Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra mechaniky

Bakalářská práce

Stanovení ztrátového součinitele kónických redukcí různých rozměrů prostřednictvím numerických simulací

Plzeň 2024 Tomáš Eisenhammer

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2023/2024

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE
(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	**Tomáš EISENHAMMER**
Osobní číslo:	**A21B0464P**
Studijní program:	**B0715A270014 Počítačové modelování v mechanice**
Téma práce:	**Stanovení ztrátového součinitele kónických redukcí různých rozměrů prostřednictvím numerických simulací**
Zadávající katedra:	**Katedra mechaniky**

Zásady pro vypracování

1. Popis matematického modelu proudění stlačitelné tekutiny a základních principů metody konečných objemů.
2. Provedení numerických simulací proudění stlačitelné tekutiny v kónických redukcích vybraných geometrických parametrů s využitím výpočtového systému ANSYS Fluent.
3. Stanovení ztrátového součinitele tlaku pro řešené varianty.
4. Studium vlivu velikosti vstupního Reynoldsova čísla na hodnotu ztrátového součinitele.
5. Analýza dosažených výsledků, jejich diskuze a formulace závěrů.

Rozsah bakalářské práce:	**20 – 40 stran A4**
Rozsah grafických prací:	
Forma zpracování bakalářské práce:	**tištěná**

Seznam doporučené literatury:

1. ANSYS – Fluent: uživatelský manuál.
2. E. Boqvist: Investigation of a swing check valve using CFD. Diplomová práce, Linköping University, 2014.
3. C. Hirsch: Numerical computation of internal and external flows – Volume 1: Fundamentals of computational fluid dynamics. Second Edition, Elsevier Ltd., 2007.
4. S. Drábková: Mechanika tekutin. Učební text VŠB-TU Ostrava, 2007.
5. J. Noskievič a kol.: Mechanika tekutin. SNTL – Státní nakladatelství technické literatury, 1987.

Vedoucí bakalářské práce:	**Ing. Stanislav Plánička, Ph.D.** Nové technologie pro informační společnost
Datum zadání bakalářské práce:	**11. října 2023**
Termín odevzdání bakalářské práce:	**31. května 2024**

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
L.S.

Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan

Prof. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 11. října 2023

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne ....

Tomáš Eisenhammer

Poděkování

Chtěl bych poděkovat Ing. Stanislavu Pláničkovi, Ph.D., za veškerý čas, který věnoval vedení této práce.

Poděkování patří též prof. Ing. Janu Vimmrovi, Ph.D., který mě do problematiky mechaniky tekutin původně uvedl.

Abstrakt

Cílem této bakalářské práce je stanovení součinitelů místní ztráty kónických redukcí pro vybrané geometrické parametry a vybraná Reynoldsova čísla pomocí numerických simulací proudění stlačitelné tekutiny. Je popsán obecný matematický model proudění stlačitelné tekutiny a princip metody konečných objemů. Dále je definován konkrétní model proudění pro řešenou úlohu. Konvergenční analýzou jsou určeny vhodné parametry geometrie výpočtové oblasti a výpočetní sítě. Na výsledných sítích jsou provedeny simulace v komerčním výpočtovém programu ANSYS Fluent, z nichž jsou určeny výsledné ztrátové součinitele metodou využívající lineární regrese. Výsledky jsou dále analyzovány s důrazem na závislost ztrátového součinitele na průměru výstupní trubky, vrcholovém úhlu redukce a vstupním Reynoldsově čísle.

Klíčová slova: proudění stlačitelné tekutiny, metoda konečných objemů, kónické redukce, tlakové ztráty

Abstract

The goal of this bachelor's thesis is to determine the local loss coefficients of conic pipe reductions for selected geometric parameters and selected Reynolds numbers using numerical simulations of compressible fluid flow. A general mathematical model of compressible fluid flow is described and principles of finite volume method are introduced. Appropriate parameters of the computational domain and mesh are determined using a convergence analysis. Simulations are performed on the final meshes using the ANSYS Fluent commercial computational fluid dynamics software. The results of these simulations are used to determine the loss coefficients via a method based on linear regression. The results are analysed with a focus on the dependance of the loss coefficient value on the outlet pipe diameter, reduction angle and inlet Reynolds number.

