidlům. [12]

Definice 2.2 Je dána "homogenní" kolona vozidel. Potom musí platit, že každé vozidlo zařazené do této kolony má stejnou dynamiku. Potom lze dynamiku kolony vozidel nazvat jako kolonu vozidel s identickou dynamikou. [12]

2.1.8.3 Zjednodušený obecný model kolony

Pro model je využita definice (2.2). Tím je docíleno shodné dynamiky pro každé vozidlo. To znamená, že bude nutno zavést shodné hmotnosti jednotlivých vozidel m_k a taktéž zaručit shodné linearizační koeficienty α_k pro $k = 1, \dots, N$. V práci budou využity následné volby těchto koeficientů:

$$m_k = m_1 = m_2 = \dots = m_N = 1, \quad (18)$$

$$\alpha_k = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 1. \quad (19)$$

Takovou volbou těchto koeficientů je dosaženo poměrně jednoduchého modelu. Dosazením koeficientů (18, 19) do obecného modelu, je získán následný zjednodušený model pro homogenní kolonu vozidel (20).

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta y_1 \\ \delta w_1 \\ \delta y_2 \\ \delta w_2 \\ \delta y_3 \\ \delta w_3 \\ \vdots \\ \delta y_N \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \delta y_1 \\ \delta w_1 \\ \delta y_2 \\ \delta w_2 \\ \delta y_3 \\ \delta w_3 \\ \vdots \\ \delta y_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \delta f_2 \\ \delta f_3 \\ \vdots \\ \delta f_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(t)} \quad (20)$$

Zjednodušený model pro homogenní podélnou kolonu vozidel je možno využít pro libovolnou délku kolony zahrnující právě N vozidel [31].

2.1.9 Vlastnosti systému

Nejdůležitější vlastnosti problematiky kolony představují stabilitu a říditelnost daného systému. Jak bylo dříve zmíněno, daná problematika se zabývá dvěma druhy stability systému. Jedná se o obecnou stabilitu systému určenou vlastními čísly systému a další silnější podmínkou stability - řetězovou stabilitou.

2.1.9.1 Obecná stabilita

O stabilitě systému je možno rozhodnout z vlastních čísel či pólů systému. Póly systému představují dostatečnou informaci o určení stability daného systému. Pro určení těchto pólů stačí využít pouze matice dynamiky A a dosadit do vztahu:

$$\det(\lambda I - A) = 0, \quad (21)$$

kde I je jednotkovou matici (diagonální matice složená z jedniček) a matice dynamiky A musí být čtvercovou maticí. Řešením budou vlastní čísla (póly) systému, značené λ . Póly určují taktéž kromě stability systému i jeho agresivitu [39]. Úpravou vlastních čísel lze docílit stabilizace systému mnoha metodami. V práci se budou upravovat systému vlastní čísla, pomocí metody přiřazení pólů. Dále taktéž bude odzkoušen i symetrický návrh lineárního kvadratického regulátoru. Taková řešení povedou na stavovou zpětnou vazbu. Vhodné volby přiřazovaných vlastních čísel odpovídají hodnotám v levé komplexní polorovině pro spojité systémy. Pro diskrétní systémy se takové pravidlo upravuje a póly diskrétního systému musí náležet jednotkové kružnici v komplexní polorovině.

Pro kolonu, složenou ze tří vozidel zařazených za sebe, je využit model (20). Z daného modelu je využita matice dynamiky A a rovnice (21). Pro $N = 3$ vozidla je obdrženo $n = 2N - 1 = 5$ stavových proměnných, a tedy vlastních čísel. Pro tento případ je obdržen vektor vlastních čísel $\lambda = [0, 0, -1, -1, -1]^T$. Pro takovou volbu jsou získány dvě vlastní čísla pro odchylky poloh na mezi stability a tři stabilní vlastní čísla odchylek rychlostí. Pro zvyšující počet vozidel v koloně obdržíme vždy danou strukturu vlastních čísel. Z čehož je získáno N stabilních vlastních čísel odchylek rychlostí odpovídající hodnotě -1 a $N - 1$ vlastních čísel odchylek poloh na mezi stability, tedy s reálnou hodnotou nula a libovolně posunutou po imaginární ose.

2.1.9.2 Řiditelnost systému

Nejdůležitější požadavek, k úpravě dynamiky systému, představuje jeho říditelnost. Zaručení požadavku není vždy nutné, ale pro řízení je nutno zaručit stabilizaci systému. Aby bylo možno zaručit stabilizaci systému je nutno zaručit zápornost veškerých vlastních čísel systému. Nestabilní a říditelný systém lze stabilizovat. U nestabilního systému s neříditelnými a nestabilními vlastními čísly však nelze systém stabilizovat. Pokud by nestabilní vlastní čísla byla říditelná, stabilizace systému by byla možná. Pojem říditelnost systému je možno zaručit při splnění definice (2.3).

Definice 2.3 *Systém je "říditelný", pokud pro všechny počáteční nenulové stavy $\mathbf{x}(t_0)$, existuje řízení $\mathbf{u}(t)$ na konečném časovém intervalu $t \in [t_0, t_1]$ převádějící systém z počátečního stavu do jeho koncového stavu $\mathbf{x}(t_1)$ v počátku stavového prostoru.*

Pro ověření říditelnosti systému je možno využít věty o říditelnosti. Systém je říditelný, pokud hodnota matice říditelnosti Q_r se shoduje s dimenzí vektoru stavu $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ [39], a tedy:

$$h[Q_r] = [B, A^1 B, A^2 B, \dots, A^{n-1} B] = \dim \mathbf{x}(t) = n. \quad (22)$$

Vztah (22) je odzkoušen k ověření říditelnosti homogenního modelu (20). Pro rozšířený stav o poslední odchylku polohy a následně vhodnou úpravu matic je taktéž odzkoušena kontrola říditelnosti kruhové kolony. U lineární kolony je dle (22) zaručena říditelnost systému. Nicméně, pro kruhovou kolonu je systém neříditelný. Stabilizaci je možno provést pouze pro systém, u kterého se nachází neříditelná vlastní čísla ve stabilní levé komplexní polorovině.

2.1.9.3 Řetězová stabilita

Řetězová nestabilita představuje hlavní problém řešený u podélné kolony vozidel. Zajištění dostatečného bezpečí spočívá ve splnění podmínky řetězové stability (ŘS). Jedná se o problém šíření poruchy libovolného signálu mezi vozidly. Porucha z aplikovaného vozidla se přenáší celou kolonou a šířením se může tato porucha postupně zvyšovat. Růst poruchy na vozidlech nastává v řetězově nestabilním případě. Chybu či aplikovanou poruchu může představovat například případné zrychlení vozidla. Řetězovou stabilitu lze popsat mnoha definicemi, které jsou následně zmíněny.

Definice 2.4 *Systém je "řetězově stabilní", pokud nejsou poruchy zesilovány šířením mezi vozidly dané kolony [12].*

Definice 2.4 představuje východisko pro mnoho dalších definic, kde některé z nich jsou dále zmíněny. Hlavní a nejčastěji používanou definici představuje následující podmínka řetězové stability. Je dán přenos v odchylkových proměnných pro dvě sousedící vozidla

k a $(k + 1)$. Přenosové funkce z poruchy na odchytkové veličiny jsou označeny jako P_k a P_{k+1} pro $\forall k < N - 1$. Přenos z poruchy působící na k -té vozidlo vzhledem k odchylce od polohy (případně rychlosti) je definován následovně:

$$P_k = \frac{\delta w_k}{d_k}, \quad (23)$$

dále přenos z poruchy k -tého vozidla působící na vozidlo za ním, je definován jako:

$$P_{k+1} = \frac{\delta w_{k+1}}{d_k}. \quad (24)$$

Následně je vyšetřována podmínka nazvaná jako *silná řetězová stabilita ve frekvenční oblasti* (SFSS - Strong Frequency-Domain String Stability). Tato podmínka je využívána pro topologii následování předchozího vozidla (PF - 3.3) [16]. Podmínku řetězové stability je možno aplikovat na odchytkové veličiny polohy i rychlosti. V pracích [16, 40, 41] jsou ukázány modifikace podmínky SFSS a použití i pro další typy topologie. Pro sousedící vozidla je zaručeno splnění podmínky řetězové stability za podmínky:

$$\left| \frac{P_{k+1}(j\omega)}{P_k(j\omega)} \right| = |Q_{k,k+1}(j\omega)| \leq 1, \quad \forall \omega, \forall k < N - 1, \quad (25)$$

kde přenos $Q_{k,k+1}(j\omega)$ udává poměr odchytkových přenosů sousedících vozidel ve frekvenční oblasti. Poměru přenosových funkcí (25), z poruchy na odchylku od poloh, nesmí narůstat hodnota na všech frekvencích ω a pro veškerá vozidla. Přenos poruch libovolného tvaru se průchodem kolonou nezesiluje, a tedy hodnota musí být menší nebo rovna jedné [34, 41, 42]. Zmíněná definice odpovídá H_∞ normě a lze ji přepsat a upravit do tvaru [43]:

$$\|Q_{k,k+1}(j\omega)\|_\infty = \sup_\omega |Q_{k,k+1}(j\omega)| \leq 1, \quad \forall \omega, \forall k < N - 1. \quad (26)$$

Pro přenosové funkce (23, 24) z aplikovaných poruch na odchylky poloh dvou sousedících vozidel je určen poměrový člen dle vztahu (25) [41]. Úpravou je získáno:

$$\frac{P_{k+1}(j\omega)}{P_k(j\omega)} = \frac{\delta W_{k+1}(j\omega)}{\delta W_k(j\omega)}, \quad \forall k < N - 1. \quad (27)$$

Vyjádřené přenosové funkce (23,24,25,26,27) budou dále využity a určeny v následujících částech při návrhu řízení. V těchto vztazích je zavedeno omezení $k < N - 1$, které platí pro odchylky od poloh daného modelu viz (20). V případě, že bude řešena i řetězová stabilita odchylek od rychlosti, omezení bude platit pro $k < N$. To z důvodu, že v modelu (20) se nevyskytuje právě N -tá odchylka od polohy.

Varianty řetězové stability

Použití zmíněné definice řetězové stability je možné pouze v případě lineárně časově invariantního (LTI) systému [43]. Definice řetězové stability lze provést více způsoby. Další možné definice řetězové stability představují například striktní, semi-striktní a mnoho dalších definic [16, 43]. Pro zaručení semi-striktní řetězové stability, taktéž slabé řetězové stability, je nutno splnit definici (2.5). Pro striktní řetězovou stabilitu je nutno vyhovět definici (2.6).

Definice 2.5 *Jakékoliv vozidlo s výjimkou vedoucího vozidla z řízené kolony by nemělo zesilovat odchylku od polohy (případně rychlosti) vedoucího vozidla pro splnění podmínky semi-striktní řetězové stability.*

Definici (2.5) lze převést do frekvenční oblasti využívající tvar s frekvenčními přenosy:

$$\frac{|P_k(j\omega)|_{\mathcal{L}_2}}{|P_1(j\omega)|_{\mathcal{L}_2}} \leq 1, \quad \forall \omega > 0, \quad 1 < k < N,$$

kde $P_k(j\omega)$ odpovídá přenosu z poruchy na odchylku polohy ve frekvenční oblasti pro k -té vozidlo a \mathcal{L}_p představuje p -normu (2-normu). Obdobně jako u semi-striktní definice řetězové stability lze zformulovat definici striktní řetězové stability. Každopádně, podmínka již není kontrolována vždy s vedoucím prvkem kolony jako v definici 2.5.

Definice 2.6 *Pro veškerá vozidla z kolony musí platit, že nesmí zesilovat odchylku od polohy (případně rychlosti) jejich okamžitého následovníka k zaručení striktní řetězové stability.*

Zformulovanou definici (2.6) obdobně lze přepsat do frekvenční oblasti využívající tvar s frekvenčními přenosy:

$$\frac{|P_k(j\omega)|_{\mathcal{L}_2}}{|P_{k-1}(j\omega)|_{\mathcal{L}_2}} \leq 1, \quad \forall \omega > 0, \quad 1 < k < N - 1,$$

kde je kontrolována řetězová stabilita k -tého vzhledem ke $k - 1$ -tému vozidlu [43].

2.2 Symetrické systémy

V této sekci bude představena teorie symetrických systémů. Stručně bude naznačena reprezentace teorie v reálném světě. Dále budou zmíněny některé užití a poté bude popsán přístup dané teorie pro kolonu vozidel. Teorie symetrických systémů bude představovat pro danou práci hlavní východisko a v následujících částech proběhne návrh zpětné vazby. Pro navrženou stavovou zpětnou vazbu a vstupně symetrický systém proběhne kontrola, aby stavová zpětná vazba byla taktéž symetrická. Teorie symetrických systémů je představena v [44] a bude využita k dalšímu zjednodušení homogenního modelu kolony (20).

Shodné vlastnosti či chování v reálných návrzích lze požadovat ve velkém množství systémů, pro které je žádáno právě shodného řízení. Jedná se například o:

- shodné řízení vrtulí dronů využitím symetrické zpětné vazby [45],
- řadu prvků, pro které je snímána teplota s topnými tělesy na jejich koncích a osou symetrie uprostřed této řady,
- stabilizaci jednoohého robota se třemi nezávislými lineárními voice coil aktuátory a dvouosým náklonoměrem [46].

Názorných příkladů použití, představujících symetrický systém, je mnohem více a jedním z nich je i řízení distribuovaných systémů. Prvně je taktéž využita teorie symetrických systémů právě na kolonu vozidel V předchozí práci [9]. Použití teorie je využíváno převážně k zavedení zjednodušení či snížení časových nároků na výpočet [44]. Tato práce se bude zabývat pokusem o zjednodušení systému kolony vozidel, kterému je žádáno zavést shodnost algoritmu řízení každého vozidla. Každé vozidlo v koloně tak bude mít zavedeno řízení, které bude nezávislé na jeho pořadí v tomto uspořádání. Dále budou definovány potřebné podmínky k zaručení symetrie systému.

2.2.1 Podmínky symetrie systému

V dané části jsou ukázány nutné požadavky zaručující symetrii systému. Systém musí být lineárně-časově-invariantní dynamický systém s odpovídající stavovou rovnicí:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad (28)$$

s maticí dynamiky $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pro n stavových proměnných, dále vstupní maticí $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pro m vstupů a se zavedením následující definice symetrie systému.

Definice 2.7 *Systém s dvojicí matic (A, B) je vstupně symetrický, jestliže $\exists T : |T| \neq 0$, pro který platí následující podmínky při požadované plné hodnosti matice B [44]:*

$$TA = AT, \quad (29)$$

$$TB = BG. \quad (30)$$

Pro plnou hodnost matice B zapsanou jako $\text{rank } B = m$ lze definovat transformační matici symetrie T , která zaručuje pro $[b_1, \dots, b_m]$ přechody odpovídající [44]:

$$Tb_i = b_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m-1,$$

kde pro poslední prvek: $Tb_m = b_1$. Matice G v (30), představuje předem definovanou cirkulační matici, která může odpovídat tvaru:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Odpovídá cirkulační matici, která po hlavní diagonále obsahuje shodné nulové prvky či bloky a pod hlavní diagonálou jedničky. Zároveň, tato matice, má v pravém horním rohu jedničku. Představením těchto potřebných podmínek a jim příslušným maticím, lze užít a definovat následující větu z [44].

Věta 2.1 *Nechť dvojice matic (A, B) je vstupně symetrický systém, dále je říditelný, má plnou hodnost matice B $\text{rank } B = m$, s maticí symetrie T , potom platí [44]:*

$$T^m = I_n = I \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

2.2.2 Určení matice symetrie

K určení symetrie systému je nutno užít zmíněných podmínek symetrie (29,30) vedoucí na určení matice symetrie T . Odvození vztahu matice symetrie vychází taktéž z matice říditelnosti celého systému a Kroneckerova produktu jednotkové matice a cirkulační maticí G . Názorné použití Kroneckerova produktu lze zobrazit na následujícím příkladu. Provádí se součin všech prvků první matice s druhou maticí. Použití Kroneckerova produktu znázorníme na čtvercové matici $A_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ a čtvercové matici $A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, využití Kroneckerova produktu vypadá následovně.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1} \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{A_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1A_2 & 2A_2 \\ 0A_2 & 1A_2 \end{bmatrix}}_{A_1 \otimes A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Z názorné ukázky použití Kroneckerova produktu lze říct, že násobení jednotkové a cirkulační matice (31) shodných velikostí, vznikne součin jedniček na diagonále těchto matic. Tento součin bude použit k finálních úpravách výpočtu matice symetrie, viz matice v rovnici (33). Je dán systém s dvojicí (A,B) , kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Pro daný systém určíme matici říditelnosti složenou ve tvaru:

$$R = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]. \quad (32)$$

Vynásobením vztahu (32) maticí symetrie zleva a dosazením podmínek symetrie (29,30), je určen tvar:

$$TR = [TB, TAB, \dots, TA^{n-1}B] = [BG, ABG, \dots, A^{n-1}BG].$$

Pro následnou úpravu rovnice využijeme Kroneckerova produktu jednotkové a cirkulační matice:

$$TR = R(I_n \otimes G) = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} G & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Získaný tvar lze vynásobit transponovanou maticí říditelnosti zprava. Z čehož je obdržen následující předpis.

$$TRR^T = R(I_n \otimes G)R^T$$

Poté, převedením RR^T inverzí na druhou část rovnice je obdržen finální vztah. Vzorec výpočtu matice symetrie T je definován ve tvaru:

$$T = R(I_n \otimes G)R^T(RR^T)^{-1}. \quad (34)$$

Pomocí matice symetrie je možno rozhodnout o platnosti zmíněných podmínek symetrie (29,30). Pro splnění podmínky je možno říct, že systém je vstupně symetrickým systémem. Tyto podmínky a matice symetrie je využita v další kapitole k ověření, že systém kolony vozidel splňuje podmínky symetrie. Teorie bude dále použita k návrhu symetrického řízení. V nadcházejících kapitolách proběhne návrh centrálně orientovaného řízení využívající symetrické stavové zpětné vazby. Pro nalezené řešení proběhnou experimenty, které zaručí návrh symetrických zpětných vazeb pro obecný počet vozidel. Nalezené symetrické zpětné vazby bude nutno předem navrhovat dle zvolených pólů. Při návrhu proběhnou experimenty, pomocí kterých bude důraz kladen na parametrizaci všech možných struktur přiřazované formy. Experimenty jsou zaměřeny na nalezení možnosti návrhu pro libovolný počet vozidel s co nejrozsáhlejší možnou volbou vlastních čísel. Dále proběhne snaha provést omezení některých prvků zpětnovazební matice v nalezených zpětných vazbách. Omezením prvků je omezována dynamika a potřeba vozidel kooperovat s nežádoucími vozidly. Tyto omezení mohou spočívat právě v úpravách na některé požadované informační topologie.

2.2.3 Vstupně symetrická kolona vozidel

V dané části bude předvedeno, že kolona vozidel tvoří vstupně symetrický systém, a tedy splňuje potřebné podmínky definice (2.7). Je dán definovaný homogenní model pro kolonu obecného počtu vozidel (20). Pro účely ověření vstupní symetrie je použit model pro tři vozidla. Následně proběhne kontrola k ověření výsledků i pro více vozidel, která bude pouze zmíněna.

Je nutno použít matici dynamiky A a vstupní matici B , které odpovídají modelům pro tři vozidla dle (20). Matice jsou definovány následovně:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Dále bude nutno určit matici symetrie T pro odpovídající počet vozidel, zde konkrétně pro tři vozidla. K tomu je nutno určit matici říditelnosti (22) a cirkulační matici vhodných rozměrů G dle ukázky v (31). Dosazením do vztahu matice symetrie (34) a výpočtem je získáno:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Definované matice (35, 36) jsou dosazeny do podmínek (29, 30). Z čehož jsou podmínky upravené do následujícího tvaru:

$$TA - AT \stackrel{!}{=} 0, \quad TB - BG \stackrel{!}{=} 0. \quad (37)$$

Pro upravené podmínky (37) musí platit, že po odečtení jsou obě matice nulové. Získáním nulové matice je zaručeno, že systém je vstupně symetrický, a tedy:

$$\begin{aligned} TA - AT &= \mathbf{0}_{5 \times 5}, \\ TB - BG &= \mathbf{0}_{5 \times 3}. \end{aligned}$$

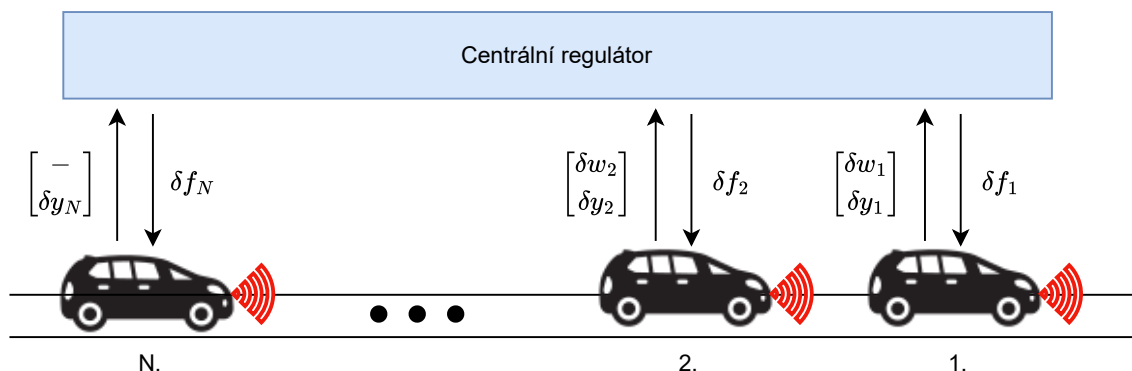
Výsledná matice z rozdílů těchto dvou podmínek tak vychází nulová v obou případech. Nulovost matice tak ověřila, že systém kolony je opravdu vstupně symetrický. Ověření proběhlo i pro vyšší volbu vozidel v koloně a pro veškeré volby tak je zaručeno splnění podmínek. Pro vstupně symetrický systém je umožněno se v následujících kapitolách zabývat návrhem všech symetrických stavových zpětných vazeb.

3 Řízení rychlosti a rozestupů vozidel

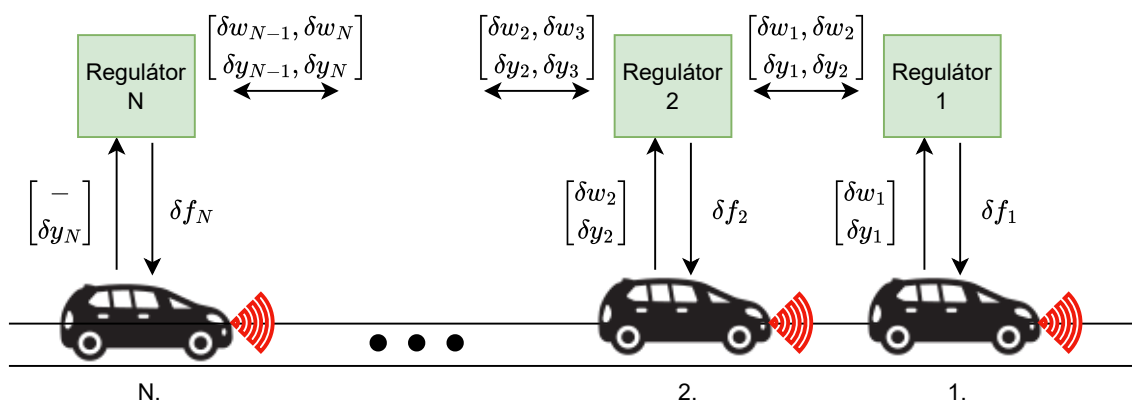
Daná sekce se zaměřuje na přístupy využívané pro řízení požadovaných rozestupů a udržování požadované rychlosti podélné kolony vozidel. Přístupy se dají rozdělit na dva základní typy, tedy centrální orientované řízení a distribuované řízení. Přístupy je taktéž možno definovat v podobě řízení s kompletní a omezenou strukturou či informací. Centrální a distribuované řízení je možno použít jak pro kompletní tak i pro omezenou strukturu volbou komunikace vozidel. Při řízení podélného pohybu kolony vozidel je klíčové se zabývat vhodnou volbou topologie informačního toku, typem rozestupů a posledně návrhem řídicích prvků [32].

Definice 3.1 Je dáno "centrální řízení" kolony vozidel. Základ této strategie spočívá ve využití centrálního objektu. Centrální objekt může být obsažen v infrastruktuře vozovky či v některém z vozidel kolony, nejčastěji ve vedoucím vozidle. Centrální řízení tak sjednocuje veškeré výpočty algoritmu do jediného řídicího prvku.

Definice 3.2 Je dáno "distribuované řízení" kolony vozidel. Pro toto řízení probíhá snaha potlačit komunikaci všech vozidel mezi sebou. Centrální objekt je eliminován a jednotlivá vozidla komunikují mezi sebou dle definované informační topologie. Distribuované řízení tak rozmisťuje algoritmus do více vozidel, což zaručuje funkčnost minimálně lokálních částí kolony i při selhání.



Obrázek 5: Komunikace centrálně orientovaného řízení



Obrázek 6: Komunikace distribuovaného řízení

Zmíněné strategie řízení, konkrétně distribuované a centrálně orientované (centrální), vyžadují odlišný přístup řízení. Při distribuovaných strategiích řízení má každé vozidlo v koloně svůj vlastní řídicí prvek a komunikuje přímo s vlastními předcházejícími, následujícími sousedy či odlišnou libovolnou informační topologií. Zatímco při strategiích centrálního řízení může být centrální řídicí prvek všech vozidel umístěn na jednom z vozidel kolony (typicky vedoucí vůz) nebo na nějakém jiném hromadném objektu (infrastruktura silnice) [47]. Na obrázcích (5, 6) jsou zobrazeny obě možnosti řízení pro homogenní model kolony vozidel z (20). Na obrázku (5) lze vidět názornou ukázkou centrálního řízení, které využívá společný řídicí prvek. Algoritmus řízení tak probíhá v něm a každé vozidlo mu dodává své přístupné stavy. Centrální řídicí prvek hromadně vypočítá z těchto všech získaných stavů vhodné řízení každého vozidla v podobě vstupních sil. Distribuované řízení je zobrazeno na obrázku (6), kde místo jednoho centrálního regulátoru, je právě N regulátorů pro každé vozidlo. Každé vozidlo opětovně, jako u centrálního řízení, zasílá své stavy svému regulátoru. Každopádně mezi vozidly probíhá libovolně volitelná komunikace, která umožňuje regulátoru počítat adekvátní řízení daného vozidla. Algoritmus je tak rozmístěn do N řídicích prvků, u kterých vypočítá vhodnou řídicí sílu pro dané vozidlo v koloně [34]. Na daném obrázku je využita komunikace s oběma sousedícími vozidly, tedy obousměrná.

Každá ze strategií přináší své výhody či nevýhody. Automatické řízení v automobilovém průmyslu (konkrétně kolony vozidel) může být bez důkladného prozkoumání nebezpečným nástrojem pro lidstvo. Z daného důvodu je nutno splňovat veškeré standardy a podobně k možnému uvedení do provozu [1, 2]. Z důvodu, že se jedná o automatické ovládání je jedna z hlavních nevýhod komunikace prvků mezi sebou pro obě strategie řízení. V okamžiku kdy tato komunikace jakkoliv selže, musí být dostatečně ošetřena. Taktéž je nutno zavést kvalitní komunikaci bez možných výpadků. Bez jakýchkoliv bezpečnostních opatření by tak mohlo hrozit nejhorším situacím [32]. Jednou z dalších obecných problémů bezdrátové komunikace je nutnost zaručení ochrany proti možným kybernetickým útokům. Kromě těchto nevýhod se zaměříme na výhody či nevýhody konkrétně u zmíněných strategií.

3.1 Výhody strategií

Mnoho výhod centrální strategie vychází zejména z jednoho společného centrálního objektu. V daném objektu se tak vykonává vše potřebné k určení následujícího pohybu vozidel. Každopádně převedení na distribuovanou metodu přináší plno výhod v praktickém pohledu, tedy například využití zaručující i levnější náklady. Následně jsou v tabulkách zmíněny pro obě strategie některé výhody (1) i nevýhody (2).

Tabulka 1: Výhody centrální a distribuované strategie

Centrální strategie	Distribuovaná strategie
znalost veličin všech vozidel výpočty v centrálním objektu přesnější výpočty	usnadnění komunikace vozidel nižší výpočetní nároky nefunkčnost → lokální selhání

3.2 Nevýhody strategií

Volbu strategie je nutno důkladně promyslet, jelikož je vždy nutno učinit kompromis. Strategie s sebou přináší i mnoho nedostatků oproti té opačné a je nutno si promyslet,

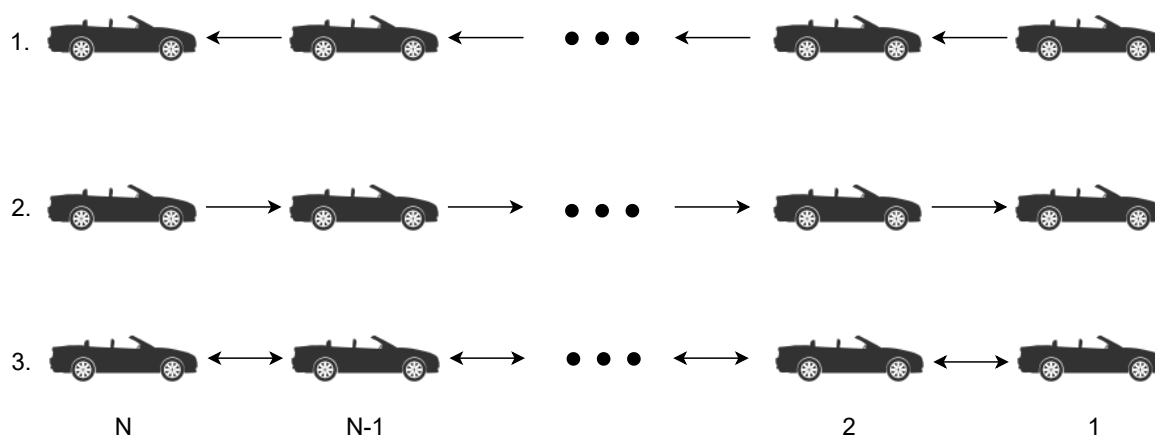
zda tyto nedostatky lze dopustit. V tabulce (2) jsou zobrazeny nevýhody obou strategií.

Tabulka 2: Nevýhody centrální a distribuované strategie

Centrální strategie	Distribuovaná strategie
kvantita dat přetížení komunikace nefunkčnost → kompletní selhání	nižší přesnost výpočtů nutná kvalitní komunikace ztráta informace

3.3 Komunikace mezi vozidly

Volba topologie informačního toku má velmi důležitou roli a vliv na zaručení řetězové stability. Mezi nejčastěji používané topologie lze zařadit sledování: pouze předchozího sousedícího a nebo pouze předchozího sousedícího zároveň s informací od vedoucího vozidla. Z důvodu jednoduchosti implementace a analýzy bývají tyto informační topologie často používány ve velkém množství výzkumných pracích. Centrální i distribuované strategie řízení mohou využívat jakýkoliv typ informační topologie. Může se jednat o informační topologie využívající informaci předchozích vozidel, následujících vozidel a nebo případnou kombinací. Taktéž je možné využívat informační topologie získávající informaci z libovolného počtu více předchozích či následujících vozidel s případně opětovnou možností na jejich kombinace. K těmto možnostem je také možno přidat v případě potřeby vazbu na vedoucí vozidlo kolony či na více předcházejících vozidel. Poslední a poté výpočetně nejnáročnější volbou je topologie typu všichni se všemi, tedy veškerá vozidla kolony by vysílala a přijímala velká kvanta dat [32]. Některé z těchto informačních topologií jsou zobrazeny na obrázku (7). Jedná se o předávání informace od předchozích vozidel (1.), následujících vozidel (2.) a kombinaci těchto dvou, tedy obousměrné (3.). U přenášení od předchůdců (1.) tedy platí, že například druhé vozidlo využívá své stavy a stavy jeho předchozího souseda, tedy prvního vozidla. Stav jednotlivých vozidel jsou získávány měřením, pomocí senzorů a jsou přenášeny pomocí bezdrátové komunikace. Pomocí těchto stavů je vypočten, hromadně či jednotlivě pro každé vozidlo dle strategie řízení, vhodný akční zásah v podobě požadovaného vstupu.



Obrázek 7: Topologie informačního toku - předávání informace mezi vozidly

Definujme si již zmíněné a některé další informační topologie používané u řízení kolony vozidel. Nejčastější a nejnámější topologie definujme následovně sledování:

- předchůdce (Predecessors - Following = PF),
- předchůdce a vůdce (Predecessors - Leader - Following = PLF),
- obousměrné (BiDirectional = BD),
- obousměrné a vůdce (BiDirectional - Leader = BDL),
- dvou předchůdců (Two - Predecessors - Following = TPF),
- dvou předchůdců a vůdce (Two - Predecessors - Leader Following = TPLF).

Definováním těchto topologií je docíleno potlačení komunikace mezi vozidly, čímž je snížena náročnost výpočtů [12]. Volbu topologií je možno využít u obou strategií. Každopádně, snížením zisku informace od zbylých vozidel kolony je docíleno i nepřesnějších výpočtů. Nicméně, v reálných aplikacích je klíčové zaručit dostatečně rychlého výpočtu, jelikož v případě opožděných přenosů dat je možno docílit kritické situace. Nejmenší možná komunikace mezi vozidly by tak mohla představovat topologii PF, využívající pouze informace vlastního a následovaného vozidla.

3.4 Přístupy centrálního řízení

V této části budou popsány metody centrálního řízení, které je možno využít u kolony vozidel. U těchto metod bude vysvětlen hlavně princip řízení podélného pohybu vozidel. Mimo podélného řízení existuje i mnoho dalších možností, které se zabývají problematikou kolony vozidel. Některé z těchto problematik byly nastíněny v úvodu této práce i s některými možnými metodami.

V následujících částech budou popsány jednotlivé metody jejich princip návrhu a zkrácené shrnutí. U některých metod je možno postupovat odlišně k docílení finálního návrhu metodou. Přestože návrh je možno provést více postupy, bude popsán pouze jedním z nich. Řízení kolony vozidel za využití centrálních strategií je důkladně prozkoumáno, ale mnoho vědců se převážně zabývá distribuovanou strategií. Nicméně, mnoho metod je uvedeno a vyzkoušeno pro využití centrálního přístupu. Pro centrální strategii je tedy možno využít následujících metod:

- stavová zpětná vazba [9, 48],
- symetrické řízení [9],
- lineární kvadratický regulátor [9, 49, 50],
- symetrické LQR,
- adaptivní řízení [8],
- prediktivní řízení [47, 51, 52],
- proporcionálně-derivační regulace [32],

pro zmíněné přístupy budou popsány základní principy a naznačen návrh řízení zmíněných metod.

3.4.1 Stavová zpětná vazba

Návrh stavové zpětné vazby představuje řízení s největší znalostí systému. To z důvodu, že ve stavové zpětné vazbě je využíváno veškerých stavů systému. V dané metodě je navržena zpětnovazební matice F , pomocí které je umožněno měnit vlastnosti dynamiky systému. Návrh zpětnovazební matice je možný provést úplným či částečným přiřazením pólů za využití Jordanovy formy L . V případě úplného přiřazení pólů se změní veškerá vlastní čísla matice dynamiky uzavřené smyčky. Při neúplném přiřazení Jordanovy formy se zbylá vlastní čísla taktéž změní, ale již ne podle požadavku. K docílení správného návrhu je nutné zaručit podobnost mezi maticí dynamiky uzavřené smyčky a právě definované Jordanovy formy matice L .

Je dán LTI systém popsaný stavovou rovnicí definovaný dříve v (14). Zákon řízení využívaný pro stavovou zpětnou vazbu je následující:

$$\mathbf{u}(t) = F\mathbf{x}(t), \quad (38)$$

kde $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ je vektor m vstupů, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ je vektor n stavů a $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je zpětnovazební matice. Jedná se o statický zákon řízení, který škáluje stavy systému k dosažení vhodných vstupů systému. Zákon řízení se dá taktéž upravit do dalších forem zápisu, kde lze využít taktéž vnějšího vstupu do systému dodáním další veličiny $v(t)$ s vhodnými rozměry. Dosazením zákona řízení (38) do stavové rovnice LTI systému (14) je získána dynamika autonomního systému uzavřené smyčky:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B \underbrace{F\mathbf{x}(t)}_{\mathbf{u}(t)} = \underbrace{(A + BF)}_{A_z} \mathbf{x}(t),$$

kde A_z představuje matici dynamiky uzavřené smyčky. Vhodným návrhem zpětnovazební matice F je nutno docílit, že matice dynamiky uzavřené smyčky je podobná předem definovanému Jordanovu tvaru matice L , tedy:

$$\underbrace{(A + BF)}_{A_z} \sim \begin{bmatrix} L & * \\ 0 & * \end{bmatrix}, \quad L \in \mathbb{R}^{s \times s}.$$

Jordanův tvar matice L tak je požadavkem uzavřené smyčky na přesnou volbu vlastních čísel a $*$ představuje libovolnou reálnou matici vhodných rozměrů. Jak již je zmíněno, může se jednat o úplné přiřazení pólů nebo částečné. Pokud $s = n$, jedná se o úplné přiřazení a lze volit libovolně veškerá vlastní čísla. V případě, že $s < n$, jedná se o neúplné přiřazení a provádí se volba pouze s vlastních čísel. Je nutno zmínit, že přiřazovaná vlastní čísla musí být taktéž říditelná. Volba Jordanovy formy může nabývat různých struktur a hodnot, proto vhodnost volby lze ověřit pomocí stupně nekonstantních invariantních faktorů a indexů říditelnosti. Využitím zmíněných přístupů je možno rozhodnout, zda je Jordanova forma L přiřaditelná stavovou zpětnou vazbou [53]. V práci [53] jsou taktéž ukázány některé volby Jordanovy formy a postup ověření přiřaditelnosti této matice systému.

Přiřazení pólů stavovou zpětnou vazbou bude představovat v práci hlavní východisko návrhu řízení, kterým se budeme zabývat. Pro tento návrh řízení dále bude využito zjednodušení v podobě symetrických systémů a symetrické stavové zpětné vazby.

3.4.2 Symetrické řízení

Návrh symetrického řízení vychází ze stavové zpětné vazby. Jedná se o možnost zjednodušení problematiky, která zavádí ihned několik výhod. Symetrické řízení s sebou přináší eliminaci potřebných různých algoritmů, kdy každé vozidlo by mohlo mít odlišnosti v algoritmech dle pořadí vozidel. Symetrická kolona tak je nezávislá na pořadí a pro každé vozidlo v ní zařazené tak využije shodného algoritmu řízení. Při realizaci je nutno zavést znalost veličin mezi prvním a posledním vozidlem. Tímto zavedením je dodána do kolony struktura představující řízení kruhové kolony, která je bez použití této teorie neřiditelná.

Zákon řízení všech vozidel symetrického řízení odpovídá stavové zpětné vazby. Zákon řízení je dán tvarem ve tvaru:

$$\mathbf{u}(t) = F\mathbf{x}(t),$$

kde \mathbf{u} odpovídá vektoru vstupů neboli řízení, \mathbf{x} je vektor stavů a posledně F je neznámá konstantní symetrická zpětnovazební matice zesílení. Dosazením zákona řízení do stavové rovnice (28) a následnou úpravou je získán tvar:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + BF\mathbf{x}(t) = (A + BF)\mathbf{x}(t) = A_z\mathbf{x}(t), \quad (39)$$

kde $A_z = (A + BF)$ a matice A_z je maticí dynamiky uzavřené smyčky se stavovou zpětnou vazbou. Upravený předpis (39) je využit k ověření symetrické zpětné vazby. K zaručení, že se jedná znovu o symetrický systém s navrženým zpětnovazebním řízením je nutno opětovně splnit podmínky symetrie systému (2.7). Dané podmínky jsou upraveny a dosazením matice dynamiky uzavřené smyčky do (29) je získán tvar:

$$T(A + BF) = (A + BF)T,$$

$$TB = BG.$$

Upravené vztahy jsou roznásobeny a provede se odvození kontroly návrhu symetrie zpětné vazby. Roznásobením je získán tvar:

$$TA + TBF = AT + BFT.$$

Pro $TA - AT = 0$ a dosazením druhé podmínky je obdrženo:

$$BGF = BFT.$$

Vynásobením inverzí matice B je obdrženo předpis pro zákon symetrické zpětné vazby:

$$\begin{aligned} GF &= FT, \\ F &= GFT^{-1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Z takto vyjádřeného předpisu je možno ověřit, zda daná zpětná vazba s cirkulační maticí G a maticí symetrie T je symetrickou zpětnou vazbou, pokud rozdíl (40) je nulový, tedy $GF - FT = 0$.

3.4.3 Lineární kvadratický optimální regulátor

Návrh regulátoru dané metody představuje optimalizační úlohu. Návrh spočívá v minimalizaci kvadratického kritéria a zaručuje nalezení optimálního řešení pro lineární kvadratický regulátor (LQR). Řízení využitím LQR tak pro každý průběh hledá nejvhodnější akční zásah do systému. Nicméně, optimalita zásahů velmi závisí na správném

a přesném modelu. To převážně z důvodu, že optimální řízení může udržovat systém velmi blízko meze stability. Proto poruchy a nepřesnosti mohou uvést systém i do nestability v kritických situacích. V pracích [9, 49] je metoda LQR využita i odzkoušena na centrální řízení kolony vozidel. V práci [54] je vyzkoušeno modifikovat model na jednotlivé subsystémy, představující agenty, a pro ně využít návrhu pomocí algoritmu strukturálně-dekomponovaného LQR. Tímto algoritmem je možno převést centrální řízení i na distribuované řízení kolony vozidel.

Metoda využívá návrhového požadavku J , který představuje kvadratické kritérium ve tvaru:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\mathbf{x}(t)Q\mathbf{x}^T(t) + \mathbf{u}(t)R\mathbf{u}^T(t)] dt. \quad (41)$$

Daná funkce znázorňuje cenové náklady řízení systému pro aktuální návrh řízení. Návrhové parametry jsou v podobě váhových matic $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $R \in \mathbb{R}^{N \times N}$, kde n odpovídá počtu stavů a N počtu vstupů dle (20). Váhové matice mají další dodatečný požadavek na jejich vlastnosti. Matice stavů Q musí být pozitivně semi-definitní a matice řízení R musí být pozitivně definitní. Požadavky na volbu váhových matic musí být tedy následující:

$$\begin{aligned} Q \succeq 0, \quad Q &= C^T C, \\ R &\succ 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Matice umožňují upravit váhu jednotlivých stavů a vstupů neboli řízení systému. Metodou je vypočítáno optimální řízení při minimalizaci cenové náročnosti, tedy kritéria J . Optimální návrh a cena řízení je určena metodou v závislosti na vektoru stavů, vektoru vstupů a libovolně vhodně zvolených váhových matic Q a R [31, 49, 50].

Při návrhu je řešena Algebraická Riccatiova Rovnice (ARE) ve tvaru:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0. \quad (43)$$

Optimální řešení P nalezené užitím rovnice (43) slouží k určení optimálních akčních zásahů do systému $\mathbf{u}(t)$. Nalezené optimální zásahy jsou určovány minimalizací předem definovaného návrhového kritéria [49, 50]. Z nalezeného řešení lze určit předpis pro zpětnovazební matici $F \in \mathbb{R}^{N \times n}$ zesílení ve tvaru:

$$F = -R^{-1} B^T P. \quad (44)$$

Tento předpis definuje konstantní matici, která je využívána v zákonu řízení. Zavedení vztahu (44) ukazuje, že je získán zákon řízení ve tvaru stavové zpětné vazby, tedy: $\mathbf{u}(t) = F\mathbf{x}(t)$ [49].

Jedná se o velmi jednoduchý návrh řízení. To zejména z důvodu, že metoda je rozsáhle známá, tudíž potřebné výpočty jsou již implementovány v mnoha výpočetních prostředích. V práci [49] je docíleno snížení spotřeby paliva při aplikaci automatického řízení vozidel s LQR. Dále v práci [50] je ukázáno, že došlo ke snížení odporu vzduchu mezi vozidly pro udržování těsných rozestupů mezi vozidly. Metoda LQR je obecně jednoduchá pro návrh řízení a implementaci. Nicméně, jak je zmíněno, optimalizační úlohy hledají často řešení u meze stability.

3.4.4 Symetrické LQR

Jedna z metod, která využívá opětovně rozšíření symetrických systémů představuje modifikace úlohy LQR. V této práci bude navrženo centrální symetrické LQR řízení využívající kompletní znalosti informací o jednotlivých vozidlech kolony. Numerickým řešením algebraické Riccatioví rovnice bude určeno řešení, z kterého se provedou experimenty potlačení informace ve zpětnovazební matici. Dané experimenty budou vyzkoušeny na nižším počtu vozidel v koloně.

Symetrické LQR vychází opětovně z požadavků na kritérium J (41), definovaného dříve. Pomocí minimalizace ceny řízení jsou získány taktéž optimální akční zásahy. Akční zásahy jsou určeny z řešení algebraické Riccatioví rovnice (43). Řešením ARE je obdrženo předpis k určení zpětnovazební matice (44). Teorie symetrických systémů dodává do původního LQR dodatečných podmínek. Tyto podmínky představují omezení na volbu váhových matic Q a R [45].

Pro návrh symetrického LQR je nutno uvést následující větu (3.1), která definuje omezení kladené na matice Q a R . Takové omezení zaručí symetrickou volbu matic Q a R , pomocí kterých je následně určeno řešení ARE a obdrženo symetrické zpětnovazební matice zesílení. Dosazením zpětnovazební matice do zákona řízení je získáno stabilizující symetrické stavové zpětné vazby systému.

Věta 3.1 *Nechť (A, B) je stabilizovatelná a vstupně symetrická dvojice s maticemi symetrie T a G , nechť pro matice Q a R platí:*

$$T^T Q T = Q, \quad Q = C^T C, \quad (45)$$

$$G^T R G = R, \quad R \succ 0, \quad (46)$$

kde R je symetrická a dále nechť je dvojice (C, A) detekovatelná, potom zpětnovazební matice zesílení odpovídá vztahu:

$$F_s = -R^{-1} B^T P_s,$$

kde P_s je stabilizující řešení ARE z (43) a F_s je symetrická zpětnovazební matice pro symetrickou stavovou zpětnou vazbu s maticemi symetrie Q a R .

Mimo jiné lze i říct, že dosazením zpětnovazební matice symetrie F_s do zákona řízení (38) je obdržena dvojice matic $(A - B F_s, B)$ představující vstupně symetrickou dvojici s maticemi symetrie Q a G [55].

Podmínky volby matic symetrie Q a R (45, 46) jsou využity k návrhu v dalších částech. Symbolicky bude odvozena volba struktury těchto matic, aby se zaručilo návrhu symetrické stavové zpětné vazby a vstupně symetrického uzavřeného systému.

V koloně vozidel je velmi důležité pořadí vozidel. Z daného důvodu má každé vozidlo tomu upravený algoritmus výpočtu v závislosti na pozici vozidla. Zjednodušení symetrických systémů zavádí do kolony vozidel nezávislost na umístění v koloně, čímž zjednodušuje a zrychluje algoritmus výpočtu. Zavedení symetrických systémů, a tedy řízení symetrickou zpětnou vazbou v problematice řízení kolon vozidel, představuje vhodný a zjednodušující přístup. Algoritmus je závislý pouze na velikosti kolony vozidel a volbě komunikace. Dle zvolené informační topologie může docházet ke komplikacím u vozidel nacházejících se u počátku či u konce kolony. To z důvodu, že zavedením symetrického řízení se převádí příčná kolona do podoby fungující v kruhu.

3.4.5 Adaptivní řízení

Adaptivní řízení bývá využíváno v situacích, kdy neznáme přesně model a nebo se model v čase může měnit. Jedná se tedy o využití z důvodu parametrických nepřesností, které odpovídají koeficientu odporu vzduchu či koeficientu tření kol o vozovku [8].

V práci [8] je využit model složený z diferenciální rovnice druhého řádu obsahující koeficienty odporu vzduchu, kol a hustoty vzduchu. Diferenciální rovnice druhého řádu je ve tvaru:

$$m_i \ddot{x}_i = u_i - (c_{0,i} + c_{1,i} \dot{x}_i) - 0.5c_{D,i} \rho A_i \dot{x}_i^2, \quad (47)$$

kde x_i , v_i , m_i a u_i jsou pozice, rychlost, hmotnost a řízení odpovídající i -tému vozidlu, dále koeficienty $c_{0,i}$, $c_{1,i}$ odpovídají odporu kol, ρ , c_D a A_i jsou koeficienty hustoty vzduchu, odporu vzduchu a dopřednou oblastí i -tého vozidla. Úkolem řízení vyšší vrstvy u_i dané úlohy je určit požadované zrychlení vozidla, pomocí kterého nižší řídicí vrstva vytváří sílu odpovídající řízení u_i . Taková síla generuje požadovanou hodnotu zrychlení. Definovaný model (47) je vhodné upravit do tvaru:

$$\ddot{x}_i = \bar{u}_i + \Phi_i^T \theta_i, \quad (48)$$

kde jsou provedeny úpravy $\bar{u}_i = \frac{u_i}{m_i}$, $\Phi_i = [-1, -\dot{x}_i, -\dot{x}_i^2]^T$ představující vektor regresorů a posleďně vektor odhadovaných parametrů $\theta_i = [\bar{c}_{0,i}, \bar{c}_{1,i}, \rho \bar{c}_{D,i}/2]^T$ s parametry odpovídajícími parametrům (47), vydělenými hmotnostmi vozidla. Násleďně je převedena diferenciální rovnice druhého řádu na dvě diferenciální rovnice prvního řádu v proměnných z , pro které se dále provádí poměrně složitá analýza stability a konvergence algoritmu pro topologii PF. V první řadě je odvozena definice zákona řízení a adaptačního zákona (vycházející z Teoremu 1 v práci [8]). Násleďnými úpravami je vyjádřena dynamika uzavřené smyčky každého vozidla stavových proměnných $\mathbf{Z} = [z_1, z_2]^T$ ve tvaru:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{B}\bar{\Phi}_i^T \tilde{\theta}_i$$

s odpovídající maticí dynamiky a vstupní maticí $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ a příslušejícími reálnými konstantami α, β , dále s rozdílem parametrů a odhadovaných parametrů odpovídající chybě odhadu $\tilde{\theta} = \theta_i - \hat{\theta}_i$ a posleďně upravený vektor regresorů $\bar{\Phi}_i = [1, \dot{x}_i + h\ddot{x}_i, \dot{x}_i^2 + h\dot{x}_i\ddot{x}_i]$ s odpovídající konstantou časového rozestupu vozidel h . Provedení analýzy stability spočívá v definici Ljapunovovy funkce ve tvaru:

$$V = \mathbf{Z}^T \mathbf{P}\mathbf{Z} + \tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i, \quad (49)$$

kde Γ_i je pozitivně definitní matice a derivací (49) a složitými úpravami jsou zavedeny podmínky konvergence parametrů topologie PF. Posleďně je provedena analýza a vyjádření řetězové stability, která je zaručena pro volbu $\beta \geq \sqrt{2\alpha}$. Analýza stability je provedena pro tři typy informační topologie, pro které se zákony řízení a adaptační zákony liší. Využitě typy informační topologie odpovídají: PF, BDL a TPF (3.3). Pro tyto topologie je taktéž zavedeno adaptačních zákonů, zákonů řízení, podmínek konvergence parametrů a podmínky zaručení řetězové stability [8].

V práci [8] jsou zavedeny tři způsoby adaptivního řízení kooperativní kolony vozidel v závislosti na informační topologii. Metoda přináší dobré výsledky a je vhodné využít v případě, že v modelu je nějaká neurčitost. Každopádně, metoda je poměrně složitá pro samotný návrh.

3.4.6 Prediktivní řízení modelu

Další možnou metodou využívanou pro centrální strategii představuje prediktivní řízení. Prediktivní řízení modelu spočívá na iterativním řešení optimálního řízení založeném na predikovaném stavu systému. Pomocí iterativního řešení je možno dopočítat vstupní signál optimálního řízení [52]. V práci [51] je navrženo a implementováno centrální řízení vycházející z dříve navrženého distribuovaného řízení taktéž za využití prediktivní metody. Metoda využívá diskretizovaný model popisující podélnou dynamiku vozidla se stavem rychlosti v a polohy s vozidla. Řízení modelu je zavedeno pomocí zrychlení pro každé vozidlo. K využití prediktivního řízení je nutné si zavést požadovaná kritéria (cost function) pro sledování optimální referenční rychlosti, časových rozestupů a odchylek. Pomocí sumy těchto zmíněných kritérií se určí celková kritérium ceny. Zadaná kritéria jsou kvadratická a počítají se na zvoleném konečném horizontu H . Princip prediktivního řízení spočívá v minimalizaci tohoto kritéria v podobě cenové funkce. Minimalizací je obdrženo optimální vektor řízení z kterého se použije pouze první hodnota dané iterace algoritmu. Nejdůležitější kritérium pro podélné řízení představuje cenu časových rozestupů.

Kritérium sledování časových rozestupů

Pro centrální řízení se využívá kritérium časových rozestupů, která se určuje ze stejných okamžiků. Stav odpovídá poloze a rychlosti vozidla, tedy $\mathbf{x}_i = [s_i, v_i]$. Definice funkce vychází z:

$$\tau = \frac{s_i(t_j) - s_{i-1}(t_j)}{v_{i-1}(t_j)}.$$

Funkce je zvolena následovně:

$$J_{\text{rozestup}}^i(t_k) = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ \sum_{j=k}^{j=k+H-1} \|s_i(t_j) - s_{i-1}(t_j) - \tau v_{i-1}(t_j)\|_{\zeta Q}^2, & i = 2, \dots, M, \end{cases}$$

kde ζ představuje parametr ladění, Q je matice určující vliv odchylek od poloh a rychlostí a norma je definována jako $\|\mathbf{x}\|_S^2 = \mathbf{x}^T S \mathbf{x}$.

Kritérium sledování referenční rychlosti

Hodnota referenční rychlosti $v_{\text{ref}}(s(t))$ je určována. Je nutné tedy dopočítávat a zavést následující referenční hodnoty v každém kroku:

$$\begin{aligned} \bar{s}_i(t_j) &= \begin{cases} s_i(t_j), & j \leq k, \\ \bar{s}_i(t_j - 1) + \Delta_t v_{\text{ref}} \bar{s}_i(t_j - 1), & k < j \leq k + H - 1, \end{cases} \\ \bar{v}_i(t_j) &= v_{\text{ref}} \bar{s}_i(t_j), \\ \bar{a}_i(t_j) &= \frac{\bar{v}_i(t_j + 1) - \bar{v}_i(t_j)}{\Delta_t}, \end{aligned}$$

kde Δ_t je diskretizační interval. Pro stav $\mathbf{x}_i(t_j) = [v_i(t_j), s_i(t_j)]^T$ je možné dopočítávat cenovou funkci sledování referenční rychlosti:

$$J_{\text{rychlost}}^i(t_k) = \sum_{j=k}^{j=k+H-1} \|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_i(t_j)\|_{(1-\zeta)Q}^2 + \|a_i(t_j) - \bar{a}_i(t_j)\|_R^2.$$

Posledně je zavedeno kritérium chyb k zaručení co nejmenších odchylek. Pro první vozidlo je cena určena pouze z chyb rychlostí a ke zbylým vozidlům se přidává i chyba poloh. Následně je v práci zavedeno poslední kritérium představující volnost omezení.

Kritérium volnosti omezení

K zaručení nízkých hodnot omezení je nutno minimalizovat volnost těchto proměnných. Kritérium je definováno:

$$J_{\text{omezeni}}^i(t_k) = \begin{cases} \sum_{j=k}^{j=k+H-1} \|\epsilon_i^v(t_j)\|_{P_v}^2, & i = 1, \\ \sum_{j=k}^{j=k+H-1} \|\epsilon_i^v(t_j)\|_{P_v}^2 + \|\epsilon_i^s(t_j)\|_{P_s}^2, & i = 2, \dots, M. \end{cases}$$

Matice P_s, P_v jsou voleny poměrně vysoké vzhledem k ostatním váhovým maticím. Taková volba zaručuje volnost v odchylkách co nejmenší. Při návrhu je taktéž nutno zavést omezení pro zrychlení, rychlost a bezpečné rozestupy. Při těchto omezeních se tak využijí proměnné ϵ_s, ϵ_v omezující vzdálenost a rychlost vozidel. Minimalizací těchto tří kritérií je určen optimální vektor řízení dané iterace. Optimální řízení dané iterace je následně vybráno z prvního prvku vektoru. Algoritmus pokračuje další iterací shodně [47, 51, 52].

3.4.7 Proporcionálně-Derivační regulace

Obdobně jako bude zmíněno v návrhu distribuovaného řízení viz sekce (3.5.1), lze využít proporcionálně-derivační (PD) řízení dynamickým regulátorem i pro centrální strategii. V práci [32] jsou zmíněny obě varianty návrhu, centrální i distribuované. Postup návrhu je podobný a finální změny se liší hlavně v zákonu řízení. V rovnici (51) je definován vztah distribuovaného zákonu řízení pro PD regulaci, který je možno upravit do tvaru pro centrální řízení:

$$a_{i,w}(s) = \rho_{rc,i} e^{-\vartheta_{rc,i}s} (\rho_{tr,i} u_{fb,i}(s) \delta w_i(s) e^{-\vartheta_{tr,i}s} + \rho_{tr,i} u_{ff,i}(s) a_{i-1}(s) e^{-\vartheta_{tr,i}s}), \quad (50)$$

kde jsou v zákonu řízení přidány veličiny $\rho_{rc,i}, \vartheta_{rc,i}$ odpovídající ztrátě informace a její kvalitě při přenosu informace z centrálního objektu k vozidlům. Jelikož řídicí prvek se již nevyskytuje v souvislosti s vozidlem, je nutno zavést této komunikaci jisté chování definované právě zmíněnými parametry. Dále $a_{i,w}$ je požadované zrychlení vozidla, $u_{fb,i}, u_{ff,i}$ je zpětnovazební a přímovazební zákon řízení a δw_i je definovaná odchylka polohy mezi vozidly. Porovnáním zákonu řízení centrálního (50) a distribuovaného (51) řízení lze vidět, že u centrálního řízení dochází ke škálování kvalitou přenášeného signálu k centrálnímu objektu. Mezitím u distribuovaného řízení se znevýhodňuje pouhá část zákonu řízení a zbylá část je získána měřením z kamer. Je nutné zmínit, že centrální objekt v práci [32] odpovídá infrastruktuře vozovky, tedy stanicím na vozovce. V průběhu testovací dráhy jsou rozmístěny stanice, na které se vedoucí prvek kolony připojí. Je možné se připojit na více možných stanic s následným rozhodnutím, kterou nejbližší stanici vozidlo využije. Vedoucí prvek si vybere stanici a danou stanici sdílí s jeho následujícím vozidlem.

V práci [32] je dokázáno, že centrální strategie si vyžaduje větší volbu časového rozestupu mezi vozidly. Pro vhodnou volbu časového rozestupu před vozidlem lze zaručit splnění řetězové stability. Návrh a ověření byly odzkoušeno u obou strategií pro shodnou informační topologii, tedy PF. Zároveň u centrální strategie, na rozdíl od distribuované strategie, dochází k ovlivnění vnitřní stability kvalitou komunikace. To z důvodu, že probíhá komunikace všech vozidel s centrálním objektem na vozovce, která u distribuovaného řízení neprobíhá.

3.5 Přístupy distribuovaného řízení

Mnoho vědců se v nedávné době zaměřuje převážně na analýzu a rozšíření možných metod distribuovaného řízení. Množství již vyzkoušených a uvedených přístupů distribuovaného řízení je tedy značně větší, než u centrálního řízení. Mezi ně tedy patří:

- proporcionálně-derivační regulace [32, 34],
- proporcionálně-integračně-derivační regulace [41, 56, 57],
- pole umělého potenciálu [25, 26],
- lineární kvadratický regulátor [54, 58–62],
- prediktivní řízení [51, 52, 63, 64],
- robustní řízení [65–67],
- adaptivní řízení [8, 68–70]
- vlnové řízení [71, 72],
- strojové učení [73, 74],

kde pro jednotlivé přístupy budou následně taktéž popsány základní principy a naznačen návrh řízení těchto metod.

3.5.1 Proporcionálně-Derivační regulace

Návrh dynamického regulátoru, proporcionálně-derivačního (PD) regulátoru, je možno využít pro distribuovaný návrh řízení kolony vozidel. V práci [34] se využívá model třetího řádu s dostatečnou malou hodnotou dopravního zpoždění. U daného modelu se taktéž předpokládá zahrnutí nízko úrovněvého (low-level) regulátoru k ovládní plynového a brzdového pedálu. Prvně je navrženo nízko úrovněvé adaptivní řízení (ACC), které následně slouží k návrhu vysoko úrovněvého kooperativního řízení (CACC). U adaptivního tempomatu je zavedena pouze informace o poloze sledovaného vozidla, která je získávána pomocí radarů. Pro kooperativní řízení je již nutné zavést bezdrátovou komunikaci, pomocí které dodává každému vozidlu informace o zrychlení sledovaného vozidla. Při selhání bezdrátové komunikace je zaručeno funkčnosti adaptivního režimu vozidel, čímž je zamezeno nebezpečným situacím [32, 34].

Zpětnovazební proporcionálně-derivační regulátoru má tvar:

$$K_{PD,i}(s) = k_{P,i} + k_{D,i}s, \quad i \geq 1.$$

Takový zákon řízení zahrnující derivační složku bývá často nahrazován filtrem dolní propusti neboli filtrovanou derivací jako v práci [32]. V práci [34] je dále zavedena rovnost: $k_{P,i} = k_{D,i}^2 = \omega_{K,i}^2$, kterou se převedl tvar regulátoru:

$$K_{PD,i}(s) = \omega_{K,i} [\omega_{K,i} + s], \quad i \geq 1.$$

Určení konstant regulátoru spočívalo v určení, kde amplituda přenosu otevřené smyčky prochází 0 dB s požadovanou bezpečností ve fázi. Využití nízko úrovněvého řízení zajišťuje sledování požadované hodnoty zrychlení skrze ovládní plynového a brzdového systému. Zavedením CACC, je nutno zaručit bezdrátovou komunikaci vozidel. Bezdrátovou komunikací budou předávány veličiny zrychlení, a tedy veškerá vozidla mají přístup ke zrychlením svého a předchozího vozidla [34].

Pro převedení problému z ACC do CACC se přenáší po komunikaci zrychlení předchozího vozidla. V pracích [32, 34] se tak využívá zpětná i přímá vazba v zákonu řízení. Přenášená informace z předcházejícího vozidla tak tvoří dopředné řízení. K návrhu CACC je potřebné upravit schéma, derivací určit zrychlení a pro dané zrychlení navrhnout vhodnou dopřednou vazbu, která působí na vozidlo za aktuálním vozidlem s dopravním zpožděním. V práci [32] je popsán distribuovaný zákon řízení vyšší vrstvy následovně:

$$a_{i,w}(s) = u_{fb,i}(s)\delta w_i(s) + \rho_{tr,i}(u_{ff,i}(s)a_{i-1}(s)e^{-\vartheta_{tr,i}s}), \quad (51)$$

kde $a_{i,w}$ představuje požadované zrychlení i -tého vozidla, $u_{fb,i}$, $u_{ff,i}$ definují zpětnovazební a přímovazební zákon řízení, δw_i je již definovaná odchylka poloh daného vozidla a $\rho_{tr,i}$, $\vartheta_{tr,i}$ jsou parametry pro ztrátu informace a kvality signálu bezdrátové komunikace mezi vozidly [32, 34]. Přístup distribuovaného proporcionálně-derivačního řízení, je možno úpravou vztahu (51), převést na centrální řízení [32].

3.5.2 Proporcionalně-Integračně-Derivační regulace

V pracích [56, 57] je využito proporcionálně-integračně-derivační (PID) regulace k distribuovanému řízení podélného, ale zároveň i postranního pohybu. Pomocí dynamiky a kinematiky k vytvoření stavového popisu, který je složen z podélné a rotační části. Je řečeno a ukázáno, že tento model pro aktuální vozidlo je možno dekomponovat a rozdělit ho tak právě na jednotlivé pohyby, tedy podélný a rotační. V této části nás zajímá hlavně model podélné dynamiky, který odpovídá druhému řádu. Dekomponovaný model i -tého vozidla je ve tvaru:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta R_i \\ \Delta v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta R_i \\ \Delta v_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \Delta f_i + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta v_{i-1}, \quad (52)$$

kde R_i , v_i , f_i jsou veličiny odpovídající relativní vzdálenosti, rychlosti a vstupní tažné síle i -tého vozidla, dále konstanty b , m představují odpor vzduchu a hmotnost vozidla. Posledně je nutno zmínit, že se v modelu vyskytuje externí vstup rychlosti z předchozího vozidla. Daný model (52) je složen ze stavové rovnice s dodatečným externím vstupem od předchozího vozidla.

Implementace distribuovaného PID zákonu řízení je dána ve tvaru:

$$f_i = \left(P_i + \frac{I_i}{s} + D_i s \right) (R_i(s) - R^{\text{ref}}(s)), \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad (53)$$

pro N vozidel v koloně a konstanty regulátoru P_i , I_i , D_i s relativní a požadovanou vzdáleností R . Je zmíněno, že k zaručení omezené stability (BIBO) a řetězové stability, pro rychlost a relativní vzdálenost, je nutno aktualizovat hodnoty PID regulátoru vzhledem ke vztaženému indexu vozidla dle:

$$\begin{aligned} I_i &= I_0 > 0, \\ P_i &= P_0 + \alpha i, \quad \alpha \geq 0, \\ D_i &= D_0 + \beta i, \quad \beta \geq 0, \quad i = 2, 3, \dots, N, \end{aligned}$$

kde parametry je nutno volit následovně: $\beta \geq \frac{m\alpha}{b}$, pro dříve zmíněnou hmotnost m a odpor vzduchu b . Pro vhodnou volbu parametrů PID regulátoru splňující $[P_0, I_0, D_0] \geq \mathbf{0}$ a následným dosazením zákonu řízení (53) do (52), regulátor stabilizuje vedoucí vozidlo

kolony. Tím je docíleno rychlé odezvy bez oscilací [56, 57]. Dosazením je taktéž možno určit přenosové funkce spojené s relativní vzdáleností mezi vozidly a rychlostí vozidel:

$$\frac{R_i(s)}{R_{i-1}(s)} = \frac{D_{i-1}s^2 + P_{i-1}s + I_{i-1}}{s^2(ms + b) + (D_i s^2 + P_i s + I_i)}, \quad i = 3, 4, \dots, N,$$

$$\frac{v_i(s)}{v_{i-1}(s)} = \frac{(D_i s^2 + P_i s + I_i)}{s^2(ms + b) + (D_i s^2 + P_i s + I_i)}, \quad i = 2, 3, \dots, N.$$

Daný přístup je odzkoušen na simulaci s 200 vozidly, při které udržují minimální rozestupy a zaručují splnění podmínky řetězové stability. Tomu je docíleno i při udržování téměř shodných rychlostí jednotlivých vozidel [56, 57]. Další využití řízení pomocí PID je použito v práci [41], kde je zaručeno obdobných výsledků.

3.5.3 Pole umělého potenciálu

Jak je již zmíněno v úvodní části práce (1.2.1.3), v práci [21] je zařazen přístup k plánování a rozvrhování kolon. Každopádně, využití spočívá převážně v distribuovaném řízení kolony podélného pohybu. Hlavním východiskem metody je zákon řízení v podobě PD regulace. Danou metodou se řeší funkcionalita udržování mezer mezi vozidly a zabránění kolizím pro CACC.

V práci [25] je využit model třetího řádu v podobě:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} s_i \\ v_i \\ a_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} s_i \\ v_i \\ a_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}}_B u_i(t),$$

kde $u_i(t)$ je vstupní signál. Převedením modelu na chybové veličiny je získán nový tvar modelu i zákonu řízení.

Pro zaručení udržování bezpečných mezer a protekce kolize vozidel je nutno dále zavést funkce potenciálního pole jak bylo zmíněno a vysvětleno dříve (1.2.1.3). Pomocí těchto funkcionalit je možno zařadit vozidlo ve větší vzdálenosti těsně za vedoucí vozidlo. Při této situaci jede vedoucí vozidlo konstantní rychlostí a druhé vozidlo se s poměrně velkou rychlostí přibližuje k vedoucímu vozidlu. Mezitím vedoucí prvek v reakci začne zpomalovat a přibližovat se k druhému vozidlu. V práci je posledně porovnán přístup samotného PD řízení kolony s daným přístupem řízení. Porovnáním je zmíněno, že řízení s potenciální funkcí se dokáže přibližovat ke sledovanému vozidlu s menší agresivitou, ale pomaleji oproti PD regulaci. Taktéž je ukázáno dodržování značně větších bezpečných rozestupů metodou potenciální funkce, což vede na menší možný výskyt kolizí v případě neočekávaně prudkého brzdění [25].

3.5.4 Lineární kvadratický optimální regulátor

Metoda LQR je v mnoha výzkumech převedena a odzkoušena do podoby distribuovaného řízení kolony vozidel. K možnému použití je nutno provést dekompozici systému na jednotlivé subsystémy, u kterých je znám model. Taková dekompozice rozdělí vozidla na jednotlivé agenty, kteří budou znát vlastní veličiny a veličiny jednoho ze sousedních

vozel, typicky každé vozidlo zná veličiny předchozího vozidla PF. Mimo PF topologii je samozřejmě možné zavést i jinou komunikaci vozidel, tedy například obousměrné předávání informace BD. Pro jednotlivé dekomponované systémy je poté navržen lokální optimální či sub-optimální regulátor [54, 58–60, 62].

V práci [54] je popsán postup návrhu distribuovaného řešení pomocí LQR, který je obdobný jako u centrálního řízení definovaného dříve (3.4.3). Jediný rozdíl v návrhu, který se vyskytuje spočívá v rozdělení celého modelu kolony na jednotlivé subsystémy. Model je obdobně definovaný jako v této práci (20) s výjimkou některých nezanedbaných prvků. Rozdělení modelu spočívá ve vytvoření bloků o velikosti 3×3 , s výjimkou vedoucího vozidla v kolony s blokem o velikosti 1×1 . Pro každého agenta v koloně jsou získány tři rovnice popisující kooperativní chování s jeho předcházejícím vozidlem. Pro vedoucí a i -té vozidlo kolony jsou obdrženy stavové popisy ve tvaru:

$$\frac{d}{dt}\Delta y_1 = A_1\Delta v_1 + B_1\Delta f_1, \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta y_{i-1} \\ \Delta w_{i-1} \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = \hat{A}_i \begin{bmatrix} \Delta y_{i-1} \\ \Delta w_{i-1} \\ \Delta y_i \end{bmatrix} + B_i\Delta f_i,$$

kde matice odpovídá $\hat{A}_i = A_i - [b_{i-1}, 0, 0]^T \hat{K}_{i-1}$ a je složena z bloků matice dynamiky A_i , součinu vektoru zesílení předchozího vozidla \hat{K}_{i-1} a vstupu předchozího agenta b_{i-1} , stavové proměnné definované jako v (20) a posledně vstupní maticí pro daný subsystém. Pro tyto subsystémy se postupně určí zpětnovazební matice minimalizací kritéria (41) a řešením ARE (43), čímž je poté možno složit kompletní zpětnovazební matici stavové zpětné vazby [54].