Key words: compressible fluid flow, finite volume method, conic pipe reductions, pressure loss

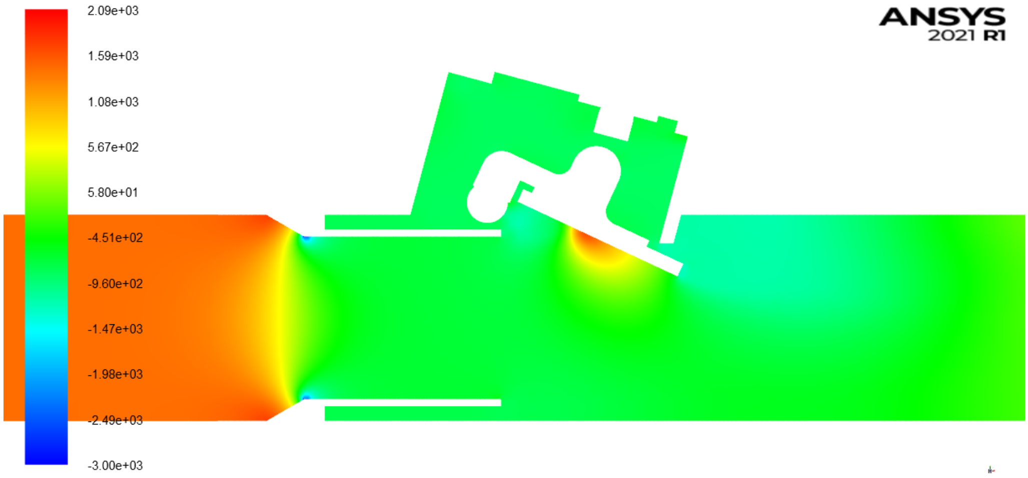
Obsah

1 Úvod

Zpětné klapky jsou nezbytnou součástí potrubních systémů tepelných elektráren. Slouží jako bezpečnostní prvek při odstavování turbíny, kdy by zpětné proudění páry mohlo poškodit lopatky. V případě, že dynamické účinky proudění zeslábnou pod určitou mez, se klapka vlastní tíhou zavře, a tím zamezí dalšímu proudění. Těleso klapky však za provozu zasahuje do proudu proudící tekutiny, čímž způsobuje tlakové ztráty, které jsou při provozu turbíny nežádoucí, neboť jsou spojeny s disipací energie.

Obr. 1: Zpětná klapka ve zkušební trati během experimentálního měření

Návrh potrubního systému elektrárny vyžduje znalost tlakových ztrát pro danou geometrii a rychlost proudění. Na ztrátě se podílí kromě samotné klapky i tvarovky napojení. Pro klapku zachycenou na obr. 1, řešenou na Katedře mechaniky v rámci projektu *Vývoj pokročilé metodiky pro stanovení průtočných charakteristik zpětné odběrové klapky u parního turbosoustrojí* [1], se ukázalo, že tlaková ztráta na vstupní kónické redukci tvoří významnou část celkové tlakové ztráty klapky, jak dokumentuje tlakové pole získané numerickou simulací vyobrazené na obr. 2. Právě problematika stanovení tlakové ztráty v kónické redukci je předmětem předkládané bakalářské práce, neboť v literatuře dostupné vztahy (např. z [2]) platí pouze pro specifické geometrické varianty, a navíc zpravidla uvažují nestlačitelnou tekutinu.



Obr. 2: Rozložení tlaku v okolí zpětné klapky v podélném řezu. Převzato z [1]

Práce je rozdělena do šesti kapitol. Po této první úvodní kapitole následuje kapitola druhá, kde je popsán obecný matematický model proudění stlačitelné tekutiny a princip metody konečných objemů. Též je popsáno Reynoldsovo a Machovo číslo, se kterými je hojně pracováno dále. Na konci kapitoly je úvod do problematiky třecích a místních ztrát v potrubních systémech. Ve třetí kapitole je popsán konkrétní matematický model tekutiny použitý při řešení tlakových ztrát a je dokumentován výběr vhodných parametrů výpočetních sítí na základě konvergenční analýzy. Ve čtvrté kapitole je popsána metoda určení ztrátových součinitelů z výsledků numerických simulací a výsledné součinitele jsou graficky vykresleny. V páté kapitole je analyzována závislost určených součinitelů na parametrech úlohy, je diskutována jejich shoda s dostupnými analytickými vztahy a experimentálními daty a je provedena analýza rozložení vybraných veličin v okolí redukce pro různé parametry geometrie a rychlosti proudění. Nakonec jsou v závěru shrnuty a diskutovány výsledky práce.