3.5.5 Prediktivní řízení modelu

Návrh a princip prediktivního řízení je již v práci uveden (3.4.6), ale pro centrální strategii. V práci [51] je ukázáno, že je možné využít metody pro oba typy strategií. Je zmíněno, že návrh distribuované strategie vzhledem k centrální strategii je rozdílný pouze v jediném kritériu.

Kritéria jsou volena opětovně shodně jako při centrální strategii. Jediné odlišné volitelné kritérium je zaměřené na rozestupy.

$$J_{\text{rozestup}}^i(t_k) = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ \sum_{j=k}^{j=k+H-1} \|\mathbf{x}_i(t_j) - \hat{\mathbf{x}}_{i-1}(t_j - \tau)\|_{\zeta Q}^2, & i = 2, \dots, M, \end{cases}$$

kde každé vozidlo, s výjimkou vedoucího, sleduje předchozí vozidlo s časovým rozestupem τ . Časový rozestup posouvá sledování stavu k předchozímu vozidlu právě o zmíněné časové zpoždění τ . Dále $\hat{\mathbf{x}}$ představuje převzatý stav složený z minulých a predikovaných stavů od předchozího vozidla. Takový stav tedy představuje veličinu či stav obdrženy kooperací jednotlivých vozidel a stav \mathbf{x} je složen z rychlosti a polohy aktuálního vozidla.

Optimálního řízení, neboli optimální vstup, je opětovně možno získat iterativním řešením [52]. Kvadratická kritéria jsou počítány na zvoleném konečném horizontu H a minimalizací je získán optimální vektor řízení dané iterace. Z optimálního vektoru je vybrán první prvek, který je následně použit a poté začne další iterace algoritmu. Distribuovaná strategie prediktivního řízení zaručuje nižší nároky na výpočet zejména z důvodu, že je snížena potřebná komunikace mezi vozidly a vyššími vrstvy [51].

3.5.6 Řízení s dohodou

Metoda zabývající se řízením s dohodou bývá využívána v oblasti distribuovaných strategií. Řízení s dohodou, neboli konsensus řízení, využívá kooperativních agentů v síti, kteří mají společný zájem a cíl. Společného cíle je dosaženo vzhledem k jednotlivým stavům veškerých agentů. Distribuovaný algoritmus konsensu je navržený tak, aby vnucoval veškerým agentům kolony vozidel podobnou dynamiku. Při vhodné komunikaci agentů je možno modelovat aktualizování stavů vozidel pomocí diferenciálních rovnic [75].

Nejčastěji používaný algoritmus pro spojitě řízení s dohodou využívá algoritmus se samotným integrátorem a lze ho zapsat ve tvaru:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = - \sum_{j=1}^N a_{i,j}(t) (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)), \quad i = 1, \dots, N, \quad (54)$$

kde $a_{i,j}$ je (i, j) -tý prvek matice sousednosti příslušející komunikačnímu grafu systému v čase t , dále \mathbf{x}_i odpovídá informačnímu stavu i -tého agenta. Pro informační stav i -tého agenta přibližující se stavům ostatních sousedících agentů, je dosaženo konsensu. Algoritmus se samostatným integrátorem (54) je možno dále rozšířit na algoritmus s dvěma integrátory, umožňující modelovat dynamiku agentů pro kooperativní adaptivní řízení kolony. Algoritmus s dvojitým integrátorem distribuovaného řízení s dohodou je popsán rovnicí:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = - \sum_{j=1}^N a_{i,j}(t) \left[(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) + \gamma (\dot{\mathbf{x}}_i(t) - \dot{\mathbf{x}}_j(t)) \right], \quad i = 1, \dots, N, \quad (55)$$

kde $\gamma > 0$ je ladícím parametrem, označující závislost vazby mezi derivacemi vektoru stavu. Dohoda je zaručena při splnění pozičních, ale i rychlostních rozdílů agentů. Mezi další časté algoritmy využívané pro kooperativní řízení vozidel lze zařadit algoritmy s dopravním zpožděním, které je běžné v dopravních situacích. Taková diferenciální rovnice je obdržena nahrazením stavů pravé strany rovnice v (55) za časově opožděné stavy a jejich derivace o časové zpoždění τ . Zmíněné algoritmy řízení je možno využít pro řízení podélného, ale i okrajového pohybu vozidel [75].

Mnoho dalších algoritmů daného způsobu řízení je navrženo. Nicméně, přináší s sebou plno nevýhod, které představují problém s nelinearitami a omezeními při návrhu. Pro takové případy je možno využít přístupu optimálního řízení [75].

3.5.7 Robustní řízení

Robustní řízení je žádáno v situacích, když pro nominální systém je známa existence některé jeho neurčitosti. Neurčitost může představovat například nepřesnosti v dynamice systému. Robustní řízení je možno použít v distribuovaných strategiích, kdy jednotlivá vozidla jsou svojí dynamikou podobná [65].

V pracích [65–67] je využit robustní návrh řízení pro systém kolony vozidel, pomocí H_∞ normy či geometrického přístupu. V práci [65] je využit model druhého řádu, který je řízen stavovou zpětnou vazbou zaměřenou pouze na lokální části kolony. K umožnění syntézy regulátoru pomocí H_∞ normy je model převeden pomocí lineární částečné transformace. Transformací je model dekomponován do tvaru určující nominální

a neurčitou část modelu:

$$\begin{aligned} p_i(s) &= \frac{1}{s^2}P(s)u_i(s) + \frac{1}{s^2}w_i(s), \\ z_i(s) &= \Omega(s)P(s)u_i(s), \\ w_i(s) &= \Delta_i z_i(s), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (56)$$

kde $w_i(s), z_i(s)$ představují poruchový a normalizovaný budicí signál, $\Omega(s), \Delta_i$ jsou váhovou funkcí a parametrem normalizované neurčitosti i -tého vozidla s podmínkou $\|\Delta_i\|_\infty \leq 1$, posledně $P(s), u_i(s)$ představují nominální model všech vozidel a vstup systému. Následně je zavedena nová chybová proměnná: $e_i(t) = p_i(t) - p_0(t)$, pro který je zákon řízení následovný:

$$u_i(s) = K(s) \sum_{k \in \mathbb{N}_i} (e_i(s) - e_k(s)), \quad (57)$$

pro $K(s) = K_p + K_v s + K_a s^2$. Z čehož při dosazení (56,57) je získán model:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(s) &= \frac{1}{s^2}P(s)\mathbf{U}(s) + \frac{1}{s^2}\mathbf{W}(s) - \mathbf{1}_N p_0(s) - \frac{1}{s}\mathbf{\Gamma}_0, \\ \mathbf{Z}(s) &= \mathbf{\Omega}(s)P(s)\mathbf{U}(s), \\ \mathbf{W}(s) &= \mathbf{\Delta}\mathbf{Z}(s), \end{aligned}$$

kde $\mathbf{E}(s) = [e_1(s), \dots, e_N(s)]^T$ je vektor přenosových funkcí chybových veličin, $\mathbf{U}(s) = [u_1(s), \dots, u_N(s)]^T$ je vektor přenosových funkcí vstupů, $\mathbf{\Gamma}_0(s) = [d_{10}(s), \dots, d_{N0}(s)]^T$ je vektor přenosových funkcí rozestupů vozidel, $\mathbf{W}(s) = [w_1(s), \dots, w_N(s)]^T$ odpovídá vektoru přenosových funkcí poruch, $\mathbf{Z}(s) = [z_1(s), \dots, z_N(s)]^T$ je vektor přenosových funkcí normalizovaných budicích signálů a $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_N)$ je diagonální matici složenou z normalizovaných neurčitostí jednotlivých vozidel [65].

Pro H_∞ řízení je systém v práci [65] dále strukturálně rozdělen. Pro jednotlivé rozdělené subsystémy tak je možno navrhnout distribuovaný H_∞ regulátor. K návrhu je využita věta o malém zisku. Tato věta říká, pokud existuje zpětnovazební matice zesílení K s vhodně zvolenými kladnými konstantami α, γ takovými, že jsou splněny podmínky:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{\Omega}(s)P(s)K(s)\mathbf{\Lambda}_i\tau_d(\mathbf{\Lambda}_i)\|_\infty &\leq \gamma, \\ \|\mathbf{W}_p(s)\tau_d(\mathbf{\Lambda}_i)\|_\infty &\leq \alpha, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

poté je dekomponovaný systém robustně stabilní, kde $\mathbf{W}_p(s)$ představuje váhovou funkci výkonnosti, $\mathbf{\Lambda}_i$ je maticí složenou z vlastních čísel, γ je návrhovým parametrem a posledně $\tau_d(\mathbf{\Lambda}_i) = [s^2\mathbf{I} - P(s)K(s)\mathbf{\Lambda}_i]^{-1}$.

Návrh řízení zaručuje distribuovaný a robustně stabilní systém. V práci [65] je tedy ukázáno, že je možno pro distribuované strategie využít i stavové zpětné vazby. Taktéž je ukázáno, že robustní H_∞ řízení s využitím BD topologie přináší značně lepších výsledků při poruchách, o proti nerobustnímu řízení ve tvaru stavové zpětné vazby.

3.5.8 Vlnové řízení

Návrh řízení kolony vozidel je možno provést pomocí vlnového řízení. Metoda vychází z oblasti flexibilních mechanických struktur a je využita pro distribuovanou strategii. Vlnové řízení je založeno na takzvané vlnové přenosové funkci, která popisuje průchod

vlny systémem, tedy kolonou vozidel. Hlavní princip metody spočívá ve vygenerování vlny na počátku kolony, kde se nachází aktuátor přidružený některému vozidlu, typicky vedoucí vozidlo. Vygenerovaná vlna se šíří kolonou až k jejímu konci, kde se odrazí, a poté postupuje zpětně ke zmíněnému aktuátoru na počátku kolony. Na počátku kolony je odražená vlna absorbována aktuátorem [71].

V práci [71] je uvažováno využití symetrického obousměrného regulátoru, je zde tedy využita topologie BD, s úkolem zaručit ekvivalentní rozestupy mezi vozidly v lokální oblasti. Využitím topologie BD jsou určeny přenosové funkce pro i -té a pro poslední vozidlo N -té vozidlo následovně:

$$X_i(s) = \frac{1}{\alpha(s)}(X_{n-1}(s) - X_{n+1}(s)), \quad X_N(s) = \frac{1}{\alpha(s) - 1}(X_{n-1}(s) - D_{\text{ref}}(s)),$$

kde přenosová funkce posledního vozidla je definována pro PF topologii, s je komplexní proměnná přenosové funkce, D_{ref} je referenčním rozstupem mezi vozidly a $\alpha(s) = \frac{1}{P(s)C(s)} + 2$ pro $P(s)$ odpovídající přenosové funkci dynamiky systému a $C(s)$ přenosové funkci symetrického BD regulátoru. Dynamika vozidla je popsána dvojitým integrátorem s koeficientem tření a symetrický BD regulátor vychází ze vztahu pro PI regulátor: $C(s) = k_p + k_i/s$. Koeficienty regulátoru k_p, k_i představují proporcionální a integrační zisk PI regulátoru, který je zvolen z důvodu jednoduché struktury modelu vozidla [71, 72].

Následně je nutno definovat vlnové funkce, které jsou v práci [71] definovány. Vlnovou rovnicí je možno rozdělit na komponenty $A_n(s), B_n(s)$, taktéž vlnové proměnné. Odvozením je získán model podélného pohybu kolony vozidel pro nekonečný počet vozidel:

$$\begin{aligned} X_n &= A_n + B_n, \\ G_1 &= G_2^{-1}, \\ A_{n+1} &= G_1 A_n, \\ B_n &= G_2 B_{n-1}, \end{aligned} \tag{58}$$

kde rovnice (58) popisují průběh vlnových proměnných šířením kolonou a G_1, G_2 jsou vlnové přenosové funkce definovány následovně:

$$G_1(s) = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4}, \quad G_2(s) = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4}.$$

Při reálných aplikacích je nutno zavést konečný počet vozidel a tím je nutno upravit předpisy, podmínky a omezení. V pracích [71, 72] jsou dále popsány různé možnosti návrhu regulátoru absorbující odražené vlny.

V práci [71] je zaručeno, že při splnění některých podmínek do sebe vozidla nemožou nabourat při zrychlování kolony. Zároveň je řečeno, že v počátku zrychlování jsou rozestupy navyšovány, což vede na bezpečnější jízdu. Nicméně, je nutno vhodně upravit impulsní odezvu, aby nedocházelo k nevyhovujícím podkmitům. Každopádně, hlavní zaměření metody spočívá v řízení na počátku či na obou koncích kolony k aktivnímu potlačení vln polohových změn. Regulátor absorbující vlny s sebou přináší významné výhody, které odstraňují potřebnou znalost či použití: bezdrátové komunikace, velikosti kolony, znalosti umístění vozidla v koloně a posledně znalosti referenčního rozstupu a rychlosti. Největší problematika metody spočívá v nalezení zmíněné impulzní odezvy vlnové přenosové funkce [71, 72].

3.5.9 Adaptivní řízení

Návrh adaptivního řízení je možný pro centrální i distribuovanou strategii. V práci [8] jsou provedeny analýzy stability uzavřené smyčky a řetězové stability při využití adaptivního řízení s různými informačními topologiemi. V dřívější části je popsán a naznačen návrh centrálního adaptivního řízení a v této části bude nastíněn návrh distribuovaného adaptivního řízení. V pracích [68, 69] je ukázáno, že lze využít i adaptivní řízení s klouzavým režimem (sliding mode control), které je navrženo taktéž pro distribuovanou strategii.

Jeden z možných návrhů adaptivního řízení vychází z práce [8], kde je provedena analýza stability při topologii TPF (3.3). Dynamika jednotlivých vozidel je definována chybovým modelem ve tvaru shodném jako v (48), ale je možno vyjádřit chybu následovně: $\dot{e} = \ddot{x}$. Při předpokladu:

$$\dot{\xi} = H\mathbf{e}, \quad \dot{\zeta} = H\dot{e}, \quad (59)$$

kde $H \succ 0$ je reálnou a kladnou maticí a dle (59) je možno převést dynamiku kolony vozidel do tvaru:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \zeta, \\ \dot{\zeta} &= H(\bar{\mathbf{u}} + \Phi^T \boldsymbol{\theta}), \end{aligned} \quad (60)$$

kde $\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N]^T$, $\Phi = \text{diag}(\Phi_1, \dots, \Phi_N)$ je diagonální maticí jednotlivých regresorů a vektor parametrů $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_N]^T$. Použitím zákona řízení v podobě:

$$\bar{\mathbf{u}} = \alpha \xi - \beta \zeta - \Phi^T \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (61)$$

kde α, β jsou reálné kladné konstanty. Dosazením zákona řízení (61) do modelu kolony (60) je získán odchylový tvar:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Delta},$$

kde vektor stavu odpovídá $\boldsymbol{\varepsilon} = [\xi, \zeta]^T$, matice dynamiky $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\alpha H & -\beta H \end{bmatrix}$ a vstupní vektor $\boldsymbol{\Delta} = [0, H\Phi^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}]^T$. Adaptační zákon pro odhad parametrů a omezení jsou dány vztahy:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\Gamma \Phi H^T (\mathbf{e} - \dot{\mathbf{e}}), \quad (62)$$

$$\beta > \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{Z})}{\alpha \lambda_{\min}(H^T + H)} - 2, \quad (63)$$

kde $\mathbf{Z} = (\alpha H + \beta H^T + \beta I)(H + H^T)^{-1}(\alpha H^T + \beta H + \beta I)$ a λ představuje maximální či minimální vlastní číslo matice H . Pro zákon řízení (61), adaptační zákon (62) a omezující podmínku (63) je dle definované věty v práci [8] zaručeno vnitřní stability pro systém kolony vozidel. Taktéž je zde proveden důkaz vnitřní stability a řetězové stability, která je zaručena při volbě $\beta \geq \sqrt{2\alpha}$ [8].

V práci [8] jsou provedeny simulace řízení rozestupů a rychlostí jednotlivých návrhů s různými topologiemi adaptivního řízení. Je ukázáno, že při řízení systému je dodrženo řetězové stability s minimální chybou rozestupu při aktivní poruše.

3.5.10 Strojové učení

Metody umělé inteligence se v nedávné době velmi často aplikují do téměř každé oblasti. U těchto metod probíhá snaha o naučení dané problematiky a následné využití naučených zkušeností pro širší a obecnější případy. Z naučených dat tak je žádáno generalizovat využití pro širší, ale podobné použití. Pro řízení kolony vozidel, podélné či postranní, je možno využít metod umělé inteligence pro distribuované strategie. Tento přístup využívá technik aproximování funkcí spolu s učícím algoritmem gradientního sestupu k úpravě řídicího přístupu k optimalizování výkonnosti [73]. V práci [74] je řečeno, že posilovací učení je možno provést i pro centrální strategii, ale návrh bývá velmi náročný až nepraktický. Z daného důvodu bude představena metoda pouze pro distribuovanou strategii.

V práci [73] je zmíněno, že vhodnou metodou strojového učení pro kolonu vozidel je například metoda posilovacího učení (reinforcement learning = RL). Pomocí metody probíhá postupné učení možností ovládnání vozidel a svým chováním má velmi blízko k přístupu adaptivního řízení systémů. Návrh regulátoru pro RL spočívá v algoritmech gradientních metod. Jednotlivá vozidla jsou rozdělena na agenty, kteří mají za úkol pomocí možných interakcí maximalizovat kumulativní odměnu R . Předpoklad kumulativní odměny je definován jako hodnota $V^{\pi^*}(s) = E[R|s_0 = s]$ stavu s vzhledem k přístupu π . Je dáno, že existuje stacionární a deterministický přístup π^* , pro který je $V^{\pi^*}(s)$ optimální v každém stavu s . Cílem celého systému je maximalizovat odměny aktuálního odhadu $V(s_t)$ stavu získaného z $\max_{a \in A} Q(s_t, a)$, kde a je akce změny stavu, A představuje množinu akcí pro změny stavů s a Q je odhad výnosu spojený s každou možnou akcí a . Dalším možným přístupem k návrhu řídicího prvku spočívá v gradientních metodách. Výhodou oproti klasickým RL je, že gradientní metody zaručují konvergenci. Poslední zmíněný algoritmus, zabývající se přístupem gradientních metod, spočívá ve využití algoritmu zpětné propagace chyby neuronových sítí. Přístupy gradientních algoritmů jsou využity například v autonomním řízení letu helikoptér, řízení podvodních vozidel a podobně. V práci [73] je ukázáno, že dané metody je možno použít i pro podélné řízení kolony vozidel.

Při návrhu je využito neuronové sítě s dvěma vstupy, tedy rozestupem a jeho derivací. Tyto vstupy jsou přivedeny na skrytou vrstvu s dvaceti neurony a výstupem skryté vrstvy jsou tři aproximované výstupy. Na výstupy je využita funkce SOFT-MAX určující pravděpodobnost akcí. Rozestup Hw a derivace rozestupu ΔHw jsou definovány vztahy:

$$Hw = \frac{z_L - z_i}{v_i}, \quad \Delta Hw = Hw_t - Hw_{t-1},$$

kde z_L, z_i představují pozici vedoucího prvku L a jeho následovníka i a v je rychlost následovníka. Stav je složen jako $S = \{Hw, \Delta Hw, A_{cc}\}$, kde A_{cc} je množinou možných akcelerací s možnostmi: brzdy, plynu a žádné akce. Stav s s možnými akcemi představuje výstupy neuronové sítě zmíněné dříve [73].

4 Návrh řídicích strategií

V této části proběhne návrh a analýza centrálního řízení. Prvně se bude řešit návrh pomocí LQR, u kterého se bude klást důraz na nalezení struktur váhových matic vedoucích na symetrické řešení. Pro váhové matice bude nutno nalézt takové řešení, které vede na symetrické řízení a zároveň na zaručení vlastností váhových matic v podobě semi-definitnosti a definitnosti. Budou probírány situace, kdy se vychází z výstupní matice C a volba struktury výstupní matice vychází pouze z přímých vazeb veličin. Dále bude problém rozšířen o nalezení symetrického řízení v případě, že se nevychází z přímých vazeb. To znamená, že se jedná o tvary, které nemusí vést na požadované vlastnosti. Dále bude řešen problém přiřazení pólů pomocí Jordanovy formy. V matici Jordanovy formy budou voleny obecná vlastní čísla, pomocí kterých je určeno řešení stavové zpětné vazby. Jedná se o symbolické výpočty k nalezení obecných tvarů požadovaných struktur Jordanovy formy. Pro symbolické výpočty bude představeno několik nalezených obecných tvarů, které zaručují možnost libovolné volby vlastních čísel při některé z definovaných struktur. Každopádně, nároky na výpočet jsou pro obecnější předpoklady příliš náročné. Posledně je představen postup diskretizace systému. V reálných situacích budou vozidla řízeny počítačově, a proto je nutno převést spojitý systém na jeho diskrétní podobu. Několik možných způsobů převodu bude představeno. Taktéž je dále představen symetrický návrh stavové zpětné vazby pro diskrétní model. Předpokladem je, že spojitý systém, který je vstupně symetrický, by měl být taktéž vstupně symetrický v jeho diskrétní podobě. Ověření tohoto předpokladu je ukázáno i s důkazem platnosti. Jedním častým způsobem řízení diskrétních systémů představuje řízení s konečným počtem kroků, a proto je takový přístup názorně ukázán. Je ukázáno, že řízení s konečným počtem kroků lze provést i za teorie symetrických systémů, a tedy je představena lemma o symetrizaci stavových zpětných vazeb s účelem zavést symetrické konečně krokové řízení.

4.1 LQR

Návrh a analýza způsobu volby váhových matic potřebných k návrhu LQR proběhne v dané části. Nejprve proběhne vhodná volba výstupních matic C . Volba výstupní matice může být vybrána z několika variant, dle možnosti měření stavů či detekovatelnosti dvojice matice dynamiky a výstupní matice. Jedná se o případy, kde budou zadány pouze přímé vazby stavů výstupní matice, nikoliv i vzájemné vazby rozestupů a rychlostí. Přímé vazby odpovídají veškerým prvkům na diagonále. Proběhne tak analýza těchto situacích, pomocí kterých bude ovlivněna volba výstupní matice C . Prvky na diagonále představují škálování hodnot rozestupů a rychlostí. Každopádně, při ponechání pouze hodnot lichých řádků, by se docílilo porušení vlastnosti detekovatelné dvojice matic (C, A) . Možné případy, vycházející z diagonálních a detekovatelných případů, budou uvažovat měření:

- 1. pouze odchylek od polohy - rozestupů,
- 2. veškerých stavů - rozestupů i rychlostí.

Analýza těchto zmíněných případů, vycházejících z volby výstupní matice, je provedena pro menší počet vozidel. Při analýze se využije symbolických výpočtů, pomocí kterých proběhne snaha nalézt veškerá možná řešení. Symbolickými výpočty je docíleno parametrizace všech možných řešení, a tedy je získán obecný tvar pro volbu matic C , Q a R , které jsou potřebné při využití metody LQR.

4.1.1 Volba matic C

Pro libovolný počet vozidel je možno měřit až n stavů. Volbou prvků výstupní matice C je určeno, které stavy z vektoru stavu je možné měřit senzorem i s případnými vazbami mezi stavy. Vzájemné vazby mezi stavy odpovídají prvkům výstupní matice mimo hlavní diagonálu. Na hlavní diagonále se nacházejí pouze přímé vazby stavů. Analýza bude provedena, v této části, se zaměřením na přímé vazby měření a bude se tak zabývat pouze volbou diagonálních prvků. Pro libovolný počet N vozidel je tvar matice následovný:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_N \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Z diagonální matice (64) je možno zavést dříve zmíněné možnosti měření stavů. Prvně bude řešena situace s třemi vozidly v koloně při daných možnostech. Pro definovaný vektor stavu $\mathbf{x}(t)$ (16) z příslušného modelu (20), jednotlivé případy měření definují výstupní matice ve tvarech:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 \end{bmatrix}, \quad (65)$$

kde index $j = \{1, 2\}$ výstupních matic C_j představuje definované případy, dále na lichých prvcích diagonály výstupní matice se vyskytují hodnoty násobící odchylky od rychlosti a na sudých prvcích diagonály jsou hodnoty násobící odchylky od polohy. Je nutno zmínit, že definováním výstupní matice je ovlivněna i volba váhové matice stavů Q viz požadavky (42).

4.1.2 Určení váhových matic

Matice Q musí být pozitivně semi-definitní. Tato vlastnost je zaručena při vhodné volbě výstupních matic z požadavků (42), matice je zvolena následovně:

$$Q = C^T C.$$

Z vycházejícího obecného diagonálního tvaru (64) je určen obecný tvar váhové matice stavů:

$$Q = \begin{bmatrix} c_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_N^2 \end{bmatrix}.$$

Z obecného tvaru vycházejícího z rovnice (64) je vidět, že se prvky diagonály pouze umocní. Pro volbu tří vozidel a zavedení požadavku tvaru matice Q je možno určit možné varianty její volby, využitím jednotlivých matic C (65). Dosazením do vztahu (42) jsou určeny vyhovující semi-definitní tvary váhových matic stavů:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} c_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5^2 \end{bmatrix}. \quad (66)$$

Pro znázornění, v [31] je taktéž volba matic Q představena v obdobné podobě pro obecný tvar matice Q_2 :

$$Q_3 = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix},$$

kde liché prvky p_i jsou váhy penalizující odchylky od požadovaných rychlostí a sudé prvky q_i jsou váhy penalizující rozestupy i -tého vozidla. To znamená, že pro dostatečně blízké rozestupy či opačně příliš velké rozestupy se zvyšuje hodnota definovaného kvadratického kritéria (41).

Posledně je nutno zavést penalizaci vektoru řízení, pomocí matice R . Jediná podmínka ve volbě matice R spočívá v zaručení pozitivní definitnosti. Nejjednodušší možností je zvolit diagonální prvky kladně a zbylé prvky nulově. Tím je zaručeno pozitivní definitnosti a zároveň vážení pouze přímých vazeb vektoru řízení. Matice R je v obecném tvaru následovná:

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_N \end{bmatrix}.$$

Pro tři vozidla je získána matice ve tvaru:

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}. \quad (67)$$

4.1.3 Určení řešení LQR

Z definovaných matic (66,67), vektoru stavu (16) a vektoru řízení (17) je následně možno vypočítat kvadratické kritérium a zpětnovazební zisk F . Minimalizací kvadratického kritéria (41) je možno určit optimální řízení, které zaručuje nejmenší penalizace stavů a řízení. Zákon řízení minimalizující hodnotu kritéria je ve tvaru stavové zpětné vazby a zpětnovazební zisk F je možno určit řešením ARE (43). Výpočet ARE je již nutno provést v numerickém tvaru. Dosazením kladných hodnot do volných parametrů matic Q a R lze dopočítat výslednou zpětnovazební matici F . Řešením ARE je získána matice P , pomocí které lze určit zpětnovazební zisk:

$$F = -R^{-1}B^T P.$$

4.2 Převedení na symetrické LQR

Symetrické LQR dodává další omezení na váhové matice potřebné k řešení ARE (43). Hlavní východisko spočívá v určení matice symetrie systému T , využitím vzorce (34). Další krok se zaměřuje na ověření podmínky vstupní symetrie, která je zaručena při splněných podmínkách (29,30). Dodatečné podmínky omezující volbu matic Q a R jsou definovány v (45,46), a tedy:

$$\begin{aligned} T^T Q T - Q &= 0, & Q &= C^T C, \\ G^T R G - R &= 0, & R &\succ 0. \end{aligned}$$

4.2.1 Přínos symetrických systémů v koloně

V předešlé práci [9] je ukázáno, že při použití teorie symetrických systémů a návrhu symetrické stavové zpětné vazby je zaručeno jistých předpokladů na přenosové funkce systému. Je předvedena hypotéza, která taktéž zaručuje splnění podmínky řetězové stability při symetrickém řízení. To zejména z důvodu, že vlivem poruchy na některém z vozidel je vybudena odezva tohoto vozidla. Nicméně, šíření této poruchy je přeneseno pouze na odchylku od polohy prvního předešlého vozidla a odchylky od polohy ostatních vozidel se nemění pro aplikovanou poruchu. Z přenosů je ukázáno, že při vstupní poruše reaguje vozidlo v koloně dominantním skokem rychlosti M a veškerá zbylá vozidla reagují nižší odezvou m , ale shodnou se všemi zbylými vozidly.

4.2.2 Úprava výstupních matic

Pro definované tvary výstupních (64) a váhových (66) matic, jsou využita dodatečná omezení matic. Opětovně je tato část řešena pomocí symbolických výpočtů k nalezení obecného řešení. Aplikace symetrických systémů taktéž s sebou přináší, původně vynechaný, poslední rozestup. Jak je již zmíněno, systém se chová, jako kdyby fungoval v kruhu. Tím má první vozidlo znalost vzdálenosti posledního vozidla a naopak. Z toho důvodu, je nutno, upravit výstupní matice a počítat tak s tímto rozestupem. Upravené matice vycházející z (65) jsou pro tři vozidla ve tvaru:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & -c_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & -c_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (68)$$

4.2.3 Určení váhových matic

Z upravených tvarů výstupních matic, v dřívější části, jsou opětovně zvoleny váhové matice stavů:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_2^2 & 0 & c_2c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2c_4 & 0 & 2c_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} c_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_2^2 & 0 & c_2c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2c_4 & 0 & 2c_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (69)$$

Z úprav v (69) je vidět výskytu vzájemných vazeb, tedy prvků i mimo hlavní diagonálu. Později bude výskyt těchto vazeb ukázán i pro větší množství vozidel. Následně je zavedena váhová matice vstupů, která musí být pozitivně definitní. Pro tuto matici, není nutno žádné změny a odpovídá (67). Dále je nezbytné upravit dimenzi matice symetrie T či rozšířených váhových matic Q . To zejména z důvodu, že následující matematické operace si vyžadují shodné dimenze těchto matic. Rozšířeným váhovým maticím Q se při předchozí úpravě přidal nulový sloupec i řádek na posledním indexu a důležité úpravy jsou provedeny mimo tyto indexy. Proto jsou z váhových matic zvoleny sub-matice mimo posledního indexu sloupce i řádku.

Pro symetrické LQR je potřebné zavést dodatečný krok, který parametrizuje veškerá

symetrická řešení. Omezení spočívá ve využití podmínek (45,46). Aplikováním na definované váhové matice v obecném tvaru je získána soustava rovnic. Řešením soustavy rovnic jsou obdrženy parametry určující volnost váhových matic. Nalezená řešení definují, že veškeré liché prvky hlavní diagonály jsou shodné. Sudé prvky hlavní diagonály jsou taktéž shodné, ale dvojnásobné oproti vzniklým vzájemným vazbám mimo hlavní diagonálu. Řešení zaručující symetrické matice:

$$[q_1 = q = c_2 = c_4], \quad (70)$$

$$[p_2 = p = c_1 = c_3 = c_5, q_3 = q = c_2 = c_4], \quad (71)$$

$$[r = r_1 = r_2 = r_3], \quad (72)$$

přičemž indexy prvků p, q představují definované možnosti měření, které vychází z tvarů výstupních matic (65). Nicméně, řešení jsou shodná a dle rozdílů výstupní matice se mění pouze typ parametrů. Je možno pro jednotlivé volby zvolit p, q bez indexů. Využitím definovaných váhových matic (69) a dosazením nalezených řešení (70,71,72), jsou získány tvary symetrických váhových matic s obecným řešením:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q^2 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & 2q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q^2 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & p^2 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & 2q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}. \quad (73)$$

V porovnání symetrických (73) a obyčejných (66) váhových matic lze vidět rozdíl na sudých prvcích diagonály a na sudých prvcích vedlejší diagonály. Dále bude provedena analýza pro více vozidel k ověření a určení způsobu výskytu vzájemných vazeb.

4.2.4 Určení symetrického řešení

Definice obecných tvarů výstupních a váhových matic jsou využity k určení řešení ARE (43), čímž je docíleno matice P . Řešení P je následně možno využít k výpočtu zpětnovazební, symetrické a stabilizující matice zesílení. Určení zpětnovazební matice je zaručeno pro veškeré varianty, tedy zavedení měření rozestupů a kombinací i s rychlostí. Váhová matice vstupů R je volena shodně pro všechny případy v diagonální podobě. Váhové matice stavů Q_i jsou určeny z výstupních matic C_i v (68). Pro tři vozidla a veškerá nalezená symetrická řešení (70,71,72) je docíleno:

$$F_1 = \begin{bmatrix} -1.818 & -3.464 & 0.702 & -1.732 & 0.702 \\ 0.702 & 1.732 & -1.818 & -1.732 & 0.702 \\ 0.702 & 1.732 & 0.702 & 3.464 & -1.818 \end{bmatrix}, \quad (74)$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -1.391 & -2.449 & 0.583 & -1.225 & 0.583 \\ 0.583 & 1.225 & -1.391 & -1.225 & 0.583 \\ 0.583 & 1.225 & 0.583 & 2.449 & -1.391 \end{bmatrix}, \quad (75)$$

pro zvolené parametry $[p = 1, q = 3, r = 1]$ dosazené do tvarů (73). Je docíleno struktury využívající veškerých stavů, které je vhodné využít pro centrální řízení. Ze získaných tvarů zpětnovazebních matic (74,75) lze zpozorovat symetrického tvaru matice. Tyto matice využívají vždy shodných zesílení u odchylek rychlostí daných vozidel. Na lichých sloupcích se vyskytují zesílení všech rychlostních odchylek. Taktéž je vidět shodné závislosti i -tého

vozidla na rychlostních odchylkách zbylých vozidel, a tedy 0.702 v případě měření pouze rozestupů a 0.583 při měření všech odchylek. Následně je možno spatřit závislosti na sudých prvcích, kde nastávají dva případy. Každé auto využívá kladných hodnot polohových odchylek předchozích vozidel a záporných odchylek následujících vozidel. Vzda-
lováním vozidel od aktuálního vozidla dochází absolutně k postupnému poklesu hodnot polohových odchylek.

4.2.5 Symetrické LQR pro více vozidel

Dále budou probírány pouze první a třetí situace, tedy měření rozestupů a veškerých stavů. Měření pouhých rychlostí je vynecháno. Výpočet symetrické matice Q je proveden a odzkoušen pro více vozidel kolony. U všech možností volby vozidel je docíleno stejné struktury váhové matice stavů. Výsledná struktura bude představena v koloně pěti vozidel.

Pro pět vozidel je upravena výstupní matice C z původního tvaru (64) na aktuální:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & -c_4 & 0 & -c_6 & 0 & -c_8 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (76)$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_9 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & -c_4 & 0 & -c_6 & 0 & -c_8 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (77)$$

Využitím výstupních matic (76,77) jsou určeny váhové matice. Využitím podmínek pro zaručení symetrických váhových matic, převedením do soustavy rovnic a vyřešením je získán obecný tvar volby symetrických váhových matic stavů a řízení:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 & 0 & 2c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 & 2c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 & 2c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (78)$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} c_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 & 0 & 2c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 & 2c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 & c_2^2 & 0 & 2c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1^2 \end{bmatrix}. \quad (79)$$

Z tvarů váhových matic pro pět vozidel (78,79) a pro tři vozidla lze vidět, že pro zvyšující počet vozidel, vznikají vazby mezi jednotlivými rozestupy váhových matic. Kvadratické kritérium (41) pro měření rozestupů u pěti vozidel je možno následovně rozepsat a vyjádřit:

$$J_3 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\begin{bmatrix} \delta y_1 \\ \delta w_1 \\ \delta y_2 \\ \delta w_2 \\ \delta y_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2q^2 & 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 & 2q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y_1 \\ \delta w_1 \\ \delta y_2 \\ \delta w_2 \\ \delta y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \delta f_2 \\ \delta f_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \delta f_2 \\ \delta f_3 \end{bmatrix} \right] dt =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty [(2\delta w_1 + \delta w_2)q^2\delta w_1 + (\delta w_1 + 2\delta w_2)q^2\delta w_2 + (\delta f_1^2 + \delta f_2^2 + \delta f_3^2)r] dt.$$

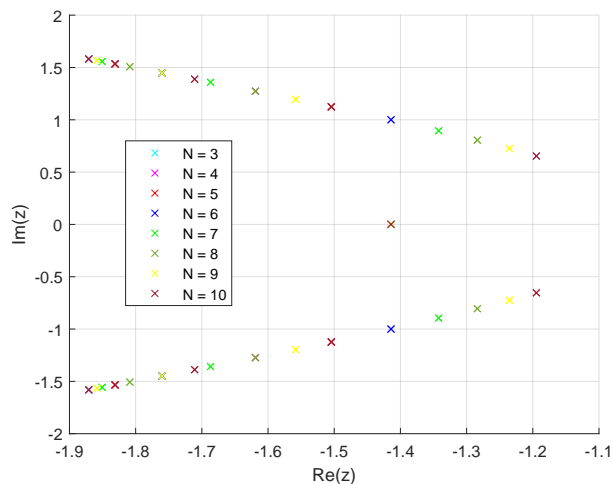
Pro vzrůstající počet vozidel se mění pouze první část kvadratického kritéria, vážící stavy vozidel. Aktuální odchylka je vždy dvojnásobná a kvadratická. Pro libovolný počet N vozidel je kritérium obecně zapsáno v následovném tvaru:

$$J_N = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[((2\delta w_1 + \delta w_2 + \dots + \delta w_{N-1})\delta w_1 + (\delta w_1 + 2\delta w_2 + \dots + \delta w_{N-1})\delta w_2 + \dots + (\delta w_1 + \delta w_2 + \dots + 2\delta w_{N-1})\delta w_{N-1})q^2 + (\delta f_1^2 + \delta f_2^2 + \dots + \delta f_N^2)r \right] dt. \quad (80)$$

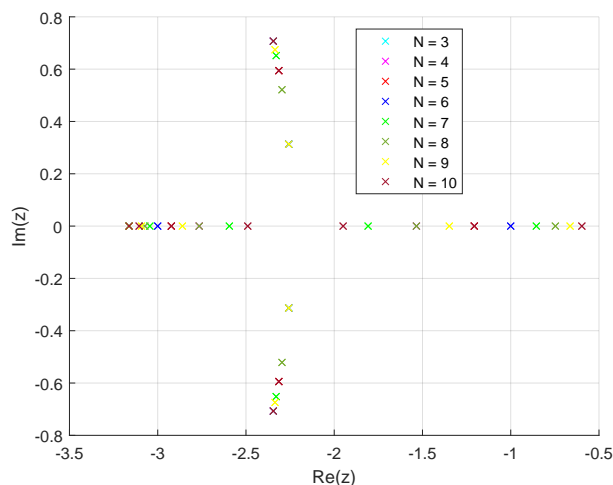
Kritérium (80) je převedeno do symetrického tvaru, ve kterém jsou veškeré stavy penalizovány shodným koeficientem q a veškeré vstupy jsou penalizovány koeficientem r .

4.2.6 Vývoj vlastních čísel

Pro symetrické LQR je nutné využít předchozích symetrických váhových matic. Využitím definovaných matic pro návrhy, které vychází z definování výstupní matice je nutné určit pouze tři parametry, a tedy p, q, r . Návrh se omezuje definováním tří parametrů pro libovolný počet N -ti vozidel. V sekci (4.2.4) jsou parametry definovány jako $p = 1, q = 3, r = 1$. Vývoj vlastních čísel pro tři až deset vozidel je zobrazen na obrázku (8). Vývoj vlastních čísel při odlišné volbě těchto parametrů je zobrazen na obrázcích (9,10,11).

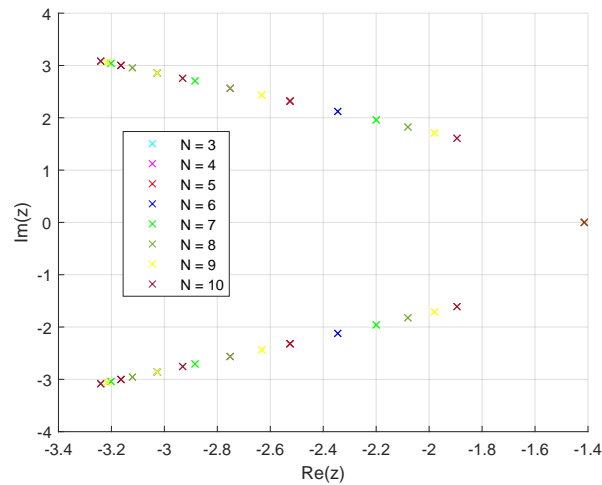


Obrázek 8: Průběh vlastních čísel uzavřené smyčky využitím symetrického LQR při volbě parametrů $p = 1, q = 3, r = 1$

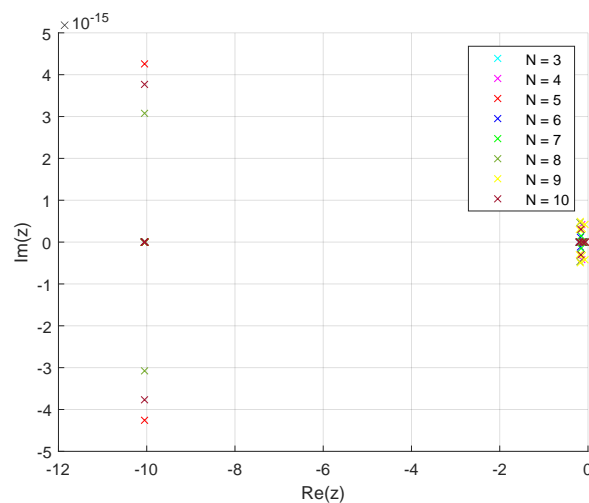


Obrázek 9: Průběh vlastních čísel uzavřené smyčky využitím symetrického LQR při volbě parametrů $p = 3, q = 3, r = 1$

Z obrázku (8) lze vidět, že shodnou volbou parametrů, jako dříve v (4.2.4), je získáno pro tři až deset vozidel vlastních čísel, které se umisťují na dvou téměř lineárních útvech. Mimo tento téměř lineární útvar se u každého vozidla vyskytuje vlastní číslo na hodnotě přibližně -1.4 . Při shodné volbě parametrů stavů, a tedy například $p = 3, q = 3$, je docíleno přiřazení vlastních čísel převážně ne nulové imaginární složce viz obrázek (9). Experimenty je odzkoušeno, že libovolná volba těchto parametrů stabilizuje systém a zaručí symetrickou stavovou zpětnou vazbu.



Obrázek 10: Průběh vlastních čísel uzavřené smyčky využitím symetrického LQR při volbě parametrů $p = 1, q = 10, r = 1$



Obrázek 11: Průběh vlastních čísel uzavřené smyčky využitím symetrického LQR při volbě parametrů $p = 10, q = 1, r = 1$

Pomocí návrhu symetrického LQR je docíleno pouze symetrických tvarů váhových matic, ale je vhodné volit parametry p, q, r rozumně. Pro velké rozdíly hodnot jsou vlastní čísla přiřazena velmi blízko imaginární osy. Pro zvyšující se hodnotu parametru q jsou vlastní čísla přiřazovaná na lineární útvar okolo reálné osy. Experimenty je možno se domnívat, že pokud je $q > p$ tak jsou vlastní čísla komplexně sdružená a v levé polorovině. Takový případ pro $p = 1, q = 10, r = 1$ je zobrazen na obrázku (10). V případě nesplnění této podmínky budou přiřazena vlastní čísla uzavřené smyčky umístěna taktéž ve stabilní polorovině, ale pouze s reálnou složkou viz obrázek (11). Póly jsou tedy přiřazeny pouze na reálné ose či s velmi malou zanedbatelnou hodnotou imaginární složky. Nicméně, některé z nich jsou velmi blízko počátku. Při zvyšující se hodnotě p se póly blíží počátku a blíží se

tak k mezi stability. Při dostatečně velké Volbě parametru r může být docíleno obdobného chování, a tedy posunutí některých pólů blízko imaginární osy.

4.2.7 Další možnosti výstupní matice

V předchozích sekcích se řeší možnost určení matic Q z výstupních matic, které využívají pouze přímých vazeb stavů. Každopádně, je možno řešit i situace, kdy výstupní matice je složena i z prvků mimo hlavní diagonálu. Nejrozsáhlejší případ představuje, že výstupní matice je plná a nebude se tedy vyskytovat žádný nulový prvek uvnitř matice.

Situace, které mohou být brány v potaz, představují plnou výstupní či váhovou matici C , Q a dále ještě plnou váhovou matici vstupů R . Takové situace je nutno vyřešit a při nich zajistit splnění vlastností pozitivní (semi-)definitnosti váhových matic. Pro tři vozidla jsou určeny plné symbolické váhové matice Q a R následovně:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} & q_{1,4} & q_{1,5} \\ q_{1,2} & q_{2,2} & q_{2,3} & q_{2,4} & q_{2,5} \\ q_{1,3} & q_{2,3} & q_{3,3} & q_{3,4} & q_{3,5} \\ q_{1,4} & q_{2,4} & q_{3,4} & q_{4,4} & q_{4,5} \\ q_{1,5} & q_{2,5} & q_{3,5} & q_{4,5} & q_{5,5} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{1,2} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{1,3} & r_{2,3} & r_{3,3} \end{bmatrix}. \quad (81)$$

Opětovně stejným postupem, tedy využitím podmínek (45,46), převedením na soustavu rovnic a jejím vyřešením, jsou získány obecné tvary pro volbu symetrických váhových matic Q a R . Dosazením nalezeného řešení lze upravit matice (81) do následovného tvaru:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{5,5} & -q_{4,5} & q_{3,5} & -q_{3,4} - q_{4,5} & q_{3,5} \\ -q_{4,5} & 2q_{2,4} & q_{3,4} + q_{4,5} & q_{2,4} & -q_{3,4} \\ q_{3,5} & q_{3,4} + q_{4,5} & q_{5,5} & q_{3,4} & q_{3,5} \\ -q_{3,4} - q_{4,5} & q_{2,4} & q_{3,4} & 2q_{2,4} & q_{4,5} \\ q_{3,5} & -q_{3,4} & q_{3,5} & q_{4,5} & q_{5,5} \end{bmatrix}, \quad (82)$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{3,3} & r_{2,3} & r_{2,3} \\ r_{2,3} & r_{3,3} & r_{2,3} \\ r_{2,3} & r_{2,3} & r_{3,3} \end{bmatrix}. \quad (83)$$

kde lze vidět, že matice již nemají žádné nulové prvky. Takový tvar zaručuje při libovolné volbě zbylých parametrů matic symetrický návrh. Každopádně, není uvažováno zaručení vlastností pozitivní (semi-)definitnosti. Je nutno prozkoumat, které volby zaručí tyto žádané vlastnosti. V první řadě je nutno zmínit, že diagonální prvky musí být nenulové, tím budou zaručeny původní tvary matic (73). Experimenty je odzkoušeno, že prvky $q_{3,4}$, $q_{4,5}$ jsou nevyhovujícími a ke splnění vlastnosti semi-definitnosti matice Q , je nutno, je zvolit nulové. Dosazením úpravy do váhová matice (82) je získán jeden další možný tvar této matice:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{5,5} & 0 & q_{3,5} & 0 & q_{3,5} \\ 0 & 2q_{2,4} & 0 & q_{2,4} & 0 \\ q_{3,5} & 0 & q_{5,5} & 0 & q_{3,5} \\ 0 & q_{2,4} & 0 & 2q_{2,4} & 0 \\ q_{3,5} & 0 & q_{3,5} & 0 & q_{5,5} \end{bmatrix}. \quad (84)$$

Získáním struktury matice (84) je vidět, že se liší vzhledem k (66) o jediný parametr $q_{3,5}$. V případě, že bude žádáno zvolit nulovou hodnotu prvků $q_{5,5}$, aby bylo stále zaručeno vlastností pozitivní definitnosti váhové matice, je nutno vynulovat i prvek $q_{3,5}$. Danou úpravou je docíleno, již dříve zmíněné, první variantě váhové matice v (73), která vychází

z výstupní matice určující pouze měření odchylek.

Pro druhou váhovou matici (83) je nutno se zabývat vlastností pozitivní definitnosti. Experimenty je zaručeno, že matice může být plná, ale je nutno zvolit prvky mimo diagonálu nižší vzhledem k prvkům na diagonále. Definitnost matice je určena například z determinantů hlavních minorů, kteří musí být, v tomto případě, kladné. Při výpočtu determinantu prvního hlavního minoru o velikosti 2×2 je řešena rovnice:

$$\det \begin{pmatrix} r_{3,3} & r_{2,3} \\ r_{2,3} & r_{3,3} \end{pmatrix} = \underbrace{r_{3,3}^2 - r_{2,3}^2}_{r_{3,3}^2 > r_{2,3}^2} > 0. \quad (85)$$

Minory matice shodně odpovídají libovolnému minoru hlavní diagonály matice R. Je tedy nutno zavést prvkům z (83,85) na diagonálních pozicích, v aktuálním případě $r_{3,3}$, libovolně vyšší hodnotu než prvkům mimo hlavní diagonálu $r_{2,3}$.

Řešení pro více vozidel probíhá obdobně, ale experimenty je zjištěno, že se vyskytuje více volných prvků. Pro čtyři vozidla vznikají na sudých prvcích hlavní diagonály dva rozdílné prvky. Je možno tedy určovat libovolněji hodnoty odchylek od polohy. Symetrický tvar váhové matice stavů pro čtyři vozidla odpovídá následně definované matici.

$$\begin{bmatrix} q_{7,7} & -q_{6,7} & q_{5,7} & -q_{5,6} - q_{6,7} & q_{3,7} & q_{4,7} - q_{6,7} & q_{5,7} \\ -q_{6,7} & \boxed{q_{6,6}} & -q_{4,7} + q_{6,7} & \boxed{q_{4,6}} & q_{5,6} + q_{4,7} & \boxed{q_{6,6}} - \boxed{q_{4,6}} & -q_{5,6} \\ q_{5,7} & -q_{4,7} + q_{6,7} & q_{7,7} & -q_{4,7} & q_{5,7} & -q_{5,6} - q_{4,7} & q_{3,7} \\ -q_{5,6} - q_{6,7} & \boxed{q_{4,6}} & -q_{4,7} & \boxed{2q_{4,6}} & q_{5,6} + q_{6,7} & \boxed{q_{4,6}} & q_{4,7} \\ q_{3,7} & q_{5,6} + q_{4,7} & q_{5,7} & q_{5,6} + q_{6,7} & q_{7,7} & q_{5,6} & q_{5,7} \\ q_{4,7} - q_{6,7} & \boxed{q_{6,6}} - \boxed{q_{4,6}} & -q_{5,6} - q_{4,7} & \boxed{q_{4,6}} & q_{5,6} & \boxed{q_{6,6}} & q_{6,7} \\ q_{5,7} & -q_{5,6} & q_{3,7} & q_{4,7} & q_{5,7} & q_{6,7} & q_{7,7} \end{bmatrix}$$

Z čehož je vidět, že člen z hlavní diagonály $q_{6,6}$, příslušející odchylkám od poloh, musí být větší než $q_{4,6}$ k zaručení rovnosti. Získáním tohoto tvaru je odzkoušeno, že lze volit různých penalizací odchylek od poloh s podmínkou: $q_{6,6} > q_{4,6}$, $q_{3,7}, q_{5,7} = 0$ a nulovostí nežádoucích prvků $q_{4,7}, q_{6,7}, q_{5,6} = 0$. Toto řešení je obdobné jako v předchozích částech, kde se vycházelo z měření odchylek od poloh a rychlostí. V opačném případě dojde k chybě při výpočtu řešení ARE.

Pro nalezená řešení je v tomto případě možnost určit více semi-definitních tvarů předchozí matice Q. V každém z možných případů je nutno zvolit nežádoucí prvky $[q_{4,7}, q_{6,7}, q_{5,6}]^T = \mathbf{0}_{3 \times 1}$. V opačném případě, volba nenulových hodnot prvků vede na konflikt s žádanou vlastností semi-definitní matice. Symetrická matice s dosazenými nulovými prvky je ve tvaru:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{7,7} & 0 & q_{5,7} & 0 & q_{3,7} & 0 & q_{5,7} \\ 0 & q_{6,6} & 0 & q_{4,6} & 0 & q_{6,6} - q_{4,6} & 0 \\ q_{5,7} & 0 & q_{7,7} & 0 & q_{5,7} & 0 & q_{3,7} \\ 0 & q_{4,6} & 0 & 2q_{4,6} & 0 & q_{4,6} & 0 \\ q_{3,7} & 0 & q_{5,7} & 0 & q_{7,7} & 0 & q_{5,7} \\ 0 & q_{6,6} - q_{4,6} & 0 & q_{4,6} & 0 & q_{6,6} & 0 \\ q_{5,7} & 0 & q_{3,7} & 0 & q_{5,7} & 0 & q_{7,7} \end{bmatrix}. \quad (86)$$

Při vhodné volbě zbylých parametrů je možno nalézt další možné symetrické pozitivně semi-definitní tvary. V dřívější analýze, kde se vychází z výstupních matic C, nebylo možné

získat i tyto struktury matice. Prvky matice $q_{7,7}$, $q_{6,6}$, $q_{4,6}$ představují penalizace rozestupů a rychlostí a jsou součástí hlavní diagonály. Z toho důvodu jsou nutnými nenulovými prvky. Každopádně, jak je řečeno, musí platit: $q_{6,6} > q_{4,6}$. Další možné pozitivně semi-definitní tvary, zaručující symetrickou váhovou matici, jsou obdrženy při volbě prvků $0 < q_{3,7} \leq q_{7,7}$ a $q_{5,7} = 0$, čímž je rozšířen předchozí tvar (86):

$$Q = \begin{bmatrix} q_{7,7} & 0 & 0 & 0 & q_{3,7} & 0 & 0 \\ 0 & q_{6,6} & 0 & q_{4,6} & 0 & q_{6,6} - q_{4,6} & 0 \\ 0 & 0 & q_{7,7} & 0 & 0 & 0 & q_{3,7} \\ 0 & q_{4,6} & 0 & 2q_{4,6} & 0 & q_{4,6} & 0 \\ q_{3,7} & 0 & 0 & 0 & q_{7,7} & 0 & 0 \\ 0 & q_{6,6} - q_{4,6} & 0 & q_{4,6} & 0 & q_{6,6} & 0 \\ 0 & 0 & q_{3,7} & 0 & 0 & 0 & q_{7,7} \end{bmatrix}, \quad (87)$$

kde pro libovolnou volbu splňující zmíněné podmínky je obdrženo žádaných vlastností symetrické váhové matice (87). Symetrická pozitivně semi-definitní matice tvaru (87) je možno zvolit například následovně:

$$\begin{aligned} q_{4,7} = 0, \quad q_{5,7} = 0, \quad q_{6,7} = 0, \quad q_{5,6} = 0, \\ q_{3,7} = 2, \quad q_{7,7} = 2, \quad q_{4,6} = 1, \quad q_{6,6} = 1.1, \end{aligned}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 & 1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 1 & 0 & 1.1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Na sudých prvcích hlavní diagonály je možno vidět zmíněných různých vah pro odchylky od polohy.

Následně nalezený tvar spočívá v nenulové volbě prvku $q_{5,7}$. Dodatečným zaručením nenulovosti tohoto prvku je získán tvar, který je v obdobném tvaru získán i v případě s třemi vozidly (84). Z váhové matice (86) je možno získat tvar, který má dodatečné pravidlo oproti předchozí matici (87). Je zde přidán nový prvek $q_{5,7}$ a je nutno zmínit, že rovnost mezi prvky $q_{3,7}$, $q_{7,7}$ neplatí. Pro volbu prvků musí platit původní a dodatečná podmínka:

$$[q_{4,7}, q_{6,7}, q_{5,6}]^T = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \quad 0 \leq q_{5,7} \leq q_{3,7} < q_{7,7}. \quad (88)$$

Libovolná vhodná volba parametrů q , která odpovídá podmínkám (88), je možno uvést například ve tvaru:

$$\begin{aligned} q_{4,7} = 0, \quad q_{5,6} = 0, \quad q_{6,7} = 0, \\ q_{5,7} = 1.2, \quad q_{3,7} = 1.3, \quad q_{7,7} = 1.4, \\ q_{4,6} = 1, \quad q_{6,6} = 1.1, \end{aligned}$$

kde volbou těchto parametrů je získána váhová matice ve tvaru:

$$Q = \begin{bmatrix} 1.4 & 0 & 1.2 & 0 & 1.3 & 0 & 1.2 \\ 0 & 1.1 & 0 & 1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 1.2 & 0 & 1.4 & 0 & 1.2 & 0 & 1.3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1.3 & 0 & 1.2 & 0 & 1.4 & 0 & 1.2 \\ 0 & 0.1 & 0 & 1 & 0 & 1.1 & 0 \\ 1.2 & 0 & 1.3 & 0 & 1.2 & 0 & 1.4 \end{bmatrix}.$$

Daný tvar představuje rozšíření předchozích tvarů a vhodnou volbou parametrů $q_{3,7}, q_{5,7}$, tedy nulovou, je možno tvar převést do předešlých tvarů.

Experimenty je zjištěno, že tento tvar váhové matice je možno dále rozšířit dostatečně malou a vhodnou kombinací dříve nulových parametrů. Tím je možno matici dále vyplnit a určit tak další možné tvary symetrické váhové matice, které splňují vlastnost semi-definitnosti. Každopádně, vliv některých kombinací je příliš složitý a není možno ho popsat matematicky. Nalezené semi-definitní tvary matice Q jsou například při původně zvolených parametrech, ale při úpravě prvků: $q_{4,7} = 0.2, q_{6,7} = 0.1, q_{5,6} = 0.1$. Dalšími kombinacemi lze docílit obdobných tvarů. Každopádně, veškeré tyto tvary jsou příliš složité a zpětné určení výstupních matic C zaručí velmi náročných struktur. Vhodnější volbu představují původně zmíněné tvary, které vychází pouze z přímých vazeb veličin. To znamená, že jsou součástí diagonálních prvků. Jediná výjimka představuje prvky mimo hlavní diagonálu u poslední vozidla, který využívá dopočtené odchylky od polohy.

U čtyř vozidel je nalezena i větší volnost ve váhové matici, která váží vektor řízení. Symetrická matice má tři volné parametry a je následovná:

$$R = \begin{bmatrix} r_{4,4} & r_{3,4} & r_{2,4} & r_{3,4} \\ r_{3,4} & r_{4,4} & r_{3,4} & r_{2,4} \\ r_{2,4} & r_{3,4} & r_{4,4} & r_{3,4} \\ r_{3,4} & r_{2,4} & r_{3,4} & r_{4,4} \end{bmatrix}.$$

Je nutno, aby tato matice splňovala vlastnost pozitivní definitnosti. Experimenty je zjištěno, že volba parametrů musí splňovat následující podmínku:

$$r_{4,4} > r_{2,4} \geq r_{3,4} \geq 0.$$

To znamená, že matici je nutno zvolit minimálně v diagonálním tvaru s nenulovými prvky na diagonále a případně s prvky mimo ní s menšími hodnotami. Takovou volbou je zaručena žádaná vlastnost. Názorný příklad volby a výsledného tvaru je následovný:

$$r_{2,4} = 0.9, \quad r_{3,4} = 0.8, \quad r_{4,4} = 1,$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.9 & 0.8 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.9 \\ 0.9 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.8 & 0.9 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Další možností představuje volba, kde prvky mimo hlavní diagonálu jsou shodné, ale menší než zbylé prvky. Taková varianta může představovat i nulové prvky, čímž je zaručeno dříve uvažovaného tvaru.

Pro analýzu pěti vozidel je možné očekávat opětovně zisk obdobných či shodných tvarů matic. Každopádně, je nutno zmínit, že lze očekávat exponenciální nárůst počtu možných symetrických tvarů. Což je ukázáno v situacích tří a čtyř vozidel, kde při zvýšeném počtu o jediné vozidlo bylo možno nalézt ihned několikanásobně více možných variant vyhovujících vlastnostem semi-definitnosti. Dalším problémem představuje náročnost výpočtů, která se při vzrůstajícím počtu vozidel taktéž navyšuje.

4.3 Symetrická stavová zpětná vazba

V této části proběhne prvně návrh veškerých možných stavových zpětných vazeb přiřazením požadovaných pólů. Je nutno zmínit, že se bude jednat opětovně o symbo-

lické výpočty. Pomocí symbolických výpočtů je umožněno nalézt obecného řešení, kterým jsou získány veškeré možné stavové zpětné vazby. Pro vhodné řešení je dále provedeno dodatečné omezení, určující veškerá symetrická řešení. Ze získaných řešení bude provedena analýza k nalezení obecných tvarů určení symetrické stavové zpětné vazby pro libovolný počet.

4.3.1 Nalezení stavové zpětné vazby

V dřívější části (3.4.1) je postup návrhu již popsán. Návrh se zabývá úplným přiřazením pólů podle předem definované matice L . Matice L je složena z Jordanových bloků, které obsahují požadovaná vlastní čísla dynamiky uzavřené smyčky. V práci se budou řešit hlavně situace, kde požadovaná vlastní čísla budou voleny v blocích o velikost 1×1 či 2×2 . Budou volena jednoduchá a případně dvojitá vlastní čísla. Jsou tedy řešeny situace s nulovou imaginární částí. To zejména z důvodu, že se zvyšující se náročností volby Jordanových bloků je zvyšována i náročnost výpočtu stavových zpětných vazeb.

Možností struktury přiřazující dynamiku matice uzavřené smyčky může představovat velké množství. Zvolené struktury je možno ověřit Rosenbrockovo větou. Pro úplné přiřazení pólů je věta definována následovně.

Věta 4.1 *Nechť $\mu(A, B) = \{\mu_i\}_{i=1}^m$ jsou indexy řiditelnosti dvojice matice (A, B) a $\nu(L) = \{\nu_i\}_{i=1}^k$ představují stupně nekonstantních invariantních polynomů matice L , poté je možno nalézt neprázdnou množinu stavových zpětných vazeb s danou strukturou matice L právě tehdy, když $k \leq m$, a pro $i = 1, 2, \dots, k$ platí [76]:*

$$\sum_{i=1}^j (\nu_i - \mu_i) \geq 0. \quad (89)$$

Při neúplném přiřazení pólů je rovnice (89) rozšířena o rozdíl $(n - s)$ představující celkový počet vlastních čísel a počet přiřazovaných vlastních čísel.

4.3.1.1 Přiřazovaná matice L

Symbolickými proměnnými je určen požadovaný tvar přiřazované dynamiky uzavřené smyčky. Proběhnou experimenty k nalezení co nejvíce možných struktur Jordanových matic, pomocí kterých je možno nalézt symetrická řešení. Nejjednodušší případ spočívá v případě volby všech shodných vlastních čísel. Prvně je nutno se zaměřit na situaci tří vozidel. V případě nalezení řešení je možno se pokusit zvýšit nalézt řešení i pro více vozidel a případně nalézt obecné řešení pro libovolný počet vozidel v koloně.

Pro $N = 3$ vozidla je obdrženo $n = 2N - 1 = 5$ stavů, a tedy je možno přiřadit pět vlastních čísel. Je nutno zmínit, že při řešení je kladen důraz na nalezení největšího množství struktur Jordanových matic. K získání různých Jordanových matic je možno upravovat Jordanových bloků. Každopádně, je nutno volit takové bloky, které jsou v souladu s Rosenbrockovou větou [76]. Z této věty a výpočetní náročnosti při řešení symbolických výpočtů je možno se zabývat pouze menším množstvím žádaných struktur Jordanovy matice. V práci se tak řeší tři možné způsoby struktury přiřazované matice vlastních čísel, které vedou na nalezení obecného tvaru. Tyto tvary je možno popsat následovně:

- 1. varianta: shodná vlastní čísla,
- 2. varianta: shodná vlastní čísla s výjimkou jediného,
- 3. varianta: dvě skupiny shodných N a $N - 1$ vlastních čísel.

Třetí varianta představuje možnost, kde například pro $N = 3$ vozidla jsou získány právě tři vlastní čísla odpovídající odchylkám od rychlostí a dvě vlastní čísla odpovídající odchylkám od poloh. Cílem parametrizace řešení je mít možnost určit stavovou zpětnou vazbu pro libovolný počet vozidel. V případě, že bude znám počet vozidel v koloně, je možno využít algoritmus výpočtu stavové zpětné vazby. Určené stavové zpětné vazby je poté možno aplikovat centrálním řídicím prvkem.

Zmíněné varianty je možno definovat pomocí Jordanových bloků, které jsou umístěny na hlavní diagonále matice. Je nutno zmínit, že pod pojmem veškerá shodná vlastní čísla je možno využít různých struktur Jordanových bloků. Z čehož je nutno si představit struktury bloků, které jsou pod těmito formulacemi zamýšleny.

První analyzovaná varianta představuje symbolickou volbu struktury Jordanových bloků, kde se vyskytují veškerá vlastní čísla. V blocích diagonály jsou prvky voleny jako záporné hodnoty vlastních čísel, a tedy je nutno zvolit kladnou hodnotu vlastního čísla k docílení stabilní volby vlastních čísel. Každopádně, předpokládá se situace, kde struktura je složena následovně:

$$L = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}, [-\lambda] \right),$$

kde *diag* představuje diagonální matici a matice uvnitř pojmu *diag* jsou vloženy na hlavní diagonálu přiřazované matice. Jedná se tedy o $N - 1$ bloků dvojitých vlastních čísel λ a jediným jednoduchým blokem taktéž vlastního čísla λ . Z důsledku Rosenbrockovy věty (89) plyne, že v situaci shodných vlastních čísel je nutno zvolit maximálně právě N bloků. Ilustrační volby diagonálních matic jsou zobrazeny pro tři až pět vozidel:

$$L_{1,3} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \quad L_{1,4} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix},$$

$$L_{1,5} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \quad (90)$$

kde matice $L_{i,j}$ určuje požadované umístění pólů uzavřené smyčky, index i značí dříve definovanou variantu a indexem j je značen počet vozidel v koloně.

Druhá varianta je obdobná první variantě. Nicméně, rozdíl nastává u původně posledního jednotného vlastního čísla, které je nyní uvažováno jako odlišné, tedy ν . Struktura matice je shodná a tato varianta je zobrazena následovně:

$$L = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}, [-\nu] \right).$$

Každým dodáním různých vlastních čísel, zvětšením struktury Jordanových bloků vedoucí na vlastní čísla dvojitá, trojitá a podobně, je zaručeno i zvýšení výpočetních nároků při symbolických výpočtech. Pro obecný případ se tedy jedná opětovně o $(N - 1)$ bloků složených z dvojitých vlastních čísel λ a posledně z bloku jednotného vlastního čísla ν . Názorné diagonální matice jsou zobrazeny pro případ tří a čtyř vozidel:

$$L_{2,3} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix}, \quad L_{2,4} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix}, \quad (91)$$

kde indexy matice $L_{i,j}$ opětovně značí definovanou variantu a počet vozidel v koloně.

Poslední, tedy třetí, zkoumaná varianta představuje složení dvou rozdílných jednoduchých vlastních čísel. Pro N vozidel je zaručeno právě n vlastních čísel. Je získáno N vlastních čísel λ pro odchylky od rychlosti a $N - 1$ vlastních čísel ν pro odchylky od polohy. Taková struktura je v obecném tvaru složena pouze z jednotných vlastních čísel a odpovídá:

$$L = \text{diag} \left([-\lambda], [-\lambda], \dots, [-\lambda], [-\nu], \dots, [-\nu] \right).$$

Očekávané diagonální matice, například pro tři až čtyři vozidla, jsou zobrazeny následovně:

$$L_{3,3} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix}, \quad L_{3,4} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix}, \quad (92)$$

kde indexy matice představují definovanou variantu a počet vozidel v koloně. Z tvarů (92) je vidět, že při každém zvýšení počtu vozidel v koloně je přidána dvojice (λ, ν) . Ze zkoumaných variant (90,91,92) je třetí varianta nejrozšířenější variantou vzhledem k počtu obsazení různých vlastních čísel. Každopádně, ideální situace představuje volbu veškerých různých vlastních čísel, tedy n různých a jednotných vlastních čísel. Nicméně, tato volba je vyzkoušena, ale výpočetně příliš složitá k získání jakýchkoliv výsledků.

4.3.1.2 Návrh stavových zpětných vazeb

Parametrizace všech stavových zpětných vazeb je provedena v prostředí Maple a za využití symbolických výpočtů. Pomocí symbolických výpočtů je možno zobecnit některé

předpisy a případným zobecněním lze docílit i vztahů, kterých by nemohlo být docíleno klasickými výpočty. Určení stavové zpětné vazby spočívá v přiřazení, dříve definovaných (90,91,92), žádaných matic dynamice uzavřené smyčky. Následným převedením na soustavu rovnic, úpravou a řešením soustavy je získán tvar obecné zpětnovazební matice $F(\alpha)$, která je parametrizována indexovanými parametry α . Parametry α a vlastní čísla představují veškerou volnost stavové zpětné vazby. Volnými parametry je možno různě upravovat stavovou zpětnou vazbu, například sloužící i k nulování některých prvků. Nulování prvků je využito v předchozí práci [9], a tedy je možno použít k úpravě, potlačení či eliminaci informace používané od zbylých veličin systému. V této práci veličiny představují informace jednotlivých vozidel a potlačení některých vazeb mezi nimi je docíleno omezení topologie, která určuje komunikaci mezi vozidly.

První definovaná varianta z (4.3.1.1) se třemi vozidly, popsána maticí $L_{1,3}$ z (90) zaručuje zpětnovazební matici $F(\alpha)$ v následovném tvaru: Zpětnovazební matice představující například první variantu se třemi vozidly, popsanou diagonální maticí, je vypočtena v parametrickém tvaru následovně:

$$\begin{bmatrix} \frac{(-\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2)\lambda + \alpha_1 + \alpha_2 - 1}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} & -\frac{\lambda^2(\alpha_2 - 1)}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} & \frac{\lambda\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} & \frac{\lambda^2}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} & -\frac{\lambda}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} \\ \frac{\lambda\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} & \frac{\lambda^2\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} & \frac{(-2\alpha_1 - \alpha_2 + 2)\lambda + \alpha_1 + \alpha_2 - 1}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} & \frac{\lambda^2}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} & -\frac{\lambda}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} \\ \frac{\lambda\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} & \frac{\lambda^2\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} & \frac{\lambda\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} & \frac{\lambda^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} & \frac{(-2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 1)\lambda + \alpha_1 + \alpha_2 - 1}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} \end{bmatrix},$$

kde je možno vidět dvou volných parametrů α_1, α_2 a následně obecného vlastního čísla λ , které musí být kladné. Další varianty v takto obecném tvaru již není možno zobrazit z důvodu složitosti jejich tvaru a obsahu prvků uvnitř jednotlivých matic. Dosazením libovolných hodnot veškerých parametrů obecné matice se docílí určení jednoho konkrétního tvaru stavové zpětné vazby. Dále je využito dodatečného omezení pro nalezenou množinu stavových zpětných vazeb.

4.3.2 Podmínky symetrické stavové zpětné vazby

Pro veškeré nalezené stavové zpětné vazby, parametrizované volností α , je možno využít omezení dle zvážení. Omezení v práci budu představovat podmínky návrhu symetrické stavové zpětné vazby z (40). Získání parametrické stavové zpětné vazby by mělo vést na nesymetrickou matici, ale volnými parametry je možno převést nesymetrickou stavovou zpětnou vazbu na symetrickou. Aplikováním podmínky $GF = FT$ je získána matice, která bude velmi pravděpodobně nenulová. Nenulovou matici, získanou užitím zmíněné podmínky, je možno převést na soustavu rovnic. Řešením soustavy rovnic lze získat parametry α . Získané parametry převádějí stavovou zpětnou vazbu do symetrického tvaru. Taktéž se mohou dále vyskytovat některé volné parametry, které je možno určit libovolně. Dosazením nalezeného řešení a opětovným provedením podmínky symetrické stavové zpětné vazby (40) je již zaručeno získání nulové matice.