2 Matematický model proudění stlačitelné tekutiny

2.1 Základní rovnice popisující proudění

Proudění stlačitelné newtonské tekutiny je popsáno rovnicí kontinuity, Navierovou-Stokesovou rovnicí, rovnicí energie a stavovou rovnicí. První tři z uvedených rovnic jsou bilanční rovnice, které popisují bilanci jednotlivých fyzikálních veličin. K nim je nutné pro uzavření matematického modelu přidat konstitutivní vztah – stavovou rovnici. Tvary rovnic uvedené v této podkapitole vychází z [3], jsou formulovány v tenzorovém zápisu pro kartézské souřadnice a je použita Einsteinova sumační konvence.

Rovnice kontinuity vyjadřuje bilanci hmotnosti a má tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$

kde ρ je hustota, v_i jsou kartézské složky vektoru rychlosti. Nezávislými proměnnými jsou čas t a kartézské souřadnice polohy x_i.

Navierova-Stokesova rovnice vyjadřuje bilanci hybnosti a má tvar

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3}\eta \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right), \tag{2}$$

kde f_i jsou kartézské složky vnějšího zrychlení, p je tlak a η je dynamická viskozita tekutiny.

Rovnice energie vyjadřuje bilanci celkové energie a má tvar

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial \left[v_i \left(\rho e + p\right)\right]}{\partial x_i} = \rho f_i v_i + k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial (\tau_{ij} v_j)}{\partial x_i}. \tag{3}$$

V této rovnici je e měrná celková energie, k je tepelná vodivost, T je termodynamická teplota a τ_{ij} jsou složky tenzoru smykových napětí. Měrnou celkovou energii lze vypočítat z teploty a rychlosti vztahem $e = c_v T + \frac{v_i v_i}{2}$, kde c_v je měrná tepelná kapacita dané tekutiny za konstatního objemu. Pro složky tenzoru smykových napětí platí $\tau_{ij} = \eta\left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta_{ij}\right]$.

Systém bilančních rovnic (1), (2) a (3) bývá souhrnně označován jako systém Navierových-Stokesových rovnic.

Stavová rovnice ideálního plynu má tvar

$$p = \rho r T, \tag{4}$$

kde r je specifická plynová konstanta. Lze ji vypočítat z univerzální plynové konstanty $R = 8{,}314 \ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$ a molární hmotnosti M jako $r = \frac{R}{M}$. Pro vzduch (je-li použita výchozí hodnota programu ANSYS Fluent $M = 28{,}966 \ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$) je $r = 287{,}026 \ \mathrm{J \cdot K^{-1} kg^{-1}}$.

2.2 Numerické řešení rovnic metodou konečných objemů

Metoda konečných objemů je založena na přímé diskretizaci integrální formulace systému Navierových-Stokesových rovnic. Díky tomu je i po diskretizaci zajištěno splnění těchto bilančních rovnic.

Obecný integrální tvar bilanční rovnice pro skalární veličinu u je dle [3]

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_J} u \mathrm{d}\Omega + \oint_{S_J} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\Omega_J} q \mathrm{d}\Omega, \tag{5}$$

kde první člen představuje změnu veličiny u v kontrolním objemu Ω_J, druhý člen představuje konvektivní tok plochou $S_J = \partial\Omega_J$ ($\vec{f}$ je toková funkce) a člen na pravé straně je přírůstek veličiny u způsobený zdroji uvnitř Ω_J.

Při diskretizaci jsou veličiny u, q nahrazeny průměrovanými hodnotami v kontrolním objemu U, Q a toková funkce $\vec{f}$ je nahrazena průměrovanou hodnotou na stěně $\vec{F}$. Tyto průměrované veličiny jsou definovány vztahy

$$U_J = \frac{\int_{\Omega_J} u \mathrm{d}\Omega}{\Omega_J},\ Q_J = \frac{\int_{\Omega_J} q \mathrm{d}\Omega}{\Omega_J},\ \vec{F} = \frac{\int_S \vec{f} \mathrm{d}S}{S}, \tag{6}$$

kde Ω_J značí velikost kontrolního objemu, S je plocha stěny. Dosazením (6) do (5) vznikne prostorově diskretizovaná forma bilanční rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(U_J \Omega_J\right) + \sum_{\text{stěny}} \vec{F} \cdot \Delta\vec{S} = Q_J \Omega_J. \tag{7}$$