4.3.2.1 Struktura se shodnými vlastními čísly

V předchozí části (4.3.1.2) je uveden tvar parametrizované stavové zpětné vazby, který vychází z volby shodných vlastních čísel (90). V první řadě je adekvátní se zabývat situací s třemi vozidly v koloně. Nalezené a vhodné řešení soustavy rovnic pro tři vozidla odpovídá:

$$\lambda > 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = -1, \quad (93)$$

kde dosazením tohoto řešení do zmíněné zpětnovazební matice z (4.3.1.2) je získána symetrická stavová zpětná vazba. Každopádně, pro získání symetrické matice bylo potřebné

využít pouze koeficientů α a vlastní číslo je stále možno volit libovolně kladné. Dosazením řešení (93) do zpětnovazební matice z (4.3.1.2) je tvar zjednodušen následovně:

$$F_{1,3} = \begin{bmatrix} -\frac{5\lambda}{3} + 1 & -\frac{2\lambda^2}{3} & \frac{\lambda}{3} & -\frac{\lambda^2}{3} & \frac{\lambda}{3} \\ \frac{\lambda}{3} & \frac{\lambda^2}{3} & -\frac{5\lambda}{3} + 1 & -\frac{\lambda^2}{3} & \frac{\lambda}{3} \\ \frac{\lambda}{3} & \frac{\lambda^2}{3} & \frac{\lambda}{3} & \frac{2\lambda^2}{3} & -\frac{5\lambda}{3} + 1 \end{bmatrix}, \quad (94)$$

kde indexy (1, 3) dané matice je opětovně značena první varianta a počet tří vozidel v koloně. Pro nalezenou strukturu zpětnovazební matice je možno vynulovat pouze členy $-\frac{5\lambda}{3} + 1$. Potlačení aktuálního prvku je docíleno volbou $\lambda = \frac{3}{5}$, čímž je odstraněna vazba odchylky od rychlosti vždy pro aktuální vozidlo. Pokud není žádáno potlačit tuto vazbu, další výhodou přináší libovolné určení tohoto vlastního čísla. Zvětšením hodnoty vlastního čísla se docílí zvýšení agresivity systému.

Pro návrh řízení pro více, tedy čtyř a pěti, vozidel je postup obdobný. Stále se jedná o první variantu využívající přiřazovanou matici se shodnými vlastními čísly a shodnou strukturou Jordanových bloků. Jak je již zmíněno, rozdíl nastane pouze v přidání vhodného počtu Jordanových bloků s dvojitým vlastním číslem. Prvně je tedy potřebné zvolit požadovanou matici uzavřené smyčky, která je definována dříve v (90). Následně se provede návrh parametrizované stavové zpětné vazby, dále použitím podmínek proběhne kontrola symetrické zpětné vazby. V případě nenulové matice se tato matice převede na soustavu rovnic a vyřeší se nutná volba volných parametrů, která zaručuje symetrický tvar zpětné vazby a splňuje potřebné podmínky. Využitím nalezených a vhodných řešení čtyř vozidel, jsou obdrženy následovné tvary zpětnovazební matice:

$$F_{1,4} = \begin{bmatrix} -\frac{7\lambda}{4} + 1 & -\frac{3\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{4} & -\frac{\lambda^2}{2} & \frac{\lambda}{4} & -\frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{4} \\ \frac{\lambda}{4} & \frac{\lambda^2}{4} & -\frac{7\lambda}{4} + 1 & -\frac{\lambda^2}{2} & \frac{\lambda}{4} & -\frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{4} \\ \frac{\lambda}{4} & \frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{4} & \frac{\lambda^2}{2} & -\frac{7\lambda}{4} + 1 & -\frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{4} \\ \frac{\lambda}{4} & \frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{4} & \frac{\lambda^2}{2} & -\frac{7\lambda}{4} + 1 & -\frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{4} \\ \frac{\lambda}{4} & \frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{4} & \frac{\lambda^2}{2} & -\frac{7\lambda}{4} + 1 & -\frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{4} \\ \frac{\lambda}{4} & \frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{4} & \frac{\lambda^2}{2} & -\frac{7\lambda}{4} + 1 & -\frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{4} \\ \frac{\lambda}{4} & \frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{4} & \frac{\lambda^2}{2} & -\frac{7\lambda}{4} + 1 & -\frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{4} \end{bmatrix}. \quad (95)$$

Pro pět vozidel je zpětnovazební matice $F_{1,5}$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{9\lambda}{5} + 1 & -\frac{4\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & -\frac{3\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & -\frac{2\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & -\frac{\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} \\ \frac{\lambda}{5} & \frac{\lambda^2}{5} & -\frac{9\lambda}{5} + 1 & -\frac{3\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & -\frac{2\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & -\frac{\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} \\ \frac{\lambda}{5} & \frac{\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & \frac{2\lambda^2}{5} & -\frac{9\lambda}{5} + 1 & -\frac{2\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & -\frac{\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} \\ \frac{\lambda}{5} & \frac{\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & \frac{2\lambda^2}{5} & -\frac{9\lambda}{5} + 1 & -\frac{2\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & -\frac{\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} \\ \frac{\lambda}{5} & \frac{\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & \frac{2\lambda^2}{5} & -\frac{9\lambda}{5} + 1 & -\frac{2\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & -\frac{\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} \\ \frac{\lambda}{5} & \frac{\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & \frac{2\lambda^2}{5} & -\frac{9\lambda}{5} + 1 & -\frac{2\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & -\frac{\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} \\ \frac{\lambda}{5} & \frac{\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & \frac{2\lambda^2}{5} & -\frac{9\lambda}{5} + 1 & -\frac{2\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & -\frac{\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} \\ \frac{\lambda}{5} & \frac{\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & \frac{2\lambda^2}{5} & -\frac{9\lambda}{5} + 1 & -\frac{2\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} & -\frac{\lambda^2}{5} & \frac{\lambda}{5} \end{bmatrix}, \quad (96)$$

kde ve všech případech je nutno volit kladnou hodnotu vlastního čísla λ k přiřazování stabilních vlastních čísel dle (90). Porovnáním těchto zpětnovazebních matic (94,95,96) lze vidět téměř shodných struktur, které jsou viditelně závislé na počtu vozidel. Při zvyšování počtu vozidel je matice vynásobena počtem vozidel, dále možné vidět závislost na sudých prvcích každého řádku. Zde se vyskytuje vždy kladná či záporná posloupnost celých čísel násobící vlastní číslo λ^2 . Každému vozidlu s indexem i přísluší právě i -tý řádek zpětnovazební matice. Zároveň stavy, které odpovídají vždy aktuálnímu vozidlu s indexem i jsou na prvcích $2i - 1$ a $2i$, kde poslední vozidla má pouze jeden stav. Pokud je tedy sudý prvek, neboli odchylka polohy, před stavy i -tého vozidla, po sudých prvcích před ním je kladná posloupnost $j\lambda = j(\lambda/N)$ pro $j = 1, \dots, N - 1$ a končí v hodnotě λ/N . V opačném případě se vyskytuje záporná posloupnost končící v $-\lambda/N$. Na lichých prvcích matice je závislost, která nabývá dvou hodnot. Hodnoty jsou buď $P = -\frac{(2N-1)\lambda}{N} + 1$ na prvcích odpovídajících odchylkám od rychlosti aktuálního vozidla.

Na všech zbylých se vyskytuje hodnota $p = \lambda/N$.

Pro zvyšující se počet vozidel roste náročnost i tohoto nejjednoduššího tvaru, který přiřazuje dynamice uzavřené smyčky stejná vlastní čísla. Proto je velmi důležité najít obecný tvar výpočtu zpětnovazební matice stavové zpětné vazby. Nalezený obecný tvar je nejprve zobrazen v pro kolonu pěti vozidel (97). Obecná zpětnovazební matice $N = 5$ vozidel odpovídá:

$$F_{1,N=5} = \begin{bmatrix} P & -4q & p & -3q & p & -2q & p & -q & p \\ p & q & P & -3q & p & -2q & p & -q & p \\ p & q & p & 2q & P & -2q & p & -q & p \\ p & q & p & 2q & p & 3q & P & -q & p \\ p & q & p & 2q & p & 3q & p & 4q & P \end{bmatrix}, \quad (97)$$

kde prvky představují dříve zmíněné vztahy určené parametry N, λ . Prvky z (97) je možno obecně zapsat jako:

$$P = -\frac{(2N-1)\lambda}{N} + 1, \quad p = \frac{\lambda}{N}, \quad q = \frac{\lambda^2}{N}, \quad (98)$$

kde dosazením za $N = 5$ lze dostat vhodného tvaru pro aktuální počet vozidel. Z určeného obecného tvaru pěti vozidel (97) a obecných tvarů (98) je možno sepsat obecný tvar, pomocí kterého je možno určit symetrickou stavovou zpětnou vazbu s libovolným počtem vozidel (99). Důležitost obecného tvaru zpětnovazební matice je klíčová v případě aplikování algoritmu do reálného světa. V reálném světě je nutno, aby výpočty byly dostatečně rychlé k zamezení časově opožděných komunikací s informací. Obecný tvar při volbě shodných vlastních čísel je ve tvaru:

$$F_{1,N} = \begin{bmatrix} P & -(N-1)q & p & -(N-2)q & p & \dots & -2q & p & -q & p \\ p & q & P & -(N-2)q & p & \dots & -2q & p & -q & p \\ p & q & p & 2q & P & \dots & -2q & p & -q & p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ p & q & p & 2q & p & \dots & 3q & P & -q & p \\ p & q & p & 2q & p & \dots & 3q & p & 4q & P \end{bmatrix}. \quad (99)$$

Určení tohoto tvaru (99) zaručuje možnost rychlého určení vhodného tvaru zpětnovazební matice a není již nutno provádět symbolických výpočtů k zaručení dané struktury. Taktéž je zaručeno konkrétní struktury vlastních čísel a stačí již pouze zvolit libovolné kladné vlastní číslo λ . Nicméně, jedná se o strukturu zpětnovazební matice, které je docíleno volbou shodných vlastních čísel. Vhodnější situace představuje větší volnost volby vlastních čísel. Jelikož se jedná o návrh symetrické zpětné vazby, pravděpodobně ani nepůjde docílit situace všech rozdílných vlastních čísel. Takové experimenty jsou provedeny, ale bez jakéhokoliv přínosu. Další situace možných struktur jsou představeny v dalších částech.

4.3.2.2 Struktura s jedním odlišným vlastním číslem

V této části jsou provedeny úpravy, které vedou k mírným změnám důležitých výsledných tvarů (98,99). Tato struktura je představena v (4.3.1.1) či dle Jordanových bloků žádané matice (91). Pro tuto variantu již není možno vypsát parametrizované stavové zpětné vazby s parametry α a to ani pro tři vozidla. Proto budou zobrazeny pouze tvary zpětnovazební po jejím dosazení. Postup návrhu je opětovně stejný. Jediná výjimka nastává v různé počáteční volbě přiřazované matice L . Z nalezených řešení

soustavy rovnic jsou dosazeny vhodné parametry, pomocí kterých je stavová zpětná vazba převedena na její symetrickou podobu. Zbylou volnost poté představují parametry $N - 1$ vlastních čísel, tedy v aktuálním případě $N - 2$ vlastních čísel λ a jedno vlastní číslo ν . Žádaným krokem je nalézt tvary zpětnovazebních matic, analyzovat je a pokud to bude možno tak provést jejich zobecnění. Čímž bude získán univerzální tvar zpětnovazební matice pro libovolný počet vozidel. Pro tři vozidla je získán tvar zpětnovazební matice:

$$F_{2,3} = \begin{bmatrix} -\frac{4\lambda}{3} - \frac{\nu}{3} + 1 & -\frac{2\lambda^2}{3} & \frac{2\lambda}{3} - \frac{\nu}{3} & -\frac{\lambda^2}{3} & \frac{2\lambda}{3} - \frac{\nu}{3} \\ \frac{2\lambda}{3} - \frac{\nu}{3} & \frac{\lambda^2}{3} & -\frac{4\lambda}{3} - \frac{\nu}{3} + 1 & -\frac{\lambda^2}{3} & \frac{2\lambda}{3} - \frac{\nu}{3} \\ \frac{2\lambda}{3} - \frac{\nu}{3} & \frac{\lambda^2}{3} & \frac{2\lambda}{3} - \frac{\nu}{3} & \frac{2\lambda^2}{3} & -\frac{4\lambda}{3} - \frac{\nu}{3} + 1 \end{bmatrix}, \quad (100)$$

kde libovolně kladná volba vlastních čísel λ, ν zaručí stabilizaci dynamiky uzavřené smyčky. Je vidět, že jednotlivé prvky zpětnovazební matice (100) se v dané variantě lehce mění vzhledem k první variantě (94). To je zavedena jediná a nejjednodušší úprava. Každopádně závislosti je stále možno dohledat. Určením matic pro více vozidel potvrzují předpoklady obecného tvaru této varianty. Pro čtyři vozidla je zpětnovazební matice $F_{2,4}$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{3\lambda}{2} - \frac{\nu}{4} + 1 & -\frac{3\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{2} - \frac{\nu}{4} & -\frac{\lambda^2}{2} & \frac{\lambda}{2} - \frac{\nu}{4} & -\frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{2} - \frac{\nu}{4} \\ \frac{\lambda}{2} - \frac{\nu}{4} & \frac{\lambda^2}{4} & -\frac{3\lambda}{2} - \frac{\nu}{4} + 1 & -\frac{\lambda^2}{2} & \frac{\lambda}{2} - \frac{\nu}{4} & -\frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{2} - \frac{\nu}{4} \\ \frac{\lambda}{2} - \frac{\nu}{4} & \frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{2} - \frac{\nu}{4} & \frac{\lambda^2}{2} & -\frac{3\lambda}{2} - \frac{\nu}{4} + 1 & -\frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{2} - \frac{\nu}{4} \\ \frac{\lambda}{2} - \frac{\nu}{4} & \frac{\lambda^2}{4} & \frac{\lambda}{2} - \frac{\nu}{4} & \frac{\lambda^2}{2} & \frac{\lambda}{2} - \frac{\nu}{4} & \frac{3\lambda^2}{4} & -\frac{3\lambda}{2} - \frac{\nu}{4} + 1 \end{bmatrix}. \quad (101)$$

Zpětnovazební matice dané varianty pro pět vozidel je již příliš obsáhlá, a proto nebude zobrazena. Každopádně, je možno vidět, že struktura (100,101,122) je opětovně obdobná jako v první variantě (94). Z čehož je možno říct, že obecná struktura lze zapsat shodně, ale s menší úpravou prvků. Zpětnovazební matici lze zapsat ve tvaru (99) či konkrétně v případě pěti vozidel (97). Každopádně, jednotlivé prvky je nutno upravit do následovného tvaru: (98)

$$P = -\frac{(2N-2)\lambda}{N} - \frac{\nu}{N} + 1, \quad p = \frac{2\lambda}{N} - \frac{\nu}{N}, \quad q = \frac{\lambda^2}{N}. \quad (102)$$

Pozorováním vztahů pro prvky (98,102) je možno zpozorovat, že dosazením $\nu = \lambda$ nastává rovnost v těchto předpisech. Pokud zmíněné dosazení nebude použito, bude zaručeno dvou odlišných vlastních čísel. Libovolnou kladnou volbou vlastních čísel je taktéž stabilizována uzavřená smyčka.

4.3.2.3 Struktura rozdělená na vlastní čísla odchylek rychlostí a poloh

Tato struktura představuje třetí variantu vycházející z části (4.3.1.1), a tedy konkrétně z (92). Návrh probíhá shodným způsobem s výjimkou tvaru přiřazovatelné žádané dynamice. Řešením je zaručen symetrický tvar stavové zpětné vazby. Stavová zpětná vazba zaručuje pólům uzavřené smyčky N shodných jednotných vlastních čísel odchylek od rychlostí λ a $N - 1$ shodných jednotných vlastních čísel odchylek od polohy ν . Takto definovaný tvar zaručuje největší volnost ve volbě parametrů. Přiřazení vlastních čísel dvěma skupinám, které mohou být odlišné od sebe, umožňuje vhodně upravit agresivitu těchto veličin. Tvar je nutno zobecnit pro libovolný počet vozidel. K tomu jsou určeny zpětnovazební matice tří až pěti vozidel. Pro tři vozidla je tvar následovný:

$$F_{3,3} = \begin{bmatrix} -\lambda - \frac{2\nu}{3} + 1 & -\frac{2\lambda\nu}{3} & \frac{\nu}{3} & -\frac{\lambda\nu}{3} & \frac{\nu}{3} \\ \frac{\nu}{3} & \frac{\lambda\nu}{3} & -\lambda - \frac{2\nu}{3} + 1 & -\frac{\lambda\nu}{3} & -\frac{\lambda\nu}{3} \\ \frac{\nu}{3} & \frac{\lambda\nu}{3} & \frac{\nu}{3} & \frac{2\lambda\nu}{3} & -\lambda - \frac{2\nu}{3} + 1 \end{bmatrix}. \quad (103)$$

Pro čtyři vozidla je zpětnovazební matice $F_{3,4}$ ve tvaru:

$$\begin{bmatrix} -\lambda - \frac{3\nu}{4} + 1 & -\frac{3\lambda\nu}{4} & \frac{\nu}{4} & -\frac{\lambda\nu}{2} & \frac{\nu}{4} & -\frac{\lambda\nu}{4} & \frac{\nu}{4} \\ \frac{\nu}{4} & \frac{\lambda\nu}{4} & -\lambda - \frac{3\nu}{4} + 1 & -\frac{\lambda\nu}{2} & \frac{\nu}{4} & -\frac{\lambda\nu}{4} & \frac{\nu}{4} \\ \frac{\nu}{4} & \frac{\lambda\nu}{4} & \frac{\nu}{4} & \frac{\lambda\nu}{2} & -\lambda - \frac{3\nu}{4} + 1 & -\frac{\lambda\nu}{4} & \frac{\nu}{4} \\ \frac{\nu}{4} & \frac{\lambda\nu}{4} & \frac{\nu}{4} & \frac{\lambda\nu}{2} & \frac{\nu}{4} & \frac{3\lambda\nu}{4} & -\lambda - \frac{3\nu}{4} + 1 \end{bmatrix}. \quad (104)$$

Matice pro pět vozidel je již příliš velká. Každopádně, tvar je opětovně obdobný a je zobrazena v přílohách viz (123). Pomocí těchto tvarů (103,104,123) je možno tuto variantu taktéž převést do vztahu k určení obecné zpětnovazební matice s libovolným počtem N -ti vozidel. Znovu, lze využít tvaru (99). Prvky P, p, q této matice jsou upraveny:

$$P = -\lambda - \frac{(N-1)\nu}{N} + 1, \quad p = \frac{\nu}{N}, \quad q = \frac{\lambda\nu}{N}, \quad (105)$$

kde jediná značná změna nastává u vztahu prvku p . V předchozích variantách představuje tento prvek vždy vlastní čísla, kterých je značně více v přiřazované matici. V druhé variantě (102) je proveden rozdíl od dominantního počtu vlastních čísel. Každopádně, při volbě $\lambda = \nu$ je zaručena shodnost se zbylými variantami. Prvek q je rozložen na součin vlastních čísel, což při zavedení shodnosti udává stejný tvar s předchozími variantami.

Pro libovolnou kladnou volbu vlastních čísel prvků (105) je docíleno stabilizace systému kolony vozidel. Tuto nejrozšířenější volbu různých vlastních čísel by bylo vhodné rozšířit do tvaru s veškerými různými vlastními čísly. Přestože jsou získány tři obecné tvary zaručující různých struktur přiřazovaných matic, není možno dohledat obecnější volbu vlastních čísel při symetrickém návrhu. To zejména z důvodu, že veškeré návrhy v reálném oboru určují řešení s maximálně dvěma rozdílnými vlastními čísly. Experimenty k nalezení tří rozdílných vlastních čísel jsou provedeny, ale nalezené symetrické řešení převádí tvary do kvadratických tvarů. Tyto tvary vedou na řešení s komplexními výrazy ve zpětnovazební matici a je velmi složité některý z těchto tvarů rozšířit do obecné podoby.

4.3.2.4 Porovnání nalezených tvarů

Pozorováním prvků veškerých variant (98,102,105) je možno si všimnout, že prvek P je definován vždy obdobným způsobem. V každé variantě prvek odpovídá počtu vlastních čísel λ v čitateli a ve jmenovateli počet vozidel N . Zbylá vlastní čísla tvoří obdobný zlomek, kde v čitateli se vyskytuje počet daných vlastních čísel a ve jmenovateli počet vozidel. Je možno předpokládat, že v případě zobecnění na různost veškerých vlastních čísel by tvar mohl být složen z takového součtu. Nejrozsáhlejší struktura by tedy představovala možnost dynamice s dimenzí n přiřadit právě n vlastních čísel. Což v případě například tří vozidel vede na pět různých vlastních čísel. Prvek P by měl být, při předpokladu různých vlastních čísel, v obecném tvaru následovný:

$$P = 1 - \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j}{N},$$

kde λ_i představují různá vlastní čísla (například λ, ν a podobně). Taková struktura prvku odpovídá všem nalezeným strukturám. K výjimkám tak dochází u následujících prvků.

Pro první a druhou variantu je obdobná i volba prvku p . Dominantní počet vlastních čísel pravděpodobně směřuje na prvky nacházející se na lichých prvcích, s výjimkou prvku

P . Tyto členy matice představují závislost odchylek rychlostí veškerých vozidel kolony. Pokud se tedy nejedná o prvek P , který popisuje závislost odchylky od rychlosti daného vozidla. V první a druhé variantě se ve vztahu prvku p vyskytuje kladné vlastní číslo λ . Při zavedení druhého rozdílného vlastního čísla je vlastní číslo dvojnásobné a vzniká rozdíl s druhým vlastním číslem, tedy dle (98,102). Dalo by se očekávat, že obdobným způsobem by se mohl nalézt obecný tvar. Nicméně, razantní rozdíl nastává v třetí situaci, kde vztah je nyní tvořen vlastním číslem polohových odchylek ν . Ve všech variantách se vyskytuje v Jordanovo maticích dominantní počet vlastních čísel λ . Každopádně v této variantě již prvek p není vůbec tvořen vlastním číslem λ . Tím pádem je zavedena zcela jiná situace, kterou dle předchozích variant není možno lehce zobecnit. Jediná shoda nastává v případě, že je zavedena rovnost vlastních čísel. Poté jsou si prvky rovny. Rozšíření na více různých vlastních čísel již není možno provést symbolicky z výpočetních důvodů.

Třetí prvek odpovídá v každém případě součinu vlastních čísel viz (98,102,105). Každopádně, je nutno zmínit, že součin vždy tvoří maximálně druhou mocninu vlastních čísel. Tedy při dosazení $\lambda = \nu$ je získán prvek λ^2 . Tento člen je možno odzkoušet pouze pro strukturu Jordanovy matice s maximálně dvěma vlastními čísly. Z toho důvodu je možno tuto volbu pouze diskutovat. Dvě možnosti by tak mohly představovat řešení. Prvek q tak může být složen ze součinů různých vlastních čísel. Další řešení by mohlo představovat rozložení vlastních čísel v tomto součinu, aby při dosazení $\lambda = \lambda_i, \forall i$ vedlo na maximálně druhou mocninu vlastního čísla, a tedy λ^2 . Tudíž mimo vlastního čísla λ je nutno zavést ostatním vlastním číslům nějakou hodnotu odmocniny. Například pro pět vozidel je obdrženo pět vlastních čísel. Jedno z nich představuje právě λ a zbylá vlastní čísla by dosazením λ měly být ve tvaru čtvrté odmocniny. Tím by byla zaručena rovnost $\lambda_1^2 = \lambda_1 \sqrt[4]{\lambda_2} \sqrt[4]{\lambda_3} \sqrt[4]{\lambda_4} \sqrt[4]{\lambda_5}$, kde $\lambda_i = \lambda_1$. Nicméně, jedná se pouze o předpoklad, který není potvrzen a výsledný obecný tvar není nalezen.

Dodatečnými experimenty a zkoumáním třetí varianty (105) se povedlo najít některé struktury, pomocí kterých je umožněno přiřadit tři rozdílná vlastní čísla. Jordanovy bloky jsou tedy tvořeny jednotnými vlastními čísly:

$$diag([-λ], [-λ], [-λ], [-ν], [-μ]).$$

Přiřazovaná matice L má tvar:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}. \quad (106)$$

Každopádně, řešení již není v oboru reálných čísel, ale jedná se o komplexní složité tvary. Pro tři vozidla je nalezen tvar využívající komplexního zápisu, který je zobrazen v přílohách viz (124). Na sudých prvcích již nedochází pouze k posloupnosti čísel, které násobí jeden určitý tvar. Aktuálně k tomu tvaru bývá ještě přičtena imaginární složka. Při řešení je zároveň nutno pracovat s kvadratickými rovnicemi, které zaručují větší množství výsledků. Z toho důvodu je možno říct, že forma je bez řešení.

Poslední tvar je získán pro čtyři vozidla, pomocí kterého proběhla snaha určit obecný tvar zpětné vazby. Každopádně pro zvyšující se počet vozidel je nutno zavést

dalších dvou vlastních čísel, což lehce upraví předchozí tvar Jordanových bloků v matici (106). Dodáním dalších bloků:

$$\text{diag}([-λ], [-λ], [-λ], [-λ], [-ν], [-ν], [-μ]).$$

je sestrojena Jordanova matice L:

$$\begin{bmatrix} -λ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -λ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -λ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -λ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -ν & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -ν & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -μ \end{bmatrix},$$

kde se nyní nachází dvě shodné vlastní čísla $ν$. Obdobným způsobem je nalezeno řešení, které v aktuálním případě nevede na kvadratické rovnice. To znamená, že je obdrženo tvar, který nevyužívá imaginárních částí a představuje tak reálné řešení. Matice F pro čtyři vozidla má tvar:

$$\begin{bmatrix} 1 - λ - \frac{ν}{2} - \frac{μ}{4} & -\frac{(μ+2ν)λ}{4} & \frac{μ}{4} & -\frac{νλ}{2} & -\frac{μ}{4} + \frac{ν}{2} & -\frac{μλ}{4} & \frac{μ}{4} \\ \frac{μ}{4} & \frac{μλ}{4} & 1 - λ - \frac{ν}{2} - \frac{μ}{4} & -\frac{νλ}{2} & \frac{μ}{4} & \frac{(μ-2ν)λ}{4} & -\frac{μ}{4} + \frac{ν}{2} \\ -\frac{μ}{4} + \frac{ν}{2} & -\frac{(μ-2ν)λ}{4} & \frac{μ}{4} & \frac{νλ}{2} & 1 - λ - \frac{ν}{2} - \frac{μ}{4} & -\frac{μλ}{4} & \frac{μ}{4} \\ \frac{μ}{4} & \frac{μλ}{4} & -\frac{μ}{4} + \frac{ν}{2} & \frac{νλ}{2} & \frac{μ}{4} & \frac{(μ+2ν)λ}{4} & 1 - λ - \frac{ν}{2} - \frac{μ}{4} \end{bmatrix}, \quad (107)$$

kde lze vidět již poměrně jiného chování. Z dřívějších variant je vyjádřen obecný tvar matice (99), který v těchto případech je odlišný. Na sudých prvcích již dochází k oscilaci znamének a změně hodnot viz prvky (3,2) a (3,4) či (2,4) a (2,6) z matice (107). Každopádně, dosazením rovnosti všech vlastních čísel s $λ$ je zaručeno shodného tvaru dle (99). Pro libovolně kladná vlastní čísla je taktéž zaručeno vhodného tvaru stabilizující uzavřenou smyčku. Ověření tohoto tvaru již nelze ověřit v případě pěti či více vozidel, jelikož řešení využívá kubických rovnic či i rovnic vyšších řádů. Vyřešením těchto rovnic a určením zpětnovazebních matic jsou jejich tvary nepřehledné a příliš rozsáhlé k jakémukoliv závěru.

4.4 Diskrétní model

Vozidla mohou takovéto algoritmy využívat skrze počítače, které jsou v těchto konstrukcích zabudovány. Pro ty je ale nutno převést algoritmy řízení do diskretní oblasti. V průběhu řízení se tak bude počítačem ovládat vozidlo v nějakých časových okamžicích, které budou určeny vzorkovací periodou T_s . Například každou vteřinu může být určen vyhovující akční zásah danému vozidlu.

Diskrétní stavový popis je dán diskretizací spojitého stavového popisu (14). Diskrétní tvar:

$$\mathbf{x}_{k+1} = A_d \mathbf{x}_k + B_d \mathbf{u}_k, \quad (108)$$

kde matice A_d, B_d jsou diskretní maticí dynamiky a vstupní diskretní maticí a výstupní diskretní rovnice je dána ve tvaru:

$$y_k = C_d \mathbf{x}_k + D_d \mathbf{u}_k.$$

s diskretními maticemi C_d, D_d . Převedení spojitého popisu na diskretní popis je možno provést několika možnými transformacemi. Transformace mohou být provedeny pro

frekvenční či časovou oblast. V práci je využit stavový popis, a proto bude využita transformace v časové oblasti. Jednotlivé převody časové oblasti, které zaručují diskrétní model lze provést například následovně [39]:

- obdélníkovou dopřednou transformací,
- obdélníkovou zpětnou transformací,
- lichoběžníkovou transformací,
- tvarovačem nultého řádu (ZOH),
- tvarovačem prvního řádu (FOH),

kde vztahy metod budou uvedeny pouze pro použitý způsob převodu. V práci proběhne diskretizace systému pomocí ZOH. Převedení spočívá v určení matic z diskrétní stavové rovnice (108). Vztahy mezi maticemi jsou následovné:

$$\begin{aligned} A_d &= e^{AT_s}, \\ B_d &= A^{-1}(e^{AT_s} - I)B, \\ C_d &= C, \\ D_d &= D, \end{aligned} \tag{109}$$

kde matice výstupní rovnice zůstávají shodné, matice stavové rovnice jsou upraveny a matice I je jednotkovou maticí vhodných rozměrů. Vstupní matice je určena řešením integrálu z vývoje stavu v čase viz (112). Jelikož je práce zaměřena převážně na symetrický návrh řízení, je nutno ověřit vstupní symetrii diskrétního tvaru. Výpočet matic symetrie a cirkulační matice zůstává shodný viz (34,31). Určením matic diskrétní stavové rovnice je možno ověřit podmínky vstupní symetrie (29,30). Pro případ tří vozidel jsou získány diskrétní matice v podobě:

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{bmatrix} 0.368 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.632 & 1.000 & -0.632 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.368 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.632 & 1.000 & -0.632 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.368 \end{bmatrix}, \\ B_d &= \begin{bmatrix} 0.632 & 0.000 & 0.000 \\ 0.368 & -0.368 & 0.000 \\ 0.000 & 0.632 & 0.000 \\ 0.000 & 0.368 & -0.368 \\ 0.000 & 0.000 & 0.632 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{110}$$

kde pro diskretizaci (4.4) je zvolena vzorkovací perioda $T_s = 1[s]$.

4.4.1 Ověření vstupně symetrického diskrétního modelu

Diskretizovaný model musí opětovně splňovat podmínky vstupně symetrického systému. Ve spojitém případě je ukázána kontrola pro konkrétně tři vozidla, kde je využita matice symetrie (36) a matice dynamiky i vstupní matice z (35). Posledně je

zavedena cirkulační matice, která je opětovně shodná a je ve tvaru:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dosazením matice symetrie, cirkulační matice a diskretních matic stavové rovnice (110) je možno ověřit, že převedením spojitého modelu do diskretní oblasti je vlastnost zachována. Podmínky vstupní symetrie s diskretními maticemi:

$$TA_d - A_dT \stackrel{!}{=} 0, \quad TB_d - B_dG \stackrel{!}{=} 0. \quad (111)$$

Dosazením do podmínek je opětovně zaručeno získání nulových matic. Nicméně, dosazením matic do vztahů převádí maticovou rovnici do příliš rozsáhlého tvaru. Podmínky vstupní symetrie diskretního systému jsou pro názornou ukázkou dodány do příloh práce, ale jedná se o zaokrouhlené tvary na jedno desetinné místo viz (125,126). Ověření je provedeno i pro větší počet vozidel, pro které je taktéž zaručeno splnění obou podmínek. Toto tvrzení tak potvrzuje, že pokud je systém vstupně symetrický v časové oblasti, systém představuje vstupně symetrický systém i v diskretní oblasti. Tvrzení o zaručení vstupní symetrie spojitého a zároveň diskretního systému je možno podložit důkazem.

Důkaz: Nechť je dána stavová rovnice spojitého systému (14) a diskretního systému (108) s periodou vzorkování T_s . Nechť je dvojice (A_d, B_d) vstupně symetrická pro matici symetrie T , pokud platí podmínky vstupně symetrického systému (29,30) ve spojitě oblasti a vývoj stavového vektoru LTI systému je dán rovnicí:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad (112)$$

kde rovnice diskretního systému je možno získat dosazením vzorkovací periody, a tedy $t = T_s$ je získána rovnice:

$$x(T_s) = e^{AT_s}x_0 + \int_0^{T_s} e^{A(T_s-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

kde $A_d = e^{AT_s}$ a $B_d = e^{AT_s} \int_0^{T_s} e^{-A\tau}d\tau B$ či z (4.4). Poté pro podmínku (29) platí, že:

$$TA_d = Te^{AT_s} = T(I + AT_s + \frac{1}{2!}(AT_s)^2 + \dots) = (I + AT_s + \frac{1}{2!}(AT_s)^2 + \dots)T = \underbrace{e^{AT_s}T}_{A_dT},$$

kde exponenciální člen je možno rozvést do Taylorovy řady a využitím podmínek (29) je možné ho přesunout na pravou stranu exponenciálního členu. Dále je možno obdobným způsobem provést podmínku (30) a platí:

$$TB_d = T \underbrace{e^{AT_s}}_{(I+AT_s+\dots)} \int_0^{T_s} \underbrace{e^{-A\tau}}_{(I-A\tau+\dots)} d\tau B = e^{AT_s} \int_0^{T_s} e^{-A\tau} d\tau \underbrace{TB}_{BG} = B_dG,$$

kde integrace je složena z dvou Taylorových řad a matice symetrii je možno využitím podmínek (29) převést na druhou stranu řadu. Tím je důkaz proveden pro obě nutné podmínky vstupně symetrického diskretního systému.

Převod systému z časové do diskretní oblasti je zaručeno a podloženo důkazem. To umožňuje se dále zabývat návrhem symetrického řízení založeném na stavové zpětné vazbě. Předchozí nalezené symetrické stavové zpětné vazby je tedy možno využít na dynamiku vozidla. Po zavedení tohoto zákonu řízení s předem zvolenou strukturou přiřazovaných pólů je možno tuto uzavřenou řízenou smyčku převést do diskretní podoby. Zároveň, lze převést prvně systém do diskretní podoby a poté pro něj určovat žádané tvary přiřazovaných pólů. Každopádně, diskretní systémy mají odlišné požadavky na volbu vlastních čísel. Proto je nezbytné se zabývat vhodným přiřazením pólů.

4.4.2 Stabilita diskretního systému

U spojitých systémů je řešeno umístění pólů v pravé polorovině komplexní roviny. Veškerá vlastní čísla nacházející se vlevo od imaginární osy představují stabilní pól systému. U diskretních systémů je tento problém přenesen do jednotkové kružnice v okolí počátku komplexní poloroviny. Pomocí změny umístění pólu uvnitř jednotkové kružnice v počátku je možno určit odezvu. Vlivem jeho umístění je možno docílit konvergujících, harmonických, kmitavých či oscilujících odezev. Taktéž velmi častý požadavek představuje odezvu v konečném počtu kroků. Taková situace představuje umístění pólů do počátku. Pokud jsou póly umístěny mimo tuto jednotkovou kružnici, nastávají nestabilní odezvy [39].