Je-li při časové diskretizaci aproximována derivace $\frac{\partial}{\partial t}\left(U_J \Omega_J\right)$ dopřednou diferencí, vznikne explicitní numerické schéma

$$\left[U_J \Omega_J\right]^{n+1} = \left[U_J \Omega_J\right]^{n} - [\Delta t \sum_{\text{stěny}} \vec{F} \cdot \Delta\vec{S}]^n + \left[\Delta t Q_J \Omega_J\right]^{n}, \tag{8}$$

kde horní indexy značí časovou hladinu. Implicitní schéma se od (8) liší tím, že hodnoty $(\Delta t \sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{S})$ a $(\Delta t Q_J \Omega_J)$ vypočítává obecně z n-té i $(n+1)$-ní hladiny.

Pro aproximaci numerických toků $\vec{F} \cdot \Delta\vec{S}$ bývají při implementaci metody konečných objemů využívány nejčastěji dvě základní strategie, a to centrální schémata a upwind schémata. Základní rozdíl mezi nimi ten, že centrální schémata aproximují numerický tok $\vec{F} \cdot \Delta\vec{S}$ na stěně průměrováním hodnot U z přilehlých buněk, zatímco upwind schémata používají pro vyjádření tokové funkce hodnotu U z buňky proti směru toku.

Pro zjednodušení nechť u je skalární veličina vystupující v 1D parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (f(u))}{\partial x} = 0. \tag{9}$$

V 1D kontrolní objem Ω_J přechází na interval $\langle x, x+\Delta x\rangle$, obsah stěny ΔS je uvažován jednotkový, vektor vnější normály je $+1$ na pravé straně intervalu a -1 na levé. Tok stěnou, který je ve 3D vyjádřen skalárním součinem $\vec{F} \cdot \Delta\vec{S}$, tedy v 1D přejde v tok $F\Delta S = F_{i+\frac{1}{2}}$ pravou stěnou a $-F\Delta S = -F_{i-\frac{1}{2}}$ levou stěnou. Následným vydělením rovnice velikostí intervalu Δx a aproximací derivace dopřednou diferencí vznikne explicitní numerické schéma metody konečných objemů v 1D ve tvaru

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}). \tag{10}$$

Konkrétní tvary řešení této diskretizované rovnice se liší v závislosti na volbě aproximací numerických toků $F_{i+\frac{1}{2}}$, $F_{i-\frac{1}{2}}$.

Upwind schéma 1. řádu přesnosti v 1D je

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n\right), \tag{11}$$

kde

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} f(U_i^n) & A_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 0, \\ f(U_{i+1}^n) & A_{i+\frac{1}{2}}^n < 0, \end{cases} \tag{12}$$

kde

$$A_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{f(U_{i+1}^n) - f(U_i^n)}{U_{i+1}^n - U_i^n}. \tag{13}$$

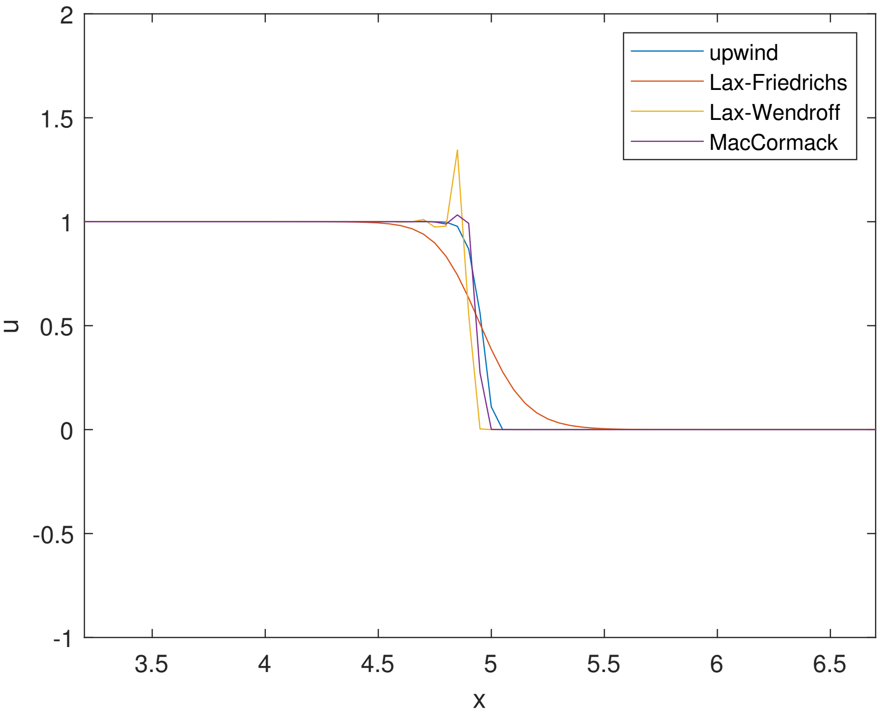
Vybraná numerická schémata pro aproximaci konvektivních toků jsou porovnávána na obr. 3, kde jsou implementována při řešení Burgersovy rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{u^2}{2})}{\partial x} = 0, \tag{14}$$

která svým tvarem připomíná systém Eulerových rovnic, viz [3]. Zde konkrétně je řešena počátečně-okrajová úloha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial(\frac{u^2}{2})}{\partial x} = 0 & x \in (0, L), \\ u(0,t) = 1, \\ u(x,0) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Upwind schéma 1. řádu přesnosti je porovnáno s Laxovým-Friedrichsovým schématem, které je centrálním schématem 1. řádu přesnosti, a dvěma centrálními schématy 2. řádu přesnosti – Laxovým-Wendroffovým a MacCormackovým. Pro implementaci numerických schémat byl vytvořen vlastní kód v Matlabu.



Obr. 3: Porovnání vybraných numerických schémat při řešení Burgersovy rovnice

Uvedená schémata 1. řádu přesnosti (upwind a Lax-Friedrichs) vykazují tzv. disipativní chybu, tj. vyhlazování výsledného řešení. U Laxova-Friedrichsova schématu je toto vyhlazování výraznější. Naproti tomu uvedená schémata 2. řádu přesnosti vykazují tzv. disperzní chybu, tj. řešení má tendenci kmitat, jak je patrné na obr. 3. Podrobnější popis a rozbor vlastností uvedených numerických schémat je možné nalézt v [4] a [5].

Proudění tekutin je výrazně komplexnější jev, ale základní princip řešení zůstává stejný jako u výše popsané skalární rovnice v 1D. Prostorové proudění popisuje vektorová bilanční rovnice

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}_v}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{h}_v}{\partial z} + \mathbf{q}. \tag{16}$$

Tato rovnice je analogií rovnice (5). Místo skalární veličiny u vystupuje vektor konzervativních proměnných

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho e \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Tokové funkce a zdrojové členy vychází z rovnic (1), (2) a (3). Konvektivní toky jsou

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_2 v_1 \\ \rho v_3 v_1 \\ (\rho e + p) v_1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_2^2 + p \\ \rho v_3 v_2 \\ (\rho e + p) v_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \rho v_3 \\ \rho v_1 v_3 \\ \rho v_2 v_3 \\ \rho v_3^2 + p \\ (\rho e + p) v_3 \end{bmatrix} \tag{18}$$

a členy na pravé straně rovnice (16) jsou

$$\mathbf{f}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{21} \\ \tau_{31} \\ \tau_{11} v_1 + \tau_{12} v_2 + \tau_{13} v_3 + k \frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}, \mathbf{g}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{12} \\ \tau_{22} \\ \tau_{32} \\ \tau_{21} v_1 + \tau_{22} v_2 + \tau_{23} v_3 + k \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{h}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \\ \tau_{33} \\ \tau_{31} v_1 + \tau_{32} v_2 + \tau_{33} v_3 + k \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_1 \\ \rho f_2 \\ \rho f_3 \\ \rho \left(f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 \right) \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Složky tenzoru vazkých napětí τ_{ij}, které odpovídají disipativnímu členu 2. řádu $\eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$ v (2), jsou zpravidla aproximovány centrálním schématem, viz [3].