4.4.3 Řízení s konečným počtem kroků

Jak již je řečeno, řízení s konečným počtem kroků (dead-beat control) bývá častým požadavkem při řízení diskretních systémů. Takové řízení přináší výhody, že regulační odchylka dokáže konvergovat k nule v konečném počtu kroku. Počet těchto kroků za jak dlouho se systém ustálí představuje vzorkovací okamžiky, za které bude regulační odchylka a jejich počet odpovídá řádu systému. Řízení spočívá v návrhu stavové zpětné vazby. Nalezení zpětnovazební matice je možno realizovat přiřazením pólů pomocí Jordanových bloků.

4.4.3.1 Přiřazovaná matice L

Požadované umístění pólů je přiřazeno dynamice uzavřené smyčky dle zvolené Jordanovy matice L. Pro řízení s konečným počtem kroků je nutno zavést právě tolik pólů do zpětné vazby, kolikátého řádu je systém. Přiřazovaná matice musí obsahovat nilpotentní bloky, kde jejich násobnost je určena indexy říditelnosti. Pro N vozidel je získáno právě N bloků, kde součet velikostí bloků musí být roven počtu stavů, a tedy n . Pro obecný počet vozidel v koloně je odzkoušeno, že pro dvojici matic (A, B) indexy říditelnosti odpovídají: $\mu(A, B) = 2, \dots, 2, 1$. Nilpotentní matice jsou ve tvaru:

$$J_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{\mu_i \times \mu_i},$$

kde na hlavní diagonále jsou nulová násobná vlastní čísla a nad hlavní diagonálou se nacházejí jedničky. Mimo těchto dvou diagonál se všude vyskytují nulové hodnoty a velikost každého bloku je určena z indexů říditelnosti. Jordanova matice je složena z $N - 1$ bloků o velikosti 2×2 a jediného bloku o velikosti 1×1 . Veškerá vlastní čísla musí být voleny nulově k zaručení žádané konvergence regulované odchylky k nule. Tvar přiřazované

Jordanovy matice:

$$L = \begin{bmatrix} J_i & & \\ & \ddots & \\ & & J_N \end{bmatrix}, \quad (113)$$

kde na hlavní diagonále se vyskytují definované nilpotentní bloky a mimo ní jsou nulové prvky. Pro Jordanovu matici již lze navrhnout stavovou zpětnou vazbu.

4.4.3.2 Návrh stavové zpětné vazby

Z definovaného tvaru určující požadované přiřazení pólů do nulových hodnot je získána stavová zpětná vazba. Pro návrh stavové zpětné vazby je nutné zavést Jordanovu formu se všemi nulovými vlastními čísly. Žádaná Jordanova forma pro model s třemi vozidly je ve tvaru:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

z čehož lze vidět dva dvojnásobné bloky a jeden jednotný Jordanův blok s nulovými póly. Stavová zpětná vazba pro tři vozidla přiřazující žádanou Jordanovu formu je ve tvaru:

$$F = \begin{bmatrix} -0.582 & 0.000 & 0.661 & 1.582 & -0.661 \\ 0.661 & 1.582 & -0.582 & 1.582 & -0.661 \\ 0.661 & 1.582 & 0.661 & 3.164 & -1.905 \end{bmatrix}. \quad (114)$$

Dále bude ukázáno, že pro libovolnou stavovou zpětnou vazbu je umožněno provést její symetrizace.

4.4.3.3 Symetrické řízení s konečným počtem kroků

Pro nalezenou stavovou zpětnou vazbu je možno nalézt jejich symetrických tvarů. K tomu je nutno zavést následující lemma o symetrizaci stavové zpětné vazby $F_0 \in \mathcal{F}(A, B, L)$, kde F_0 představuje libovolnou stavovou zpětnou vazbu a $\mathcal{F}(A, B, L)$ je množinou stavových zpětných vazeb přiřazených uzavřené smyčce s maticí L . Je nutno zmínit, že Jordanova matice musí být složena z nilpotentních bloků, které mají velikost odpovídající indexům říditelnosti dle (4.4.3.1).

Lemma 4.1 *Nechť (A, B) pro $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B = [B_1, \dots, B_m] \in \mathbb{R}^{n \times mq}$ s dimenzí matice $\text{rank } B = mq$, je říditelná vstupně symetrická dvojice s maticí symetrie $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o dimenzi $\text{rank } T = n$, a nechť $F_0 \in \mathbb{R}^{mq \times n}$ a $F_0 \in \mathcal{F}(A, B, L)$, potom platí:*

$$F_k = G_{mq}^k F_0 T^{-k} \in \mathcal{F}(A, B, L), \quad \forall k = 1, 2, \dots, m-1, \quad (115)$$

$$F = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} F_i, \quad (116)$$

kde F je symetrickou stavovou zpětnou vazbou.

Nalezenou zpětnovazební matici (114) je možno symetrizovat využitím vztahů (115,116). Každopádně, je nutno poznamenat, že matice F z (4.1) není obecně prvkem množiny $\mathcal{F} \in (A, B, L)$, to znamená, že nepřisazuje matici $(A + BF)$ Jordanovu formu L . Nicméně, následně definovaná věta již ukazuje, že pro speciální případ tomu tak je.

Věta 4.2 *Nechť (A, B) pro $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B = [B_1, \dots, B_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ s dimenzí matice $\text{rank } B = m$, je říditelná vstupně symetrická dvojice s indexy říditelnosti $\mu(A, B) = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ a s maticí symetrie $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o dimenzi $\text{rank } T = n$. Dále nechť matice $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ve tvaru:*

$$L = \text{diag}(J_1(\lambda), J_2(\lambda), \dots, J_m(\lambda)),$$

kde

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mu_i \times \mu_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

je Jordanův blok příslušný reálnému vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{R}$, které odpovídá nulovým hodnotám k zaručení nilpotentních matic. Dále nechť $F_0 \in \mathcal{F}(A, B, L)$ je libovolná stavová zpětná vazba. Pro níž jsou definovány vztahy:

$$F_k = G_{m1}^k F_0 T^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad (117)$$

$$F = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} F_i, \quad (118)$$

potom matice F je symetrická stavová zpětná vazba a dodatečně platí $F \in \mathcal{F}(A, B, L)$.

Jedná se o rozšíření předchozího lemmatu (4.1). Nyní je tedy možno, aby nalezená symetrická vazba byla obecně prvkem množiny \mathcal{F} . Větou (4.2) je zaručeno přiřazení dynamice uzavřené smyčky požadovaných pólů definovaných Jordanovou formou. Důkaz věty (4.2) je proveden v disertační práci [76].

Je možno zvolit libovolnou zpětnovazební matici ve tvaru:

$$\bar{F} = F_0 + \beta_1(F_1 - F_0) + \dots + \beta_{m-1}(F_{m-1} - F_0), \quad (119)$$

kde koeficienty $\beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ jsou libovolné reálné hodnoty, které patří do množiny $\mathcal{F}(A, B, L)$. Symetrické zpětné vazby lze docílit volbou shodnout koeficientů, a tedy $\beta_i = \frac{1}{m}$, $i = 1, \dots, m-1$. Tím je docíleno:

$$\bar{F} = F = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} F_i.$$

Pro definované vztahy nezbytné k výpočtu je možno pro libovolnou stavovou zpětnou vazbu určit symetrické řízení s konečným počtem kroků. Libovolná stavová zpětná vazba je zvolena v (114) a bude dále označena jako F_0 . Tato zpětnovazební matice je dále dosazena do vztahu (117), z čehož je získána množina symetrických stavových vazeb. Využitím vztahu (118) je získán finální tvar symetrické stavové zpětné vazby ve tvaru:

$$F = \begin{bmatrix} -1.534 & -1.582 & 0.331 & -0.791 & 0.331 \\ 0.331 & 0.791 & -1.534 & -0.791 & 0.331 \\ 0.331 & 0.791 & 0.331 & 1.582 & -1.534 \end{bmatrix},$$

což vede na řešení s plnou maticí. Symetrické řešení tedy nevede na možnost omezení informační vazby mezi prvky zpětnovazební matice. Taktéž při výpočtu symetrické zpětné vazby je provedena diskretizace spojitého systému vzorkovačem nultého řádu. Diskretizace vede na zaokrouhlovací chyby a vlivem nepřesnosti není možné použít tento postup. Nicméně, pokud není žádán symetrický přístup, je možné realizovat návrh nesymetrické zpětné vazby obdobným způsobem. Pro nesymetrický návrh je tak možné zavést určitých omezení v informační topologii.

4.4.3.4 Omezení struktury stavovou zpětnou vazbou

Při použití řízení s konečným počtem kroků lze docílit symetrického řízení u veškerých vozidel. Nicméně, dodatečná omezení jsou kladeny i na potlačení některých složek zpětnovazební matice, což není umožněno v případě symetrického řízení. Pro tento tvar se vychází z libovolné zpětné vazby, a tedy například z (114). Pro tuto matici je možno využít vztahu, který je definován v dřívější části (117). Dosazením nalezených zpětných vazeb do vztahu (119) je získána nesymetrická matice, která je parametrizována volnými parametry β_i , $i = 1, 2, \dots, m - 1$. K zaručení symetrické zpětné vazby je nutno položit tyto parametry $\beta_i = 1/m$. Nicméně, pokud se tato rovnost nezavede, jedná se o nesymetrickou zpětnou vazbu. Pro níž je možno dodat takových omezení na některé prvky zpětnovazební matice F , které vedou na potlačení některých informačních vazeb. Nalezením vyhovujícího tvaru zpětnovazební matice je získán finální tvar stavové zpětné vazby, pomocí které je možno řídit systém v konečném počtu kroků. V případě $N = 3$ vozidel jsou získány celkově tři stavové zpětné vazby a dva parametry β . Parametrizovaná stavová zpětná vazba je zobrazena pro přehled v přílohách viz (127). Volnými parametry β je možno dopočítat některá možná omezení, ale v případě malého počtu vozidel není příliš velká volnost. V případě omezení prvků na pozicích (1,5), (3,1) a (3,2) je získán tvar zpětnovazební matice při řízení v konečném počtu kroků:

$$F_{db,3} = \begin{bmatrix} -1.243 & -1.582 & 0.661 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & -0.582 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.661 & 1.582 & -1.243 \end{bmatrix}. \quad (120)$$

Tato volba směřuje na omezení struktury k docílení topologie BD, ale některé prvky matice jsou omezené dodatečně. Například na druhém řádku, tedy pro druhé vozidlo je omezena informace kompletně, s výjimkou vlastní rychlosti. Ověřením je taktéž zaručena říditelnost systému uzavřené smyčky řízené stavovou zpětnou vazbou z (120). Dále je proveden návrh konečně krokového řízení pro čtyři vozidla obdobným způsobem. V Jordanova forma obsahuje jeden nilpotentní blok navíc vzhledem k situaci s třemi vozidly. Stejným postupem je dopočtena zpětnovazební matice pro čtyři vozidla:

$$F_{db,4} = \begin{bmatrix} -0.582 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.661 & 1.582 & -1.243 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.661 & 1.582 & 0.000 & 1.582 & -1.243 & 0.000 & 0.000 \\ 0.661 & 1.582 & 0.000 & 1.582 & 0.000 & 1.582 & -1.243 \end{bmatrix}, \quad (121)$$

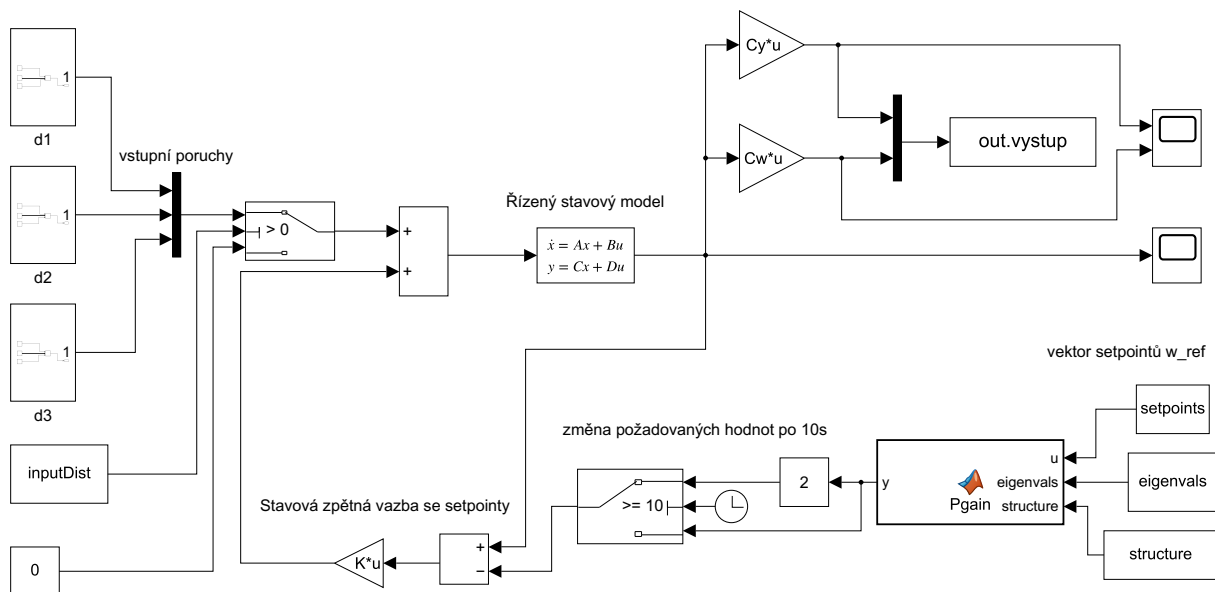
ze které je možno vidět omezené informační vazby mezi vozidly. Vozidla využívají pouze vlastní rychlosti vozidla a dodatečně libovolných veličin všech předcházejících vozidel. Při návrhu konečně krokového řízení dle vztahu (119) je možno docílit více různých tvarů, které omezují odlišným způsobem informační vazby. Následné simulace jsou zobrazeny v další části.

5 Simulace navržených metod pro řízení kolony

V dané části bude vytvořen model kolony vozidel v Simulinku, který vychází z předešlé práce [9]. Nicméně, model je dále rozšířen o možnost nastavení požadovaných hodnot jednotlivých stavů (set-pointů). Z daného modelu budou představeny výsledky navržených řízení. Na vozidla z kolony bude odzkoušeny přidané poruchy, různá volba počátečních podmínek a změna požadovaných rozestupů mezi vozidly či rychlosti celé kolony. Dále proběhne návrh aplikace, která bude sloužit k ověření některých navržených řešení. Vytvoření aplikace je provedeno pomocí rozšíření v MATLABu. Konkrétně se jedná o App Designer, který umožňuje zavést vizualizaci či i interakci s uživatelem. App Designer představuje integrované prostředí, které slouží jako grafické uživatelské rozhraní a zavádí chování programovatelné aplikace [77]. Virtuální model, vytvořený v App Designeru, pracuje v reálném čase a slouží jako simulátor pro kolonu vozidel.

5.1 Simulace navržených metod

Model kolony vozidel je vytvořen v Simulinku na obrázku (12). Tento model využívá řízení v podobě stavové zpětné vazby, u kterého je možno upravovat referenční hodnoty odchylek. Zavedením odchylky stavů a žádaných hodnot je docíleno, že vozidla dodržují definované rozestupy při potřebné rychlosti. Nicméně, je nutno žádané odchylky od rychlosti vynásobit vhodným zesílením, aby rychlostí odchylky byly řízeny na žádanou hodnotu.



Obrázek 12: Schéma řízeného modelu kolony s třemi vozidly pomocí stavové zpětné vazby

Pro řízení více vozidel je model shodný až na množství vstupních poruch. Pro libovolný počet vozidel je možno zavést shodný počet vstupních signálů. Z tohoto důvodu je zobrazena pouze jediná situace, a tedy pro tři vozidla. Pro každou z nalezených variant jsou provedeny simulace, které představují vliv počátečních podmínek, vstupní poruchy a změnu set-pointů.

Simulační model (12) je složen z bloků stavového popisu, zisku v podobě zpětné vazby, zisků dopočítávající veškeré výstupní veličiny a konstant *inputDist*, *setpoints*, pomocí kterých je nastaveno, zda je žádán vstup poruch či vstup změn požadovaných hodnot. V případě žádaného řízení se vstupními poruchami je hodnota v *inputDist* kladná. V tomto případě jsou na vstup systému přivedeny pulzové poruchy pro každé vozidlo

s rozestupem přibližně dvaceti vteřin. V případě, že set-pointy nejsou žádány, hodnota bloku odpovídá nulovému vektoru s vhodnou dimenzí. Pro umožnění změnit požadované hodnoty je nezbytné zvolit některé hodnoty tohoto vektoru nenulově. V tom případě je v modelu zavedeno, že po deseti vteřinách se požadované hodnoty zdvojnásobí. K zaručení přesného sledování rychlostních odchylek je nutné zavést kompenzačního zesílení v MATLAB funkci bloku s názvem *Pgain*. Do této MATLAB funkce je dále dodána informace o použitém řízení (pomocí bloku s hodnotou *structure*) a jeho parametrů (v bloku s hodnotou *eigenvals*). Konstantní blok s hodnotou *eigenvals* představuje pro symetrické stavové zpětné vazby jeho vlastní čísla a pro symetrické LQR potřebné parametry návrhu váhových matic p, q, r .

Pro každou nalezenou obecnou symetrickou stavovou zpětnou vazbu bylo řečeno, že lze libovolně volit vlastní čísla k docílení stabilizace systému. Experimenty je toto tvrzení odzkoušeno a potvrzeno. Nicméně, k zaručení přesného sledování společné žádané rychlosti kolony pro veškerá vozidla je nutno dbát na splnění nutných předpokladů. Stavové zpětné vazby jsou získány parametrizací veškerých stavových vazeb. Je tedy nutno dbát na dodržení podmínky, že:

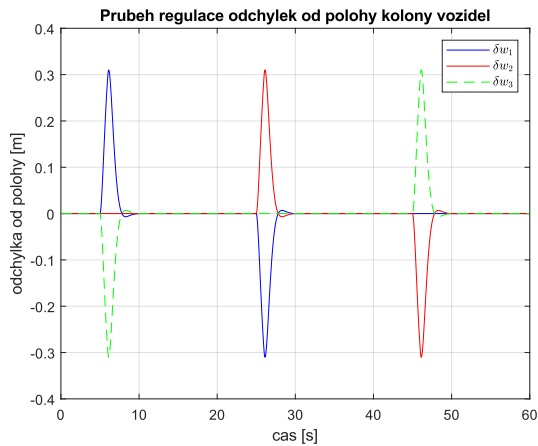
$$\sigma(A) \cap \sigma(L) = \emptyset,$$

kde $\sigma(\cdot)$ představuje spektrum matice neboli množinu vlastních čísel. To znamená, že přiřazované vlastní číslo se nesmí shodovat s vlastním číslem matice dynamiky. Z toho důvodu, nesmí být přiřazovány vlastní čísla s hodnotou -1 . Mimo této podmínky je nutné volit vlastní čísla, aby byly přiřazeny do levé komplexní poloroviny. Při splnění těchto podmínek a zavedením vhodného zesílení žádané rychlosti kolony lze dosáhnout sledování veškerých set-pointů.

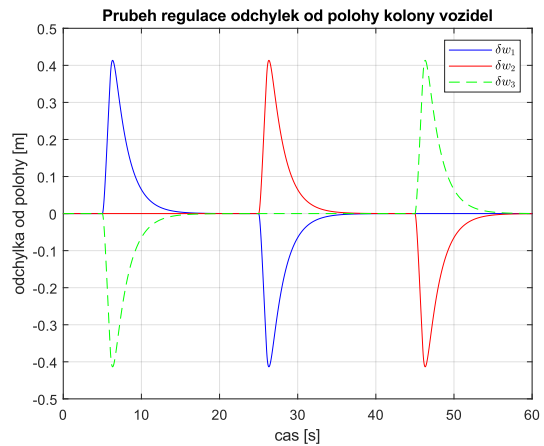
5.1.1 Symetrické LQR

Simulace proběhnou pro zpětnovazební řízení vycházejícího z části (4.2). V této části jsou provedeny návrhy, které vychází z výstupních matic a matic obecných. Simulace je provedena pro případ, že se měří pouze přímé vazby veličin, a tedy z diagonálních prvků výstupních matic. Pro shodnou volbu prvků p, q, r , které v případě nalezených symetrických stavových zpětných vazeb (74,75) odpovídají hodnotám: $p = 1, q = 3, r = 1$. Dříve byl zobrazen vývoj vlastních čísel pro zvyšující se počet vozidel viz (4.2.6). Nyní se zobrazí průběh řízených stavů pomocí navrženého symetrického LQR. K této metodě řízení jsou již navržené zpětnovazební matice viz (74,75) vycházející z možností měření pouze polohových odchylek či všech odchylek. Porovnání řízení rychlostních a polohových odchylek pro stejně zadané parametry váhových matic jsou zobrazeny odchylky od poloh na obrázcích (13a, 13b) a odchylky od rychlostí na (14a, 14b).

Z obrázků (14a,14b) lze vidět, že v druhé variantě nastává většího překmitu, ale nastávají plynulejší přechody. Pro zaručení nižších překmitů je tedy možné zavést větší hodnotu parametru q a zároveň při dosazením větších hodnot je zaručeno přechodových dějů, které ke konci regulace nemají překmitu do druhé polarity. Nicméně, vyšší volba parametru q doprovází delší průběh odregulování poruchy v odchylkách od poloh viz obrázků (13b). Naopak, vyšší volbou parametru q je docíleno rychlejšího odregulování poruch při nižších výkyvech. Každopádně, hlavní přínos symetrického řízení je zobrazen na těchto grafech. Je vidět, že aplikováním poruchy na jakékoliv vozidlo nastane nárůst odchylek od poloh pouze u daného vozidla, což představuje rozestup mezi daným a jeho následujícím vozidlem. Vlivem, že se vozidlo posune o nějaké dočasné hodnoty dopředu vede na to,

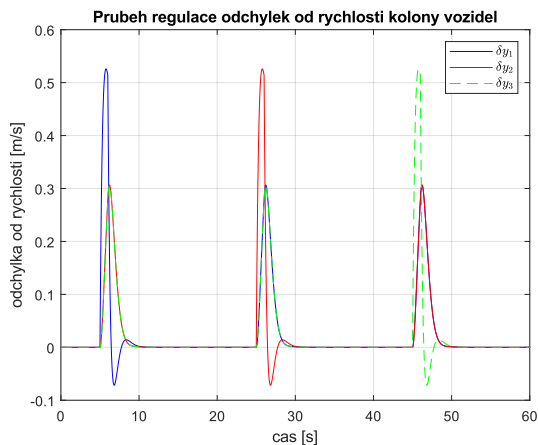


(a) Řízení odchylek od polohy kolony pro $p = 1, q = 3, r = 1$

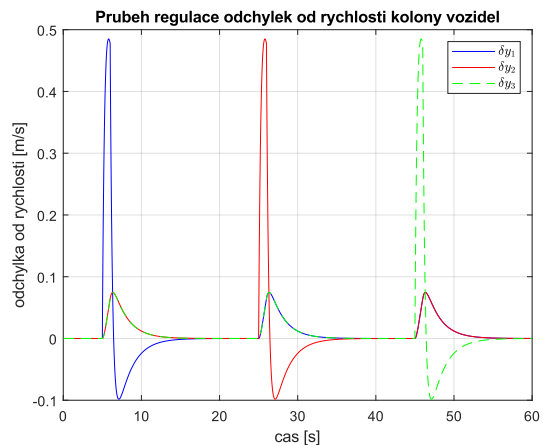


(b) Řízení odchylek od polohy kolony pro $p = 3, q = 1, r = 1$

Obrázek 13: Průběh řízení polohových odchylek kolony tří vozidel pomocí symetrické zpětné vazby s aplikovanými poruchami



(a) Řízení odchylek od rychlosti kolony pro $p = 1, q = 3, r = 1$



(b) Řízení odchylek od rychlosti kolony pro $p = 3, q = 1, r = 1$

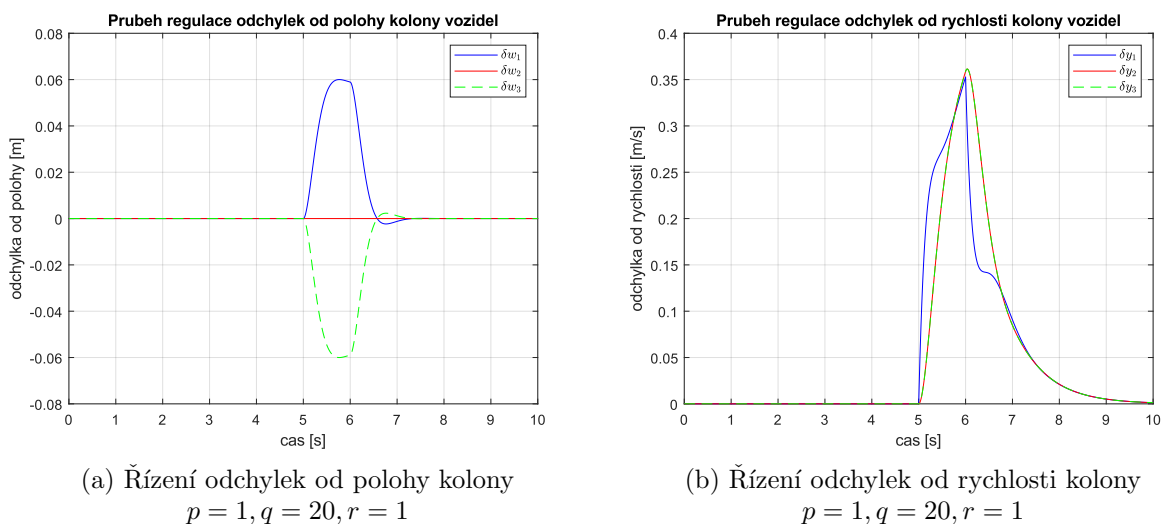
Obrázek 14: Průběh řízení rychlostních odchylek kolony tří vozidel pomocí symetrické zpětné vazby s aplikovanými poruchami

že o tyto hodnoty zkrátí rozstup mezi jeho předešlým vozidlem. Aplikovaná porucha se dále mimo tuto lokalitu nešíří. Tímto je možné říct, že porucha se odřídí v lokálním prostoru. Úpravou rozstupů vznikne vliv maximálně na rychlosti kolony vozidel. Vozidlo reaguje na poruchu prudkým nárůstem rychlosti, čímž i posune rozstupy mezi vozidly. Zbylá vozidla v koloně dále reagují pouze dodatečným přidáním rychlostí, které je u všech vozidel s výjimkou poruchového vozidla stejné.

Dodatečnými experimenty a zkoumáním řetězové stability je odzkoušeno, že parametr p je vhodné volit rozumném poměru s parametrem q . Převážně je vhodnou volbou určit parametr: $p > 1$. Zároveň je vhodné zvyšovat v nějakém poměru tento parametr vzhledem ke zvyšování parametru q . V případě, že tento parametr odpovídá například hodnotě $p < 1$ a parametr $q > 10$, průběhy řízení vycházejí řetězově nestabilní v odchylkách od rychlosti. V odchylkách od polohy je řetězové stabilitě zaručeno vždy. Na rozdíl od symetrické stavové zpětné vazby, která bude uvedena dále, je v této metodě

nutno stále kontrolovat vhodnost těchto parametrů. Při dostatečně nízkých hodnotách parametru q , a tedy například $q = 2$ je možno volit parametr p libovolně kladně.

Obdobný problém nastává i u první nalezené struktury symetrických váhových matic, která vychází z měření pouze polohových veličin. Zde se parametr p nevyskytuje vůbec, a tedy návrh spočívá pouze v parametrech q, r . Volbou parametru q je docíleno řetězově stabilního systému pro odchylky od poloh a při rozumné volbě i rychlostních odchylek. Nicméně, při příliš velké hodnotě penalizací odchylek od poloh je docíleno opětovně řetězové nestability v odchylkách od rychlostí. Takové chování je možné zpozorovat při volbě $p = 1, q = 20, r = 1$ a je zobrazeno na obrázcích (15a,15b). Na daných obrázcích lze zpozorovat, že průběhy odchylek odpovídají dle předpokladu symetrických systémů, a tedy problém šíření poruch pozůstává pouze v lokalitě dvou vozidel. Nicméně, u odchylek rychlostí je možno zpozorovat, že pro aplikovanou poruchu na první vozidlo jsou zbylé odchylky od rychlostí s vyšší maximální amplitudou. Což při kontrole řetězové stability nesplňuje podmínku. Přestože je následující rychlostní odchylka vyšší, veškeré zbylé odchylky jsou již shodné a dále se nezvyšují. Což v jistém způsobu šíří poruchu dále, ale po prvním přechodu k dalšímu vozidlu se již nebude zvětšovat.

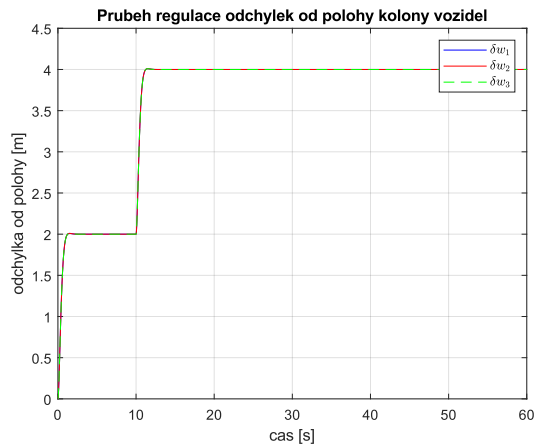


Obrázek 15: Průběh řízení odchylek kolony tří vozidel pomocí symetrické zpětné vazby s aplikovanou poruchou na prvním vozidle

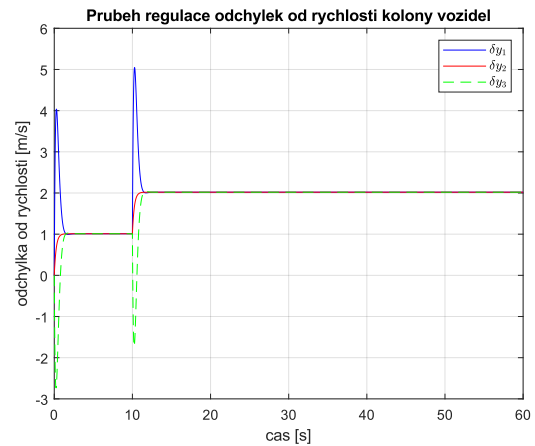
Taktéž je možné určovat set-pointy k zaručení žádaných odchylek. Pro odchylky od poloh je přesně sledování zaručeno. Nicméně, pro přesně sledování rychlostních odchylek je nezbytné dodat potřebný zisk v podobě dopředné vazby. Tento zisk je navržen pouze v případě, že váhová matice řízení R je jednotková. Pokud matice není jednotkovou maticí, rychlostní odchylky při set-pointech nebudou tyto požadavky přesně sledovat. Experimenty je odzkoušeno, že vliv parametru q není závislý na set-pointech od rychlostí. Nicméně, zbylé dva parametry jsou závislé. Průběh řízení na požadované hodnoty je na obrázcích (16a,16b).

5.1.2 Struktura se shodnými vlastními čísly

Pro danou variantu je navržena symetrická stavová zpětná vazba v části (4.3.2.1). Jak je již zmíněno, zobecněný tvar symetrické zpětné vazby dovoluje libovolně určovat vlastní čísla uzavřené smyčky. Nicméně, k zaručení sledování je nutno určit vhodný zisk, aby



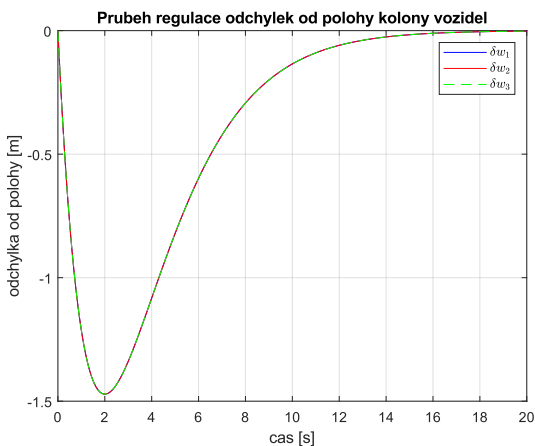
(a) Řízení odchylek od polohy kolony
 $p = 4, q = 10, r = 1$



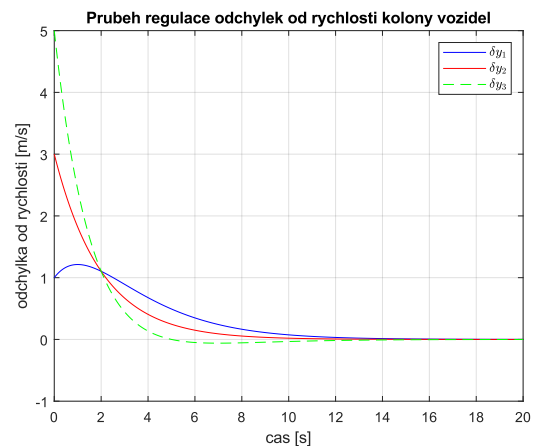
(b) Řízení odchylek od rychlosti kolony
 $p = 4, q = 10, r = 1$

Obrázek 16: Průběh řízení odchylek na požadované hodnoty kolony tří vozidel pomocí symetrické zpětné vazby

systém dosledoval správnou hodnotu žádaných odchylek. V této variantě je zisk určen jako $\lambda/(\lambda - 1)$. Zavedením zisku je docíleno správného sledování rychlostí, které předtím nedosahovalo správných hodnot.



(a) Řízení odchylek od polohy kolony



(b) Řízení odchylek od rychlosti kolony

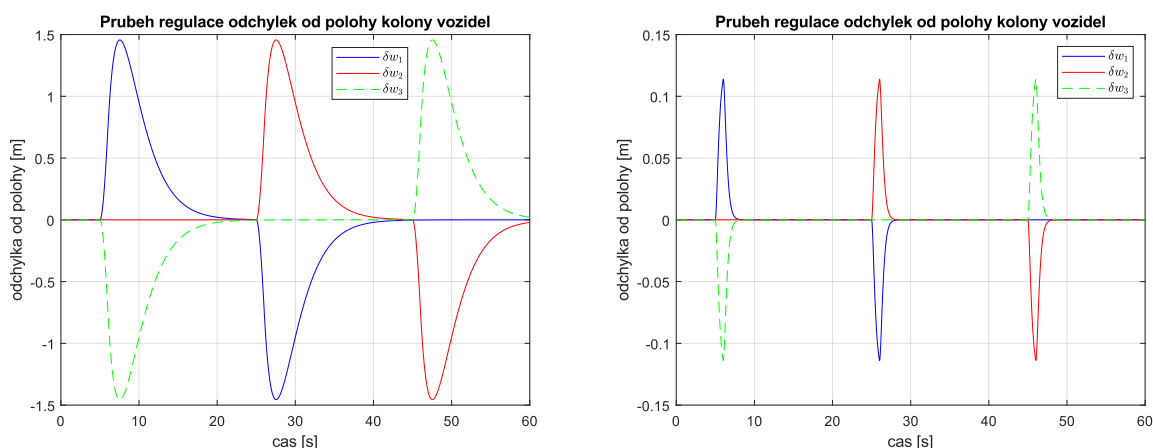
Obrázek 17: Průběh řízení odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou s vektorem počátečních podmínek $x_0 = [1, 0, 3, 0, 5]^T$ a vlastními čísly $\lambda = 0.5$

Z obrázků (17a,17b) je možno vidět průběh řízení kolony s vlivem počátečních podmínek. Počáteční podmínky jsou zvoleny různě na odchylky od rychlostí jednotlivých vozidel. Je ukázáno, že vlivem různých rychlostí veškerá vozidla udělají manévru, čímž se sníží postupně rozestupy mezi vozidly. Následně vlivem manévru se vozidla řídí na nulové odchylky.