Pro turbulentní proudění je vlivem komplikovaných dějů v malých měřítkách přímá numerická simulace proudění velmi náročná na výpočetní techniku a mimo nejjednodušší úlohy prakticky nemožná. Často užívaným řešením tohoto problému je využití tzv. Reynoldsovo středování, kdy jsou okamžité hodnoty řešených veličin rozděleny na střední hodnotu v čase a fluktuaci, např. pro tlak

$$p(t) = \overline{p} + p'(t). \tag{20}$$

Je-li použita operace středování na Navierovu-Stokesovu rovnici (2) (podrobné odvození lze nalézt v [6]), vznikne rovnice

$$\frac{\partial (\overline{\rho v_i})}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{\rho v_j} \cdot \overline{v}_i)}{\partial x_j} = \overline{\rho} f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\overline{p} \delta_{ij} + \overline{\tau}_{ij} - \overline{(\rho v_j)' v_i'} \right). \tag{21}$$

Je-li navíc Reynoldsovo středování aplikováno i na rovnici kontinuity (1) a rovnici energie (3), vznikne středovaný systém Navierových-Stokesových rovnic, který je označován zkratkou RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations).

Člen $\overline{(\rho v_j)' v_i'}$, označovaný jako tenzor Reynoldsových napětí, představuje přídavné neznámé, které je třeba modelovat. To vyžaduje přidání dodatečných rovnic pro jejich určení, často založených na transportu některých dalších veličin. V praxi jsou hojně využívány dvourovnicové modely k-ε a k-ω, založené na bilanci turbulentní kinetické energie k a rychlosti disipace turbulentní energie ε, resp. specifické rychlosti disipace ω.

2.3 Reynoldsovo číslo

Reynoldsovo číslo je definováno jako

$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{vd\rho}{\eta}, \tag{22}$$

kde v je charakteristická rychlost, d je charakteristický rozměr, $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ je kinematická viskozita tekutiny, η je dynamická viskozita a ρ je hustota, viz [2]. Reynoldsovo číslo vyjadřuje poměr setrvačných a třecích sil.

Pro proudění tekutiny v trubce kruhového průřezu je zvykem volit parametry tak, že v je střední rychlost tekutiny a d je průměr trubky. Takto zavedené Re dává odhad kvalitativních vlastností proudění. Uvádí se, že do $\mathrm{Re}_{\mathrm{krit}} \approx 2300$ je proudění laminární, při větším Re dochází k přechodu do turbulence.

2.4 Machovo číslo

Machovo číslo je definováno jako

$$\mathrm{Ma} = \frac{v}{c}, \tag{23}$$

kde v je rychlost tekutiny a c je rychlost zvuku, viz [2]. Při $\mathrm{Ma} < 1$ se proudění označuje jako subsonické, při $\mathrm{Ma} > 1$ jako supersonické. Proudění, při kterém dochází k přechodu mezi $\mathrm{Ma} < 1$ a $\mathrm{Ma} > 1$, se označuje jako transonické a vyznačuje se vznikem rázových vln.

Machovo číslo též popisuje stlačitelnost tekutiny. Publikace [2] uvádí pro závislost změny hustoty ρ a rychlosti v proudění vztah

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\mathrm{Ma}^2 \frac{\mathrm{d}v}{v}. \tag{24}$$

To znamená, že pro $\mathrm{Ma} \ll 1$ změna rychlosti nevyvolá téměř žádnou změnu hustoty. Pro malé hodnoty Ma tedy není z hlediska změn hustoty téměř žádný rozdíl mezi nestlačitelnou a stlačitelnou tekutinou. Naopak při $\mathrm{Ma} \approx 1$ vyvolá změna rychlosti změnu hustoty téhož řádu. Dle [3] při $\mathrm{Ma} \leq 0{,}2$ nemá význam uvažovat stlačitelnost při výpočtech.

2.5 Tlakové ztráty v potrubí

Při proudění vazké tekutiny vždy dochází k tlakovým ztrátám způsobeným disipací energie. Dělí se na ztráty třecí (dominující v rovných úsecích potrubí) a místní (vznikající v místech změny velikosti nebo směru rychlosti proudění – v redukcích, kolenech apod.). Tlaková ztráta p_z vystupuje jako korekční člen v Bernoulliově rovnici pro vazkou tekutinu

$$p_\mathrm{st1} + \rho_1 \frac{v_1^2}{2} = p_\mathrm{st2} + \rho_2 \frac{v_2^2}{2} + p_\mathrm{z}. \tag{25}$$

Indexy 1 a 2 u jednotlivých veličin zde označují průřezy 1 a 2. Člen $\rho\frac{v^2}{2}$ je označován jako dynamický tlak p_dyn. Z rovnice (25) vyplývá vztah pro tlakovou ztrátu

$$p_\mathrm{z} = (p_\mathrm{st1} - p_\mathrm{st2}) + (\rho_1 \frac{v_1^2}{2} - \rho_2 \frac{v_2^2}{2}) = \Delta p_\mathrm{st} + \Delta p_\mathrm{dyn}. \tag{26}$$