Dále je provedena simulace vozidel dané zpětné vazby při aplikované poruše postupně na jednotlivá vozidla. Jsou zvoleny dvě různá vlastní čísla λ k porovnání odlišnosti odchylek od poloh a rychlostí viz obrázky (18,19). Na obrázcích (18a,18b) jsou zobrazeny odchylky od poloh pro volbu $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 4$. Přibližně po 15-20 vteřinách jsou vybudeny vstupní poruchy působící na vozidla. V prvním intervalu je tedy aplikována

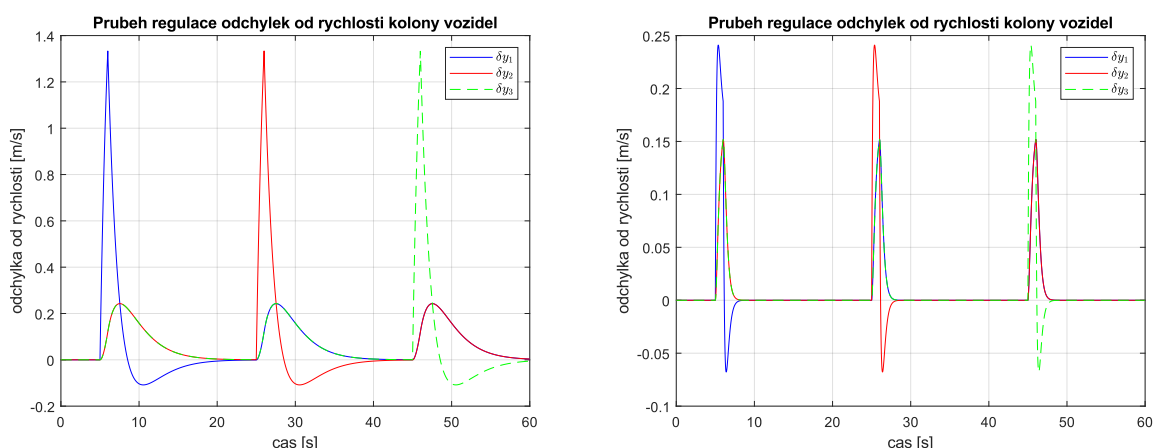
porucha na první vozidlo, v druhém intervalu na druhé a podobně. Na obrázcích lze vidět, že vyšší volbou vlastního čísla je samozřejmě dodána agresivita systému. Poruchy tak nezpůsobí přebytečných překmitů a může tak být dostatečně potlačena v rychlejším čase.

Odezva rychlostních odchylek je obdobná jako u polohových. Vlivem struktury přiřazené Jordanovy matice je možnost volit pouze shodná vlastní čísla. Může být vhodnější mít větší volnost ve volbě vlastních čísel, a proto budou představeny simulace i dalších struktur. Odezvy odchylek od rychlosti jsou zobrazeny na obrázcích (18a,18b), kde jsou porovnávány dvě různé hodnoty dosazených vlastních čísel. Opětovně je možné říct, že je vyšší vlastní číslo lepší. Nicméně, mělo by se zohlednit jaké akční zásahy je nezbytné zavést do systému a dojít ke kompromisu.



(a) Řízení odchylek od polohy kolony pro $\lambda = 0.5$ (b) Řízení odchylek od polohy kolony pro $\lambda = 4$

Obrázek 18: Průběh řízení polohových odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou s aplikovanými poruchami při volbě vlastních čísel $\lambda = [0.5, 4]$



(a) Řízení odchylek od rychlosti kolony pro $\lambda = 0.5$ (b) Řízení odchylek od rychlosti kolony pro $\lambda = 4$

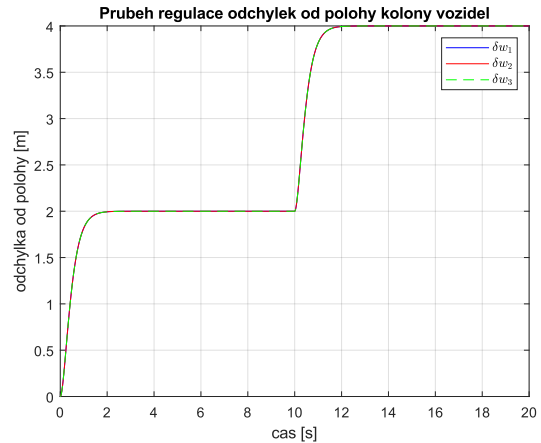
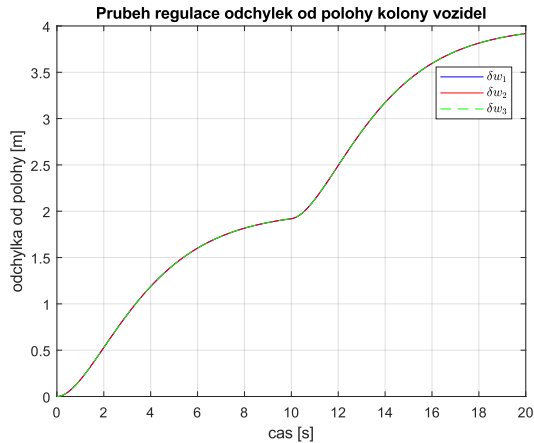
Obrázek 19: Průběh řízení rychlostních odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou s aplikovanými poruchami při volbě vlastních čísel $\lambda = [0.5, 4]$

Poslední zobrazení je provedeno pro sledování žádaných odchylek. Nastavení požadovaných hodnot je v praxi běžným požadavkem. Tomu tak je i v platooningu a řízení těchto kolon vozidel. Je nutno umožnit nastavovat požadované rozestupy

a rychlosti celé kolony. Na obrázcích (20,21) jsou zobrazeny průběhy řízení jednotlivých odchylek na zadané set-pointy. V průběhu obrázků je původní set-point zvětšen na dvojnásobnou hodnotu. Zákon řízení pro set-pointy při řízení stavovou zpětnou vazbou je definován:

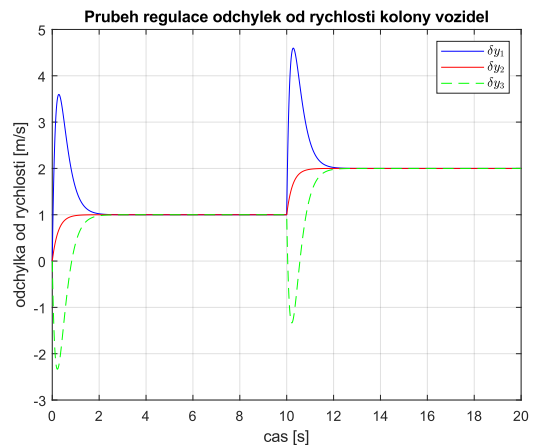
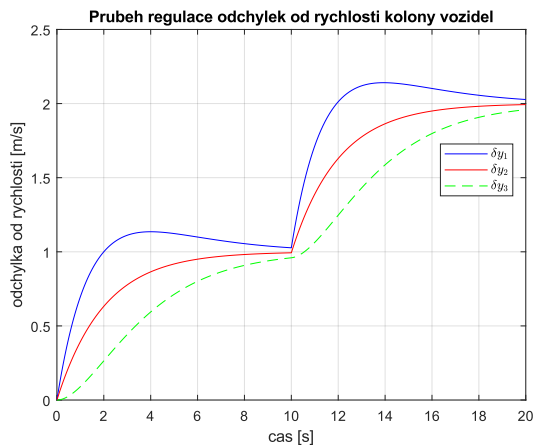
$$u = K(\mathbf{x} - \mathbf{w}_{ref}),$$

kde \mathbf{w}_{ref} jsou požadované hodnoty stavů a použitý zákon řízení je možné vidět ve schématu v Simulinku viz (12).



(a) Řízení odchylek od polohy kolony pro $\lambda = 0.5$ (b) Řízení odchylek od polohy kolony pro $\lambda = 4$

Obrázek 20: Průběh řízení polohových odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou při volbě vlastních čísel $\lambda = [0.5, 4]$ a zadaných setpointech



(a) Řízení odchylek od rychlosti kolony pro $\lambda = 0.5$ (b) Řízení odchylek od rychlosti kolony pro $\lambda = 4$

Obrázek 21: Průběh řízení rychlostních odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou při volbě vlastních čísel $\lambda = [0.5, 4]$ a zadaných setpointech

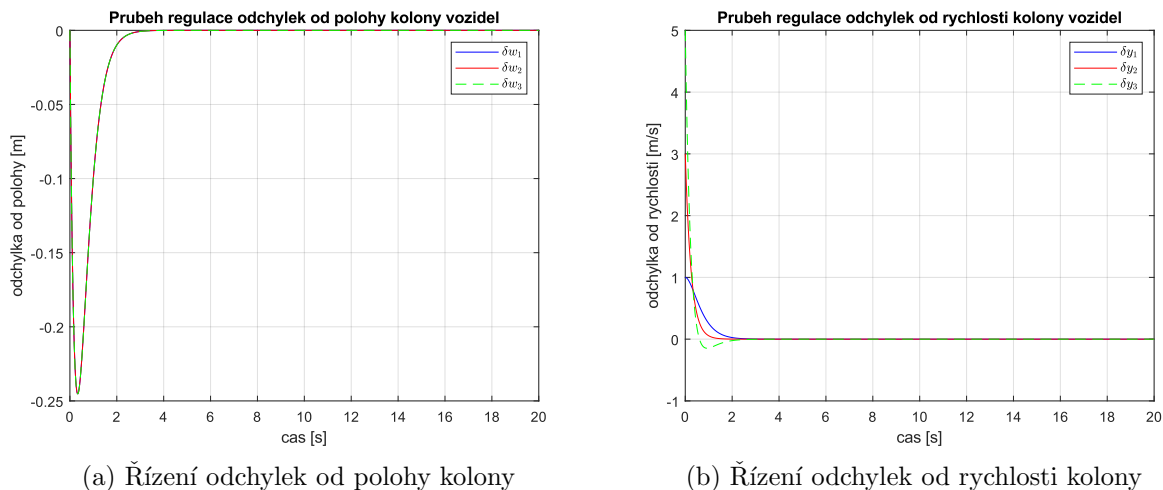
Na obrázcích (21a,21b) jsou zobrazeny průběhy odchylek, které jsou řízeny na požadované hodnoty. V první variantě je zvoleno vlastní číslo $\lambda_1 = 0.5$ a v druhé variantě je vlastní číslo $\lambda_2 = 4$. Jednoznačně je přípustné opětovně říct, že při agresivnější stavové zpětné vazbě je docíleno požadované hodnoty značně rychleji, a tedy až pětkrát rychleji. Průběhy rychlostních odchylek již nejsou shodné a vozidla využívají postupně nižších rychlostí dle jejich indexu v koloně viz obrázky (21a,21b). Je vidět, že na prvním obrázku je, vlivem volby malého vlastního čísla, zaručen poměrně zdlouhavý regulační proces, u kterého

systém nestihne dosledovat žádanou hodnotu. Druhá varianta má mírně agresivnější volbu vlastního čísla, pomocí které je možno tento regulační průběh urychlit. Přestože jsou překmity v odchyilkách rychlosti značně větší, toto řešení představuje vhodnější volbu.

Z předešlých simulací je adekvátní říct, že je žádáno využívat struktury zpětné vazby s možností různě volit více vlastních čísel. Takové situace budou odsimulovány následovně.

5.1.3 Struktura s jediným různým vlastním číslem

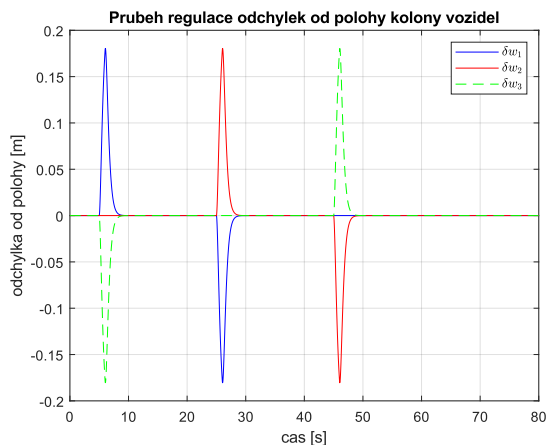
Návrh zpětné vazby je proveden v kapitole (4.3.2.2). Pro přesné sledování hodnot je žádoucí určit vhodný zisk násobící set-pointy rychlostí a je ve tvaru: $\nu/(\nu - 1)$. Touto volbou je docíleno, že pro jakoukoliv kombinaci vlastních čísel λ, ν je vysledován žádoucích hodnot rychlosti. Přestože je struktura rozšířena pouze minimálně vzhledem k předešlé struktuře, řízení je dodána dodatečná minimální volnost. Simulace při nenulových počátečních podmínkách je zobrazena následovně na obrázcích (22). V této části již nebudou porovnávány volby různé volby vlastních čísel, ale budou zobrazeny pouze některé vhodné volby.



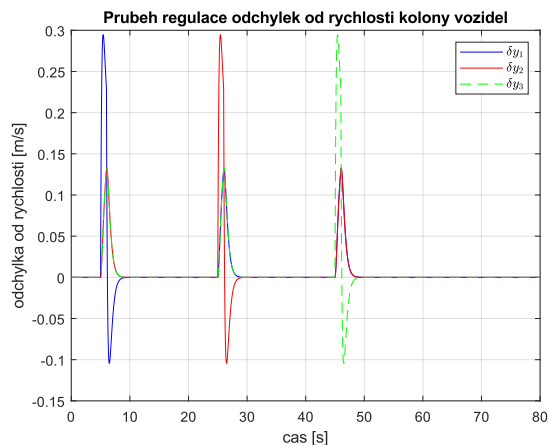
Obrázek 22: Průběh řízení odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou s vektorem počátečních podmínek $x_0 = [1, 0, 3, 0, 5]^T$ a vlastními čísly $\lambda = 3, \nu = 4$

Na obrázcích (22a,22b) jsou zobrazeny situace, kde mají vozidla různé počáteční rychlosti. Vlivem této počáteční chyby musí vozidla reagovat a postupně konvergují k počáteční hodnotě. Počáteční vliv nenulových hodnot má obdobnou odezvu na odchylky jako v předchozí části.

Aplikované poruchy na jednotlivá vozidla jsou v simulacích postupně zavedeny. Na obrázcích (23) jsou zobrazeny odezvy odchylek na způsobené poruchy, které jsou po intervalech aplikovány na jednotlivá vozidla. Způsobená porucha na nějaké vozidlo se poté šíří kolonou a potvrzuje chování symetrického řízení, které je zmíněno dříve v (4.2.1). Na obrázku (23a) je zobrazen vliv postupných poruch u každého vozidla. Lze taktéž zpozorovat zmíněné chování symetrických systémů, kde v případě aplikování poruchy na vozidlo nastane změna pouze v rozestupech daného a předešlého vozidla. Mimo těchto změn nastanou odezvy i u rychlostí veškerých vozidel. Nicméně, pro rychlosti vozidel nastanou u všech vozidel stejné odezvy s výjimkou vozidla, kde porucha nastala. U tohoto vozidla nastane razantnější odezva než u zbylých viz obrázek (23b).



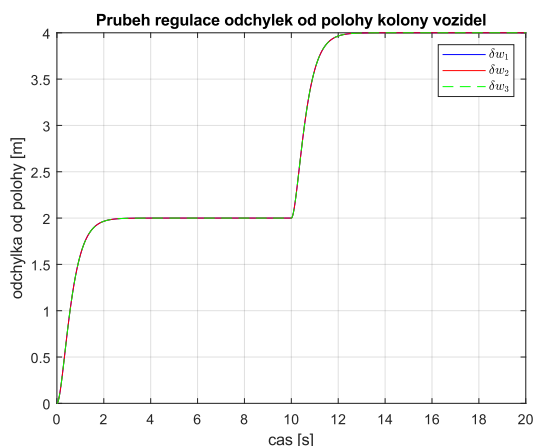
(a) Řízení odchylek od polohy kolony pro $\lambda = 3$, $\nu = 4$



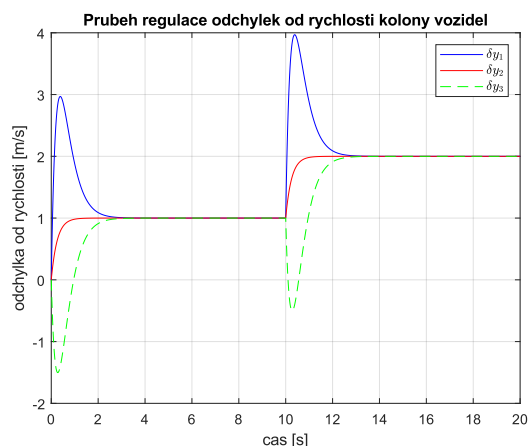
(b) Řízení odchylek od rychlosti kolony pro $\lambda = 3$, $\nu = 4$

Obrázek 23: Průběh řízení polohových odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou s aplikovanými poruchami při volbě vlastních čísel $\lambda = 3$, $\nu = 4$

Na obrázcích (24) jsou zobrazeny průběhy řízení veličin na požadované hodnoty. U těchto průběhů je ukázáno shodných vlastností jako u předešlé varianty.



(a) Řízení odchylek od polohy kolony pro $\lambda = 3$, $\nu = 4$



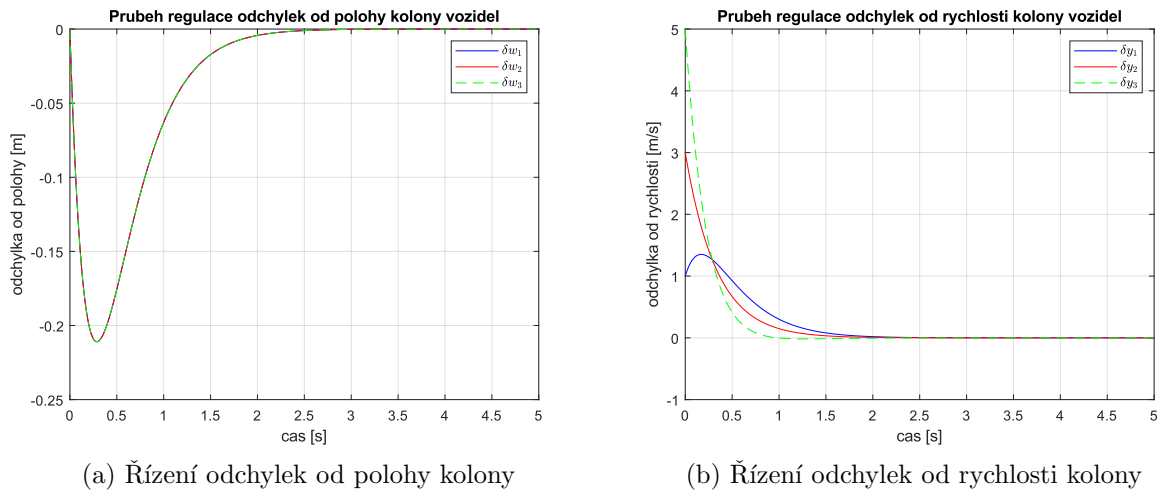
(b) Řízení odchylek od rychlosti kolony pro $\lambda = 3$, $\nu = 4$

Obrázek 24: Průběh řízení odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou při volbě vlastních čísel $\lambda = 3$, $\nu = 4$ a zadaných setpointech

5.1.4 Struktura ze shodných rychlostních a polohových vlastních čísel

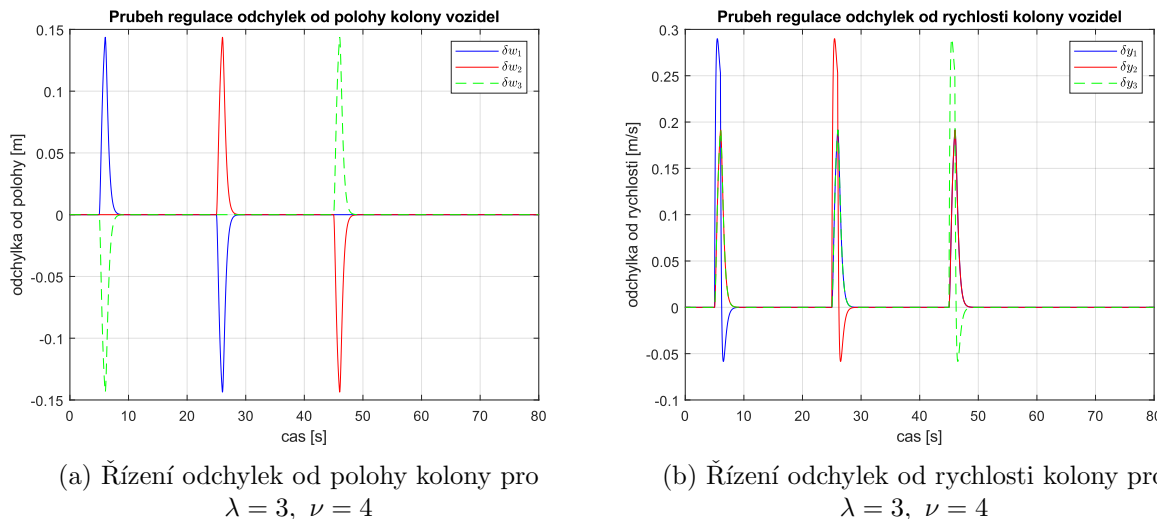
Symetrický návrh stavové zpětné vazby je proveden v sekci (4.3.2.3). Určení zesílení je nezbytné zavést pro dva případy, a tedy při shodnosti vlastních čísel a jejich různosti. Při shodnosti těchto čísel je zaveden zisk: $(\lambda + \nu)/(\lambda + \nu - 2)$ a pro různost vlastních čísel je nutno zavést zisk: $\lambda/(\lambda - 1)$. V této části bude opětovně zobrazeno řízení při nenulových počátečních podmínkách, vstupních poruchách a sledování požadovaných hodnot. Tato varianta umožňuje libovolně volit dva typy vlastních čísel. Je možno rozdílně zvolit N vlastních čísel λ a $(N - 1)$ vlastních čísel ν . V dané části jsou provedeny simulace při volbě vlastních čísel $\lambda = 3$, $\nu = 4$. Řízení při vlivu počátečních podmínek je zobrazeno

na obrázcích (25a) pro odchylky od polohy a pro odchylky rychlosti (25b).



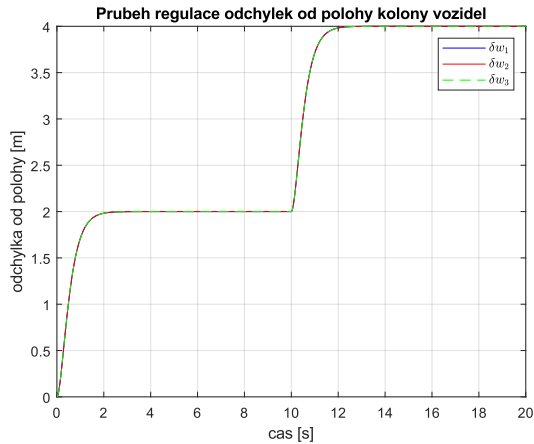
Obrázek 25: Průběh řízení odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou s vektorem počátečních podmínek $x_0 = [1, 0, 3, 0, 5]^T$ a vlastními čísly $\lambda = 3$, $\nu = 4$

Na obrázcích (26a,26b) je možno vidět odezvy veličin způsobené aplikovanou poruchou, které odpovídají symetrickému chování. Experimenty je odzkoušeno, že při vyšší volbě vlastních čísel je zaručeno zvyšující se odchylky od rychlostí. Pro dostatečně velkou hodnotu vlastních čísel λ je možno docílit, že odchylky od rychlostí dosahují shodných hodnot. Nicméně, stále je možno rozlišit, na kterém vozidle je porucha zavedena. Pro zbylá vozidla je odezva shodná a nikdy tyto odchylky nedosahují vyšších hodnot, než maximální hodnota odchylky vozidla s aplikovanou poruchou.

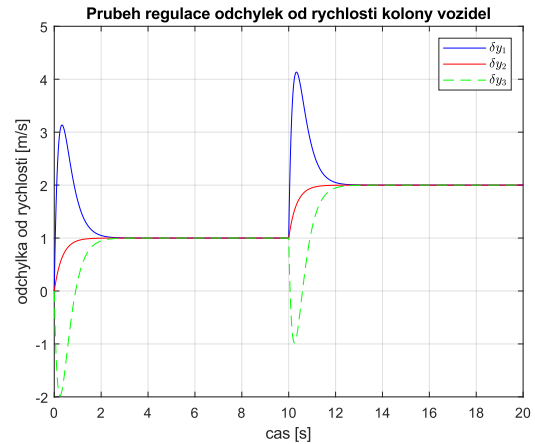


Obrázek 26: Průběh řízení polohových odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou s aplikovanými poruchami při volbě vlastních čísel $\lambda = 3$, $\nu = 4$

V grafech (27a,27b) jsou zobrazeny průběhy sledování požadovaných rozestupů. Experimenty je odzkoušeno, že při vyšší volbě vlastních čísel je zaručeno kratší doba k dosledování požadovaných hodnot. Nicméně, rychlejší doba dosledování s sebou ovlivňuje velikost překmitu rychlostních odchylek. U polohových odchylek je docíleno rychlejšího dosledování bez překmitů, a tedy je nutno dbát pouze na adekvátní a realizovatelné akční zásahy.



(a) Řízení odchylek od polohy kolony pro $\lambda = 3$, $\nu = 4$



(b) Řízení odchylek od rychlosti kolony pro $\lambda = 3$, $\nu = 4$

Obrázek 27: Průběh řízení odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou při volbě vlastních čísel $\lambda = 3$, $\nu = 4$ a zadaných setpointech

5.1.5 Konečně krokové řízení

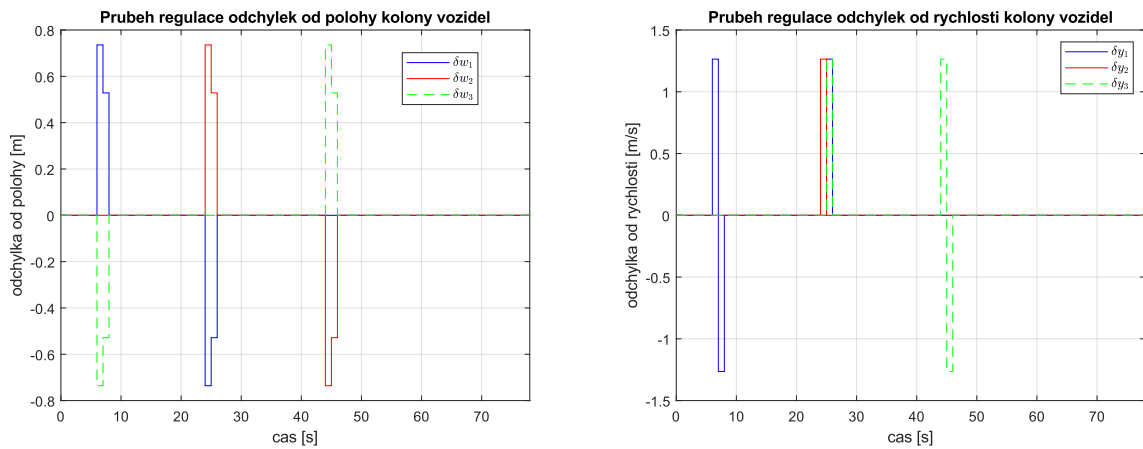
V části (4.4.3) je proveden návrh konečně krokového řízení. Pro tyto návrhy je zmíněn možný způsob symetrického návrhu k zaručení regulace v konečném počtu kroků. Nicméně, návrh je velmi citlivý na přesnosti ve výpočtech, které vedou na možnost využití nalezených symetrických zpětných vazeb. Každopádně, nalezení konečně krokového řízení diskrétního systému je provedeno pro libovolnou stavovou zpětnou vazbu. Pro nesymetrickou stavovou zpětnou vazbu jsou nalezeny zpětnovazební matice pro tři (120) a čtyři (121) vozidla, které obsahují omezení informačních vazeb, a tedy některé prvky matice jsou nulové.

Simulační schéma spojitého systému viz (12) je nezbytné upravit. Úprava spočívá pouze v nahrazení spojitého stavového popisu jeho diskrétní podobou.

V případě tří vozidel je získán tvar zpětnovazební matice s omezením (120), kde druhé vozidlo využívá pouze vlastní rychlosti a vozidla okolo tohoto vozidla se jemu přizpůsobují. To znamená, že první vozidlo využívá i stavů tohoto následujícího a třetí vozidlo využívá taktéž své stavy i vozidla předcházejícího. Pro tento nalezený tvar je zobrazen průběh řízení polohových a rychlostních odchylek při aplikovaných vstupních poruchách na obrázku (28).

Z obrázku (28a) je možno vidět průběh konečně krokového řízení polohových odchylek. Pro diskretizovaný systém lze vypočítat, že při aplikované poruše se vozidla odchýlí od původního ustáleného průběhu. Po vybuzení skoku se odchylka vrátí do ustáleného stavu ve třech skocích. V tomto případě je docíleno shodné velikosti skoků, a proto je řetězová stabilita splněna. Na obrázku (28b) je zobrazen průběh konečně krokového řízení rychlostních odchylek, na které je postupně přivedena porucha každého vozidla. Je nutno zmínit, že druhé vozidlo využívá pouze vlastní rychlost, a proto není nijak ovlivněno zbylými vozidly. Nicméně, aplikováním poruchy na první vozidlo vznikne rychlostní skok pouze prvního vozidla, který se ve třech krocích vrátí do původně ustáleného stavu. Obdobně tomu tak je i u třetího vozidla. Při zavedení pulzové poruchy na druhé vozidlo nastane již reakci i zbylých dvou vozidel. Veškerá vozidla se dostanou na

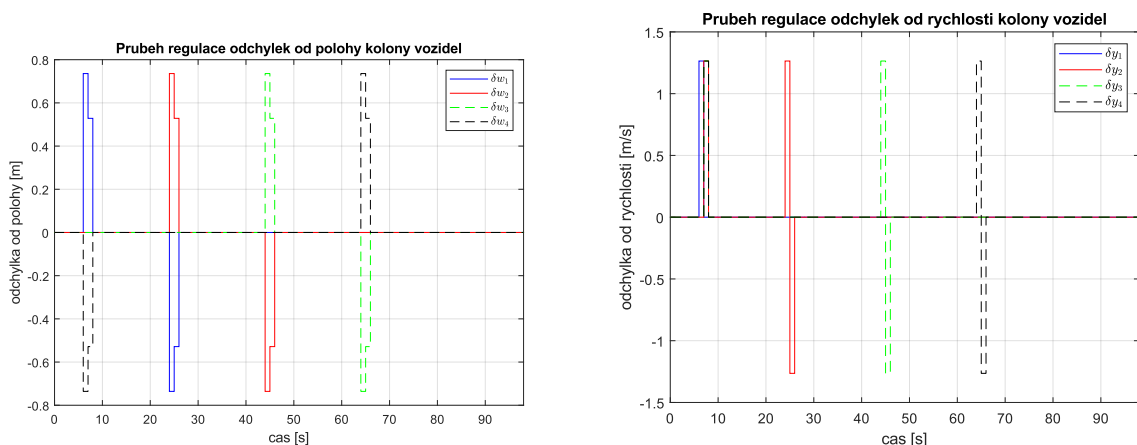
původně ustálenou hodnotu ve dvou krocích. Je taktéž možno spatřit, že oproti zbylým dějům nenastane skok do záporné hodnoty. Zároveň ostatní vozidla zareagují na poruchu v časovém zpoždění jedné vzorkovací periody.



(a) Řízení s konečným počtem kroků odchylek od polohy diskretizovaného modelu kolony (b) Řízení s konečným počtem kroků odchylek od rychlosti diskretizovaného modelu kolony

Obrázek 28: Průběh konečně krokového řízení odchylek diskretizovaného modelu kolony tří vozidel při vstupních poruchách a s omezenou strukturou zpětnovazební matice

Následně je provedena simulace řízení čtyř vozidel s konečným počtem kroků. V tomto řízení je odzkoušen tvar zpětnovazební matice, který je omezen informační vazbou vycházející z topologie PF. Každopádně jsou vždy využity informace veškerých vozidel před aktuálním vozidlem. Konkrétně matice (121) využívá veličin pouze vlastního vozidla a k tomu jednoho či obou stavů všech předcházejících vozidel. Taková topologie je reprezentována v podobě topologie n-PF, kde n představuje počet od kolika vozidel před aktuálním je získávána informace. V konkrétním případě čtyř vozidel je $n = 3$, a tedy poslední čtvrté vozidlo využívá své a některé stavy tří vozidel před ním.



(a) Řízení s konečným počtem kroků odchylek od polohy diskretizovaného modelu kolony (b) Řízení s konečným počtem kroků odchylek od rychlosti diskretizovaného modelu kolony

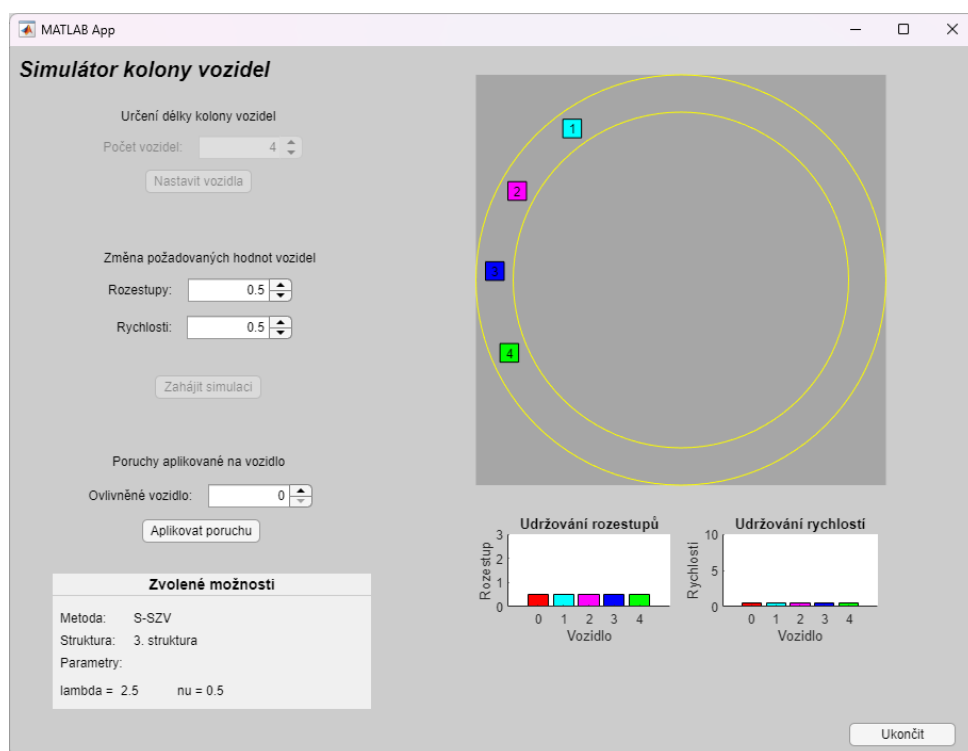
Obrázek 29: Průběh konečně krokového řízení odchylek diskretizovaného modelu kolony čtyř vozidel při vstupních poruchách a s omezenou strukturou n-PF zpětnovazební matice

Průběh řízení polohových odchylek je shodný s řízením tří vozidel viz (28a). Nicméně, vlivem odlišného omezení ve zpětnovazebním zesílení jsou upraveny některé odezvy rych-

lostních odchylek. Na obrázku (29b) je možno vidět, že při poruše prvního vozidla se veškeré zbylé odezvy rychlostních odchylek shodují, jsou posunuty o jeden časový okamžik vzorkovací periody a poruchy jsou eliminovány ve dvou krocích. Nicméně, vzniklou poruchou u veškerých zbylých vozidel je docíleno shodného chování, a tedy reakce rychlostních odchylek pouze daného vozidla, kde porucha vznikla.

5.2 Simulátor kolony

Simulátor zavádí z problematiky řízení podélné kolony virtuální model, který zobrazuje funkčnost symetrického řízení kolony v kruhu. Ke správné funkčnosti je nezbytné spojitý model diskretizovat a pomocí jeho diskrétní podoby jsou určovány rozestupy mezi vozidly v kruhu. Při počátečním spuštění aplikace je zobrazena možnost výběru navržených symetrických metod. Tyto metody představují symetrickou stavovou zpětnou vazbu a symetrické LQR. Při zvolené možnosti je zobrazena tabulka s výběrem vlastních čísel v případě symetrické stavové zpětné vazby či parametrů p, q, r pro symetrické LQR. Vybráním vhodných parametrů či vlastních čísel jsou tabulky odstraněny a v simulátoru je zobrazena možnost volby počtu vozidel a následně požadovaných hodnot. Zvolením počtu vozidel, počátečních požadovaných hodnot a zahájením simulace jsou vytvořeny prvky zobrazující pohyb v kruhu indexovaných vozidel. Stisknutím tlačítka *Zahájit simulaci* umožňuje aplikovat poruchy na jakékoliv vozidlo. Simulátor v daném kroku je zobrazen na obrázku (30).



Obrázek 30: Navržený simulátor kolony vozidel zobrazující symetrická řízení v kruhové koloně

V průběhu simulace je umožněno nadále měnit požadované rozestupy vozidel, rychlosti vozidel či zavést poruchu na vozidla. Úpravou požadovaných rychlostí je upravena rychlost vykreslování pohybu vozidel. Zvyšováním požadovaných rychlostí tak budou nastávat nižší časové "pauzy" mezi vykreslováním. Vykreslování prvků je provedeno příkazem *drawnow* a kontrolou časovače v daných intervalech definovaných i dle set-pointů rychlosti

vede tento příkaz ke zrychlení vykreslování. Veškeré průběhy udržování rozestupů a rychlostí jsou zobrazovány na grafech v simulátoru pro každé vozidlo. V obou grafech je dodán set-point odchylek na nultém indexu.

5.3 Budoucí práce a vylepšení

V této části jsou zmíněny a představeny některé možné vylepšení či další způsoby rozšíření dané práce.

Hlavní cíle zaměření práce jsou zaměřeny na prozkoumání možností návrhu symetrického zpětnovazebního řízení libovolného počtu vozidel kolony. Obecné způsoby návrhu jsou nalezeny pro některou množinu možných struktur Jordanovy formy. Nicméně, ideální případ by mohl představovat možnost libovolně různě určovat veškerá vlastní čísla příslušející této koloně. Dvě takové varianty jsou představeny pro různou volbu tří vlastních čísel, ale jejich nalezený tvar je velmi složitý. Z důvodu složitosti nalezených tvarů tak nebylo umožněno tvary dále rozšířit. V budoucí práci by se mohlo na tyto tvary zaměřit a pokusit se z třech rozdílných vlastních čísel rozšířit strukturu do podoby s odlišnými vlastními čísly.

Návrh konečně krokového řízení je v práci proveden pro diskretizovaný model kolony vozidel. Obdobně jako dříve je výhodné nalézt obecný tvar zpětnovazební matice. V této matice jsou zavedeny volné parametry β , kterými je možné omezit strukturu této matice. Vhodným řešením do budoucna představuje takové řešení, které dokáže určit zpětnovazební matici s omezením některých prvků pro libovolný počet vozidel v koloně.

Navržený simulátor zobrazuje pohyb řízených vozidel v koloně, která je ukázána v kruhu. Vozidla se tak pohybují neustále po kružnici se shodným poloměrem. V budoucí práci by bylo vhodné simulátor rozšiřovat a zlepšovat například zavedením nových řídicích metod a odstraněním občasných zasekávání při vizualizaci.

Opětovně, jako v předešlé práci [9], je využito zjednodušení v podobě homogenní kolony viz (2.2). Představení definice heterogenní kolony je provedeno v (2.1). Pro heterogenní kolonu je nutno zavést různých dynamik vozidlům. To vede na náročnější návrh řízení jednotlivých vozidel, ale zároveň je tak možné se přiblížit reálným situacím.

Posledně je zavedena možnost sledování požadovaných rozestupů a rychlostí v koloně. Sledování požadovaných rozestupů je zaručeno v každém případě. Přestože je zavedena požadovaná rychlost kolony, není dostatečně dosledována. Proto je nezbytné zavést u každé metody dopřednou vazbu u každého řízení. U zobecněných symetrických stavových zpětných vazeb je tento zisk nalezen a vychází z obecné volby vlastních čísel. Nicméně, pro metody symetrického LQR tento dopředný zisk není nalezen, a proto je žádané ho v budoucí práci nalézt a navrhnout.

6 Závěr

Cíl práce spočívá převážně v centrálním návrhu symetrických strategií a nalezení některých obecných forem zpětnovazebních matic. Hledání těchto obecných tvarů spočívá ve využití symbolických výpočtů pro nižší počty vozidel a tyto řešení generalizovat. Generalizace výsledků umožňuje určovat symetrické stavové zpětné vazby v závislosti na žádaných vlastních číslech. Obecné tvary zpětnovazebních matic zajišťující symetrické řešení jsou nalezeny ve třech tvarech. Taktéž jsou nalezeny další možné výsledky, které ale nevedou na jednoduché zobecnění. Mimo jiné je důraz kladen na řízení a analýzu pomocí symetrického LQR, u kterého je řešena obecná struktura váhových matic vedoucích k zaručení symetrické zpětnovazební matice. Dále opětovně proběhly experimenty k omezení zpětnovazebních matic při symetrickém řízení, ale bez jakéhokoliv výsledku. V případě, že není žádáno symetrické řízení je ukázáno použití nesymetrického konečně krokového řízení diskrétního systému. Nesymetrickým řízením je ukázána možnost návrhu zpětnovazební matice s omezenou strukturou viz sekce (4.4.3.4).

První část práce se zabývá uvedením do problematiky, a tedy představuje potřebné diferenciální odchylkové rovnice, požadovaná zjednodušení kolony v podobě homogenity a dále odvození matematického modelu z diferenciálních rovnic vedoucí na model použitý v práci v sekci (20). Kromě daného modelu jsou zmíněny i některé další možné modely. Následně jsou zmíněny některé základní vlastnosti systémů, jako je obecná stabilita a říditelnost. Z požadavku stability systému se odvíjí v problematice kolony i požadavek na řetězovou stabilitu, který je v této části popsán. Posledně je představen přístup, na který je práce zaměřena. Jedná se o teorii symetrických systémů, pomocí které je ukázáno, že kolona představuje vstupně symetrický systém a lze tak navrhnout symetrickou zpětnou vazbu. Využití symetrických systémů při návrhu symetrické stavové zpětné vazby taktéž dle předešlé práce zaručuje splnění řetězové stability [9]. A to zejména z důvodu, že při aplikaci poruchy na některé z vozidel vznikne odezva ze vstupních poruch na veškeré odchylkové veličiny. Odpovídající odchylka od polohy i rychlosti nabývá dominantní hodnoty vzhledem k ostatním odchylkám. Taktéž je možno tvrdit, že odezvy zbylých vozidel nikdy tyto dominantní odezvy nepřekročí. V této práci je zmíněn případ s dostatečně velkou volbou vlastních čísel, která přiřazuje hodnoty N vlastním číslům. Takovým přiřazením je možné docílit, že veškeré odezvy budou mít shodnou maximální hodnotu odezev v odchylkách od rychlosti viz (5.1.4).

Druhá část práce je věnována průzkumu a rešerši řídicích strategií k udržování rychlostí a rozestupů kolony vozidel. V první řadě je představena centrální a distribuovaná strategie a poté i jejich výhody či nevýhody. Následně jsou zmíněny některé informační topologie mezi vozidly určující způsob výměny dat kooperací vozidel. Posledně jsou stručně popsány existující metody řešení pro centrální a distribuovanou strategii. Mezi centrální strategii jsou zařazeny i metody, které jsou prováděny v této práci, a tedy symetrický návrh zpětné vazby či symetrické LQR.

Třetí část se zabývá návrhy zpětnovazebního řízení. Převážně je kladen důraz na návrh a analýzu symetrických metod řízení, u kterých je žádáno nalézt obecné tvary zpětnovazebních matic. Prvně je řešena situace se symetrickým LQR v sekci (4.2). U symetrického LQR je hledána volba váhových matic, která zaručuje získání symetrické zpětnovazební matice. Je řešena situace, kde se vychází z výstupní matice, která je složena z přímých vazeb na odchylkové proměnné. Dále je tato situace rozšířena i na plnou symbolickou matici. Řešením jsou získány symetrické tvary váhových matic Q a R .

Rozšířením řešení o symbolickou plnou matici je dodáno některých dalších vyhovujících tvarů symetrických váhových matic. Z nalezených symetrických LQR řízení je ukázáno, že pokud se vychází z výstupních matic s přímými vazbami na veličiny modelu, tak lze zvolit váhové matice dle parametrů p, q, r viz (4.2.4). Postupným návrhem symetrického LQR pro zvyšující se počet vozidel je zobrazen vývoj vlastních čísel kolon s různou délkou kolony v sekci (4.2.6). Je ukázán případ, kdy vlastní čísla jsou přiřazeny pouze na reálnou osu. Taktéž je uveden příklad volby parametrů, kde vlastní čísla jsou komplexně sdružená a udržují se na dvou téměř lineárních útvarech a vždy jediné vlastní čísla pro libovolný počet vozidel je umístěno do jednoho shodného bodu levé komplexní poloroviny. Následně se tato část zaměřuje na návrh a analýzu symetrické stavové zpětné vazby, pro kterou je žádáno nalézt obecné tvary pro libovolný počet vozidel v koloně. Nalezení takových obecných tvarů umožní algoritmům navrhovat potřebné stavové zpětné vazby dle libovolně kladné volby vlastních čísel. Nalezené tvary vychází z různě definovaných Jordanových bloků pro nalezené varianty. Pro zadané Jordanovy bloky se podařilo nalézt tři obecné tvary zpětnovazebních matic, které lze určit nezávisle na počtu vozidel v koloně viz sekce (4.3.1.1). Zobecněné tvary zaručují stabilizaci kolony vozidel a zároveň vlivem symetrických systémů je zaručeno splnění podmínky řetězové stability. V poslední řadě je převeden spojitý model do jeho diskrétní podoby, což umožňuje zavést řízení představující konečně krokového řízení. Pro diskrétní systémy je ukázáno a dokázáno, že vstupně symetrický spojitý systém je vstupně symetrický i v jeho diskrétní podobě viz (4.4.1). Pro diskrétní systém je následně předveden návrh symetrického i nesymetrického konečně krokového řízení. Nesymetrickým návrhem konečně krokového řízení je ukázáno, že je možné omezovat strukturu zpětnovazební matice. Dvě varianty omezující informační vazby zpětnovazební matice konečně krokového řízení jsou k závěru kapitoly navrženy.

Čtvrtá část se zaměřuje na vytvoření virtuálního simulátoru kolony, zaměřeného na symetrické řízení pracující v kruhu, a dále na simulace navržených a zobecněných řešení z dřívější části. Navržená řešení jsou odsimulována v MATLABu/Simulinku za využití simulačního schématu (12). Toto schéma umožňuje přidávat vstupní poruchy na jednotlivá vozidla bloky d_i . Taktéž je umožněno koloně vozidel nastavovat požadované hodnoty, které budou udržovány pomocí bloku *setpoints*. Nalezením vhodných zesílení je docíleno přesného sledování požadovaných hodnot. Kompenzační zesílení je nezbytné zavést z důvodu, že rychlostní odchylky nesledují správně požadované hodnoty na rozdíl od polohových odchylek. Následně jsou zobrazeny a diskutovány simulace symetrických návrhů, a tedy symetrické LQR a symetrické stavové zpětné vazby. Simulacemi je ukázáno, že metodou symetrického LQR je možné docílit řetězově nestabilního návrhu nevhodnou volbou parametrů p, q, r váhových matic Q a R . Jedná se o případ, který vychází z výstupních matic C . Dostatečně rozdílná volba parametrů p a q při aplikované poruše na k -té vozidlo vede na situaci, kdy se porucha přenesla na zbylá vozidla a jejich odezvy dosahují vyšších maximálních hodnot. Tím je dosaženo nesplnění podmínky řetězové stability pro případ, kdy je zvolena příliš malá penalizace rychlostních odchylek p a příliš velká penalizace polohových odchylek parametrem q . Tento případ nastal například při $p = 2, q = 130, r = 1$ či při $p = 0.5, q = 106, r = 1$. Experimenty je odzkoušeno, že při návrhem LQR s využitím symetrických matic jsou získávány dvě komplexně sdružená vlastní čísla a jedno samostatné vlastní číslo. Pro zvyšující se volbu parametru p je razantněji zvětšováno právě samostatné vlastní číslo. V případě, že má obdobnou reálnou hodnotu jako zbylá komplexně sdružená vlastní čísla, stabilizující řízení vede taktéž na řetězově stabilní řízení. Při volbě $p > q$ je přiřazeno právě N vlastních čísel s velmi podobnou hodnotou. Taktéž se jedná o reálná jednotná či dvojitá vlastní čísla. Takovou volbou je docíleno, že zbylé odezvy v čase nikdy nepřekročí rychlostní odezvu

poruchového vozidla. Z čehož lze soudit, že tato volba vede na obecně i řetězově stabilní návrh. Nicméně, je nutno dbát na možnost realizace akčních zásahů. Proto je vhodné volit parametry p, q obdobné. Každopádně, z praktického hlediska úlohy je žádáno penalizovat převážně polohové odchylky. Z toho důvodu, je rozumné volit například $p = q/10$, což vede na obecně a řetězově stabilní návrh a uzavřené smyčky jsou přiřazeny vlastní čísla s podobnými hodnotami. Dále jsou provedeny simulace symetrické stavové zpětné vazby vycházejících z různých Jordanových forem. Je odzkoušeno, že různou volbou vlastních čísel různých struktur zpětnovazebních matic jsou získány průběhy, které v polohových i rychlostních odchylkách vždy zaručují řetězovou stabilitu. Při aplikované poruše na k -té vozidlo je vybuzena kladná odezva polohové odchylky a na danou poruchu se v polohách sníží pouze odchylka předešlého vozidla o shodnou, ale opačnou odchylku. Reakce všech vozidel spočívá v rychlostních odchylkách. Poruchové vozidlo vybudí dominantní odezvu v rychlosti. Reakcí ve změně polohy veškerá zbylá vozidla taktéž přidají rychlost, ale odlišně než poruchové vozidlo. Nicméně, odezva těchto zbylých vozidel je totožná. Následně jsou provedeny simulace konečně krokového řízení diskretizovaného modelu s periodou vzorkování $T_s = 1[s]$ a omezenými informačními vazbami. Pro tři vozidla je navržena omezená zpětnovazební matice, kde druhé vozidlo využívá pouze vlastní rychlost a zbylá vozidla využívají svých stavů a některých stavů druhého vozidla viz (28). Omezení informačních vazeb představuje topologie, které využívají například informací veškerých předešlých vozidel u čtyř vozidel viz (29). Taková řešení zobrazují průběhy řízení, že při vzniklé poruše některá vozidla ani nemusejí reagovat. Dále jsou odsimulovány situace řízení na požadované hodnoty a vliv počátečních podmínek kolony vozidel. Posledně je popsána, představena a zobrazena vytvořená aplikace simulátoru kolony vozidel v App Designeru z MATLABu.

Seznam obrázků

1	Uspořádání kolony vozidel	3
2	Zobrazení bezpečnostních senzorů automatizovaných vozidel [30]	8
3	Lineárně (podélně) uspořádaná kolona vozidel	9
4	Zobrazení lineární kolony s odchylkami vozidel	15
5	Komunikace centrálně orientovaného řízení	25
6	Komunikace distribuovaného řízení	25
7	Topologie informačního toku - předávání informace mezi vozidly	27
8	Průběh vlastních čísel uzavřené smyčky využitím symetrického LQR při volbě parametrů $p = 1, q = 3, r = 1$	52
9	Průběh vlastních čísel uzavřené smyčky využitím symetrického LQR při volbě parametrů $p = 3, q = 3, r = 1$	52
10	Průběh vlastních čísel uzavřené smyčky využitím symetrického LQR při volbě parametrů $p = 1, q = 10, r = 1$	53
11	Průběh vlastních čísel uzavřené smyčky využitím symetrického LQR při volbě parametrů $p = 10, q = 1, r = 1$	53
12	Schéma řízeného modelu kolony s třemi vozidly pomocí stavové zpětné vazby	74
13	Průběh řízení polohových odchylek kolony tří vozidel pomocí symetrické zpětné vazby s aplikovanými poruchami	76
14	Průběh řízení rychlostních odchylek kolony tří vozidel pomocí symetrické zpětné vazby s aplikovanými poruchami	76
15	Průběh řízení odchylek kolony tří vozidel pomocí symetrické zpětné vazby s aplikovanou poruchou na prvním vozidle	77
16	Průběh řízení odchylek na požadované hodnoty kolony tří vozidel pomocí symetrické zpětné vazby	78
17	Průběh řízení odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou s vektorem počátečních podmínek $x_0 = [1, 0, 3, 0, 5]^T$ a vlastními čísly $\lambda = 0.5$	78
18	Průběh řízení polohových odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou s aplikovanými poruchami při volbě vlastních čísel $\lambda = [0.5, 4]$. . .	79
19	Průběh řízení rychlostních odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou s aplikovanými poruchami při volbě vlastních čísel $\lambda = [0.5, 4]$. . .	79
20	Průběh řízení polohových odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou při volbě vlastních čísel $\lambda = [0.5, 4]$ a zadaných setpointech	80
21	Průběh řízení rychlostních odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou při volbě vlastních čísel $\lambda = [0.5, 4]$ a zadaných setpointech	80
22	Průběh řízení odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou s vektorem počátečních podmínek $x_0 = [1, 0, 3, 0, 5]^T$ a vlastními čísly $\lambda = 3, \nu = 4$	81
23	Průběh řízení polohových odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou s aplikovanými poruchami při volbě vlastních čísel $\lambda = 3, \nu = 4$. .	82
24	Průběh řízení odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou při volbě vlastních čísel $\lambda = 3, \nu = 4$ a zadaných setpointech	82

25	Průběh řízení odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou s vektorem počátečních podmínek $x_0 = [1, 0, 3, 0, 5]^T$ a vlastními čísly $\lambda = 3$, $\nu = 4$	83
26	Průběh řízení polohových odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou s aplikovanými poruchami při volbě vlastních čísel $\lambda = 3$, $\nu = 4$. .	83
27	Průběh řízení odchylek kolony tří vozidel symetrickou zpětnou vazbou při volbě vlastních čísel $\lambda = 3$, $\nu = 4$ a zadaných setpointech	84
28	Průběh konečně krokového řízení odchylek diskretizovaného modelu kolony tří vozidel při vstupních poruchách a s omezenou strukturou zpětnovazební matice	85
29	Průběh konečně krokového řízení odchylek diskretizovaného modelu kolony čtyř vozidel při vstupních poruchách a s omezenou strukturou n-PF zpětnovazební matice	85
30	Navržený simulátor kolony vozidel zobrazující symetrická řízení v kruhové koloně	86

Reference

1. Kubíček, K. *Modelově orientovaný vývoj softwaru: řízení spojky automatické převodovky kamionů* Diploma thesis (University of West Bohemia in Pilsen, 2019). <http://hdl.handle.net/11025/39264>.
2. Kubicek, K., Cech, M. & Strelec, M. A Robust Distributed Algorithm for Solving the Economic Dispatch Problem with the Penetration of Renewables and Battery Systems. *Applied Sciences* **14**. ISSN: 2076-3417. <https://www.mdpi.com/2076-3417/14/5/1991> (2024).
3. Olfati-Saber, R., Fax, J. A. & Murray, R. M. Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems. *Proceedings of the IEEE* **95**, 215–233 (2007).
4. Oprea, M. *Applications of multi-agent systems in Information Technology: Selected Tutorials* (2004), 239–270.
5. Hallé, S., Chaib-Draa, B. & Laumonier, J. *Car platoons simulated as a multiagent system* in *In: Proc. 4th Workshop on Agent-Based Simulation* (2003), 57–63.
6. Jin, Q., Wu, G., Boriboonsomsin, K. & Barth, M. *Platoon-based multi-agent intersection management for connected vehicle* in *16th international ieee conference on intelligent transportation systems (itsc 2013)* (2013), 1462–1467.
7. Kubíček, K. & Wolf, J. *Distributed method for Economic Dispatch Problem in power network with multiple uncertainties* in *2022 IEEE 27th International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA)* (2022), 1–8.
8. Chehardoli, H. & Ghasemi, A. Adaptive Centralized/Decentralized Control and Identification of 1-D Heterogeneous Vehicular Platoons Based on Constant Time Headway Policy. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* **19**, 3376–3386 (2018).
9. Pastyřík, R. *Řízení Pohybu Kolony Vozidel* srp. 2022. <http://hdl.handle.net/11025/50150>.
10. Calvert, S. C., Mecacci, G., Heikoop, D. D. & de Sio, F. S. *Full platoon control in Truck Platooning: A Meaningful Human Control perspective* in *2018 21st International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)* (2018), 3320–3326.
11. Lu, X.-Y. & Shladover, S. E. *Automated Truck Platoon Control* čvc. 2015. <https://escholarship.org/uc/item/7c55g2qs#main>.
12. Zheng, Y., Eben Li, S., Wang, J., Cao, D. & Li, K. Stability and Scalability of Homogeneous Vehicular Platoon: Study on the Influence of Information Flow Topologies. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* **17**, 14–26 (2016).
13. Fax, J. & Murray, R. Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Transactions on Automatic Control* **49**, 1465–1476 (2004).

14. Li, S. E., Zheng, Y., Li, K. & Wang, J. *An overview of vehicular platoon control under the four-component framework* in *2015 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)* (2015), 286–291.
15. Wu, Y., Li, S. E., Zheng, Y. & Hedrick, J. K. *Distributed sliding mode control for multi-vehicle systems with positive definite topologies* in *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)* (2016), 5213–5219.
16. Feng, S. *et al.* String stability for vehicular platoon control: Definitions and analysis methods. *Annual Reviews in Control* **47**, 81–97. ISSN: 1367-5788. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1367578819300240> (2019).
17. Zuo, L., Meng, D. & Zhang, J. Optimal Spacing Policy for Vehicle Platoon Control with Road-Friction Coefficient. *Journal of Advanced Transportation* **2021**, 1–10 (pros. 2021).
18. Li, S. E. *et al.* Dynamical Modeling and Distributed Control of Connected and Automated Vehicles: Challenges and Opportunities. *IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine* **9**, 46–58. <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85029368116&doi=10.1109%2fMITS.2017.2709781&partnerID=40&md5=4c9963846ed87a4d19ca021b12f5fa05> (2017).
19. Wang, Z. *et al.* A Survey on Cooperative Longitudinal Motion Control of Multiple Connected and Automated Vehicles. *IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine* **12**, 4–24 (2020).
20. Guanetti, J., Kim, Y. & Borrelli, F. Control of connected and automated vehicles: State of the art and future challenges. *Annual Reviews in Control* **45**, 18–40. ISSN: 1367-5788. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1367578818300336> (2018).
21. Hou, J. *et al.* Large-Scale Vehicle Platooning: Advances and Challenges in Scheduling and Planning Techniques. *Engineering* **28**, 26–48. ISSN: 2095-8099. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2095809923001558> (2023).
22. Larsson, E., Sennton, G. & Larson, J. The vehicle platooning problem: Computational complexity and heuristics. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* **60**, 258–277. ISSN: 0968-090X. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X15003204> (2015).
23. Wang, P., Jiang, Y., Xiao, L., Zhao, Y. & Li, Y. A joint control model for connected vehicle platoon and arterial signal coordination. *Journal of Intelligent Transportation Systems* **24**, 81–92. ISSN: 1547-2450. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1547245022010751> (2020).
24. Amoozadeh, M., Deng, H., Chuah, C.-N., Zhang, H. M. & Ghosal, D. Platoon management with cooperative adaptive cruise control enabled by VANET. *Vehicular Communications* **2**, 110–123. ISSN: 2214-2096. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214209615000145> (2015).
25. Semsar-Kazerooni, E., Verhaegh, J., Ploeg, J. & Alirezaei, M. *Cooperative adaptive cruise control: An artificial potential field approach* in *2016 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)* (2016).
26. McCrone, D. J., Arasteh, E. & Jan, F. M. *An artificial potential field approach to simulate cooperative adaptive cruise controlled vehicles* in *Dynamic Systems and Control Conference* **58271** (2017), V001T44A001.

27. An, G. & Talebpour, A. *Lane-changing trajectory optimization to minimize traffic flow disturbance in a connected automated driving environment in 2019 IEEE Intelligent Transportation Systems Conference (ITSC)* (2019), 1794–1799.
28. Huang, Z., Chu, D., Wu, C. & He, Y. Path planning and cooperative control for automated vehicle platoon using hybrid automata. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* **20**, 959–974 (2018).
29. Bhardwaj, U. *10 latest features that many cars will see in 2022* květ. 2022. <https://gomechanic.in/blog/features-in-2022-cars-in-india/#comments>.
30. s.r.o., R. *Autonomní Jízda Silničních vozidel - časopis elektro - odborné časopisy* <http://www.odbornecasopisy.cz/elektro/clanek/autonomni-jizda-silnicnich-vozidel--3746>.
31. Levine, W. & Athans, M. On the optimal error regulation of a string of moving vehicles. *IEEE Transactions on Automatic Control* **11**, 355–361 (1966).
32. Hidayatullah, M. R. & Juang, J.-C. Centralized and Distributed Control Framework Under Homogeneous and Heterogeneous Platoon. *IEEE Access* **9**, 49629–49648 (2021).
33. LIANG, C.-Y. & PENG, H. String Stability Analysis of Adaptive Cruise Controlled Vehicles. *JSME International Journal Series C* **43**, 671–677 (2000).
34. Naus, G. J. L., Vugts, R. P. A., Ploeg, J., van de Molengraft, M. J. G. & Steinbuch, M. String-Stable CACC Design and Experimental Validation: A Frequency-Domain Approach. *IEEE Transactions on Vehicular Technology* **59**, 4268–4279 (2010).
35. Li, Y., Qin, Z., Zhu, H., Peeta, S. & Gao, X. Platoon control of connected vehicles with heterogeneous model structures considering external disturbances. *Green Energy and Intelligent Transportation* **1**, 100038. ISSN: 2773-1537. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S277315372200038X> (2022).
36. Liang, C.-Y. & Peng, H. Optimal Adaptive Cruise Control with Guaranteed String Stability. *Vehicle System Dynamics* **32**, 313–330 (1999).
37. Dunbar, W. B. & Caveney, D. S. Distributed Receding Horizon Control of Vehicle Platoons: Stability and String Stability. *IEEE Transactions on Automatic Control* **57**, 620–633 (2012).
38. Warnick, S. & Rodriguez, A. A systematic antiwindup strategy and the longitudinal control of a platoon of vehicles with control saturations. *IEEE Transactions on Vehicular Technology* **49**, 1006–1016 (2000).
39. J., M. *Lineární systémy 1, skr. ZČU Plzeň* https://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/ls1/LS1_Ucebni_texty_2011.pdf. Accessed: 2022-06-15. 2011.
40. Herman, I., Martinec, D., Hurák, Z. & Sebek, M. Scaling in Bidirectional Platoons With Dynamic Controllers and Proportional Asymmetry. *IEEE Transactions on Automatic Control* **62**, 2034–2040 (2017).
41. Peppard, L. String stability of relative-motion PID vehicle control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **19**, 579–581 (1974).
42. Öncü, S., Ploeg, J., van de Wouw, N. & Nijmeijer, H. Cooperative Adaptive Cruise Control: Network-Aware Analysis of String Stability. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* **15**, 1527–1537 (2014).

43. Flores, C. *Control architecture for adaptive and cooperative car-following* Theses (Université Paris sciences et lettres, pros. 2018). <https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-02275824>.
44. Königsmarková, J. & Schlegel, M. *Input and Output Symmetric Dynamical Systems: Features and Control Design in 15th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis (ACD 2019)* (ed. Zattoni, E., Simani, S. & Conte, G.) (Springer International Publishing, Cham, 2022), 187–201. ISBN: 978-3-030-85318-1.
45. Myslivec, T. *Omni-Směrové bezpilotní letadlo*. Diploma thesis (University of West Bohemia in Pilsen, čvn. 2018). <http://hdl.handle.net/11025/31770>.
46. Kovářík, M. *Stabilizace jednonohého robota*. Diploma thesis (University of West Bohemia in Pilsen, čvn. 2014). <http://hdl.handle.net/11025/12335>.
47. Klingbeil, X., Wegener, M., Zhou, H., Herrmann, F. & Andert, J. Centralized model-predictive cooperative and adaptive cruise control of automated vehicle platoons in urban traffic environments. *IET Intelligent Transport Systems* **17**, 2154–2170. eprint: <https://ietresearch.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1049/itr2.12384>. <https://ietresearch.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1049/itr2.12384> (2023).
48. Sheikholeslam, S. & Desoer, C. A. *Longitudinal control of a platoon of vehicles. III, Nonlinear Model* říj. 2005. <https://escholarship.org/uc/item/0dx8t12z#main>.
49. Kaku, A., Mukai, M. & Kawabe, T. *A centralized control system for ecological vehicle platooning using linear quadratic regulator theory - artificial life and robotics* čvc. 2012. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10015-012-0019-3>.
50. Liang, K.-Y. *Linear quadratic control for heavy duty vehicle platooning* 2011.
51. Mattsson, F. *Centralized Model Predictive Control of a Vehicle Platoon* dis. pr. (2018). <https://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:kth:diva-247875>.
52. Turri, V. *Fuel-efficient and safe heavy-duty vehicle platooning through look-ahead control* dis. pr. (2015). ISBN: 978-91-7595-682-4. <https://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:kth:diva-173380>.
53. Schlegel, M. & Königsmarková, J. Parametric Jordan Form Assignment Revisited. *Asian Journal of Control* **16**, 409–420. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/asjc.713>. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/asjc.713> (2014).
54. Hammar, G. & Ovtchinnikov, V. *Structural Intelligent Platooning by a systematic LQR algorithm: Semantic scholar* led. 1970. <https://www.semanticscholar.org/paper/Structural-Intelligent-Platooning-by-a-Systematic-Hammar-Ovtchinnikov/db2fb859dc795b03133cb24f627fdbfdbd3d5014>.
55. Königsmarková, J. & Schlegel, M. *Symetrický LQR pro vstupně symetrické systémy. Rukopis* (bude publikováno). 2024.
56. Khatir, M. & Davison, E. *A decentralized lateral-longitudinal controller for a platoon of vehicles operating on a plane in 2006 American Control Conference* (2006), 6 pp.-.
57. Khatir, M. & Davidson, E. *Decentralized control of a large platoon of vehicles operating on a plane with steering dynamics in Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005.* (2005), 2159–2165 vol. 3.

58. Han, S.-Y., Chen, Y.-H., Wang, L. & Abraham, A. *Decentralized Longitudinal Tracking Control for Cooperative Adaptive Cruise Control Systems in a Platoon in 2013 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics* (2013), 2013–2018.
59. Stankovic, S., Stanojevic, M. & Siljak, D. Decentralized overlapping control of a platoon of vehicles. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **8**, 816–832 (2000).
60. Stanković, S. S., Stanojević, M. & Šiljak, D. D. Decentralized Suboptimal LQ Control of a Platoon of Vehicles. *IFAC Proceedings Volumes* **30**. 8th IFAC/IFIP/IFORS Symposium on Transportation Systems 1997 (TS '97), Chania, Greece, 16-18 June, 83–88. ISSN: 1474-6670. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667017438055> (1997).
61. Bamieh, B., Paganini, F. & Dahleh, M. Distributed control of spatially invariant systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**, 1091–1107 (2002).
62. Nguyen, D.-H. & Hara, S. Hierarchical Decentralized Controller Synthesis for Heterogeneous Multi-Agent Dynamical Systems by LQR. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration* **8**, 295–302. eprint: <https://doi.org/10.9746/jcmsi.8.295>. <https://doi.org/10.9746/jcmsi.8.295> (2015).
63. Zhan, J., Ma, Z. & Zhang, L. Data-Driven Modeling and Distributed Predictive Control of Mixed Vehicle Platoons. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles* **8**, 572–582 (2023).
64. Shi, S. *Decentralized and distributed model predictive control of vehicle platoons* 2017. <https://research.tue.nl/en/studentTheses/decentralized-and-distributed-model-predictive-control-of-vehicle>.
65. Li, S. E. *et al.* Robust Longitudinal Control of Multi-Vehicle Systems—A Distributed H-Infinity Method. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* **19**, 2779–2788 (2018).
66. Xu, L., Zhuang, W., Yin, G. & Chentong, B. Stable Longitudinal Control of Heterogeneous Vehicular Platoon With Disturbances and Information Delays. *IEEE Access* **PP**, 1–1 (lis. 2018).
67. Khatir, M. & Davison, E. *Decentralized control of a large platoon of vehicles using non-identical controllers in Proceedings of the 2004 American Control Conference* **3** (2004), 2769–2776 vol.3.
68. Guo, X., Wang, J., Liao, F. & Teo, R. S. H. Distributed Adaptive Sliding Mode Control Strategy for Vehicle-Following Systems With Nonlinear Acceleration Uncertainties. *IEEE Transactions on Vehicular Technology* **66**, 981–991 (2017).
69. Guo, X., Wang, J., Liao, F. & Teo, R. S. H. Distributed Adaptive Integrated-Sliding-Mode Controller Synthesis for String Stability of Vehicle Platoons. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* **17**, 2419–2429 (2016).
70. Zhu, Y. & Zhu, F. Distributed Adaptive Longitudinal Control for Uncertain Third-Order Vehicle Platoon in a Networked Environment. *IEEE Transactions on Vehicular Technology* **67**, 9183–9197 (2018).
71. Martinec, D., Herman, I., Hurák, Z. & Šebek, M. Wave-absorbing vehicular platoon controller. *European Journal of Control* **20**, 237–248. ISSN: 0947-3580. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0947358014000569> (2014).

72. Martinec, D., Herman, I. & Šebek, M. Two-sided wave-absorbing control of a heterogeneous vehicular platoon. *IFAC Proceedings Volumes* **47**. 19th IFAC World Congress, 8091–8096. ISSN: 1474-6670. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1474667016428892> (2014).
73. Desjardins, C. & Chaib-draa, B. Cooperative Adaptive Cruise Control: A Reinforcement Learning Approach. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* **12**, 1248–1260 (2011).
74. Li, M., Cao, Z. & Li, Z. A Reinforcement Learning-Based Vehicle Platoon Control Strategy for Reducing Energy Consumption in Traffic Oscillations. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* **32**, 5309–5322 (2021).
75. Wang, Z., Wu, G. & Barth, M. J. *A Review on Cooperative Adaptive Cruise Control (CACC) Systems: Architectures, Controls, and Applications* in *2018 21st International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)* (2018), 2884–2891.
76. Schlegel, M. 2005. https://schlegel.zcu.cz/soubory/modal_contr.pdf.
77. *Matlab app designer* <https://www.mathworks.com/products/matlab/app-designer.html>.

7 Přílohy

Veškeré použité scripty, programy, simulační modely a model simulátoru použité při řešení práce jsou uloženy na úložišti GitHub. Veškeré scripty a programy jsou provedeny v MAPLE či MATLABu/Simulinku a aplikace je vytvořena v App Designeru prostředí MATLAB.

Odkaz na úložiště veškerých scriptů použitých v diplomové práci je zobrazen níže.

Odkaz na GitHub úložiště: https://github.com/radekpastyrik/RP_DP_KolonaVozidel