Třecí ztráta je vyjádřena jako

$$p_\mathrm{z} = \lambda \frac{l}{d} p_\mathrm{dyn} = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{v^2}{2}, \tag{27}$$

je tedy charakterizována třecím součinitelem λ. Ten je závislý na Reynoldsově čísle Re a relativní drsnosti stěn ε. Přesná závislost $\lambda(\mathrm{Re}, \varepsilon)$ je značně složitá a v praxi se pro ni používají přibližné empirické vztahy. Pro hydraulicky hladké potrubí ($\varepsilon = 0$) se často používá Blasiův vztah

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}, \quad 2320 \leq \mathrm{Re} \leq 8 \cdot 10^4, \tag{28}$$

a Nikuradseho vztah

$$\lambda = 0{,}0032 + 0{,}221 \mathrm{Re}^{-0{,}237}, \quad 2320 \leq \mathrm{Re} \leq 1{,}5 \cdot 10^6, \tag{29}$$

popř. další vztahy, viz [2].

Místní ztráta je vyjádřena jako

$$p_\mathrm{z} = \zeta p_\mathrm{dyn} = \zeta \rho \frac{v^2}{2} \tag{30}$$

a je charakterizována ztrátovým součinitelem ζ. Ten závisí na geometrických parametrech místa dané ztráty a může záviset i na Reynoldsově čísle.

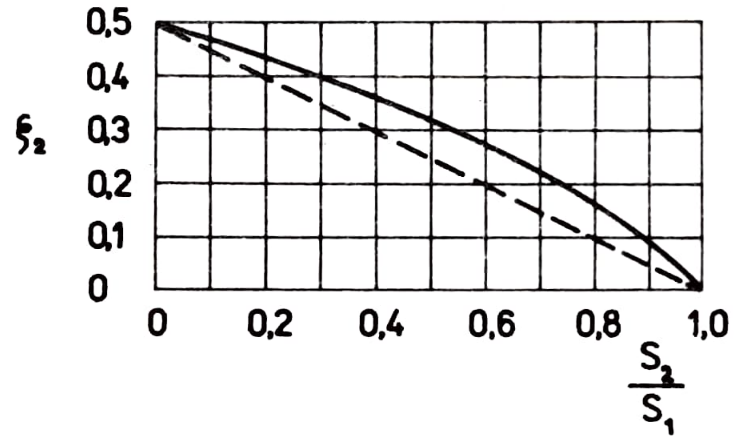
Pro kónická zúžení, kterými se tato práce zabývá, neexistuje jeden vztah popisující místní ztátu pro všechny geometrie a Reynoldsova čísla. V dostupné literatuře lze nalézt pouze vztahy pro kónická zúžení s malými vrcholovými úhly a pro redukce s vrcholovým úhlem $\alpha = 180°$, tj. pro náhlé zúžení.

Při malém pozvolném zúžení, kdy nedochází k odtržení mezní vrstvy, lze místní ztrátu přibližně určit jako třecí ztrátu v kónickém potrubí, kdy je vztah pro třecí ztrátu integrován po délce potrubí proměnného průřezu. Na základě této úvahy lze odvodit vztah

$$\zeta = \frac{\lambda_s}{8 \tan \frac{\alpha}{2}} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right], \tag{31}$$

kde λ_s je třecí součinitel při střední hodnotě Re v zúžení. Odvození vztahu (31) lze nalézt v [2].

Ztrátový součinitel náhlého zúžení má dle experimentálních výsledků průběh znázorněný na obr. 4. Součinitel ζ_2 je vztažen k dynamickému tlaku p_{dyn2} ve výstupní trubce, pro získání součinitele $\zeta \equiv \zeta_1$ vztaženého k p_{dyn1}, se kterým je pracováno v této práci, je nutné jej vynásobit druhou mocninou poměru obsahů průřezů $\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2$.



Obr. 4: Průběh ztrátového součinitele ζ_2 na podílu ploch průřezů výstupní a vstupní trubky $\frac{S_2}{S_1}$. Převzato z [2]

Nelineární závislost znázorněnou na obr. 4 lze aproximovat přibližným lineárním vztahem

$$\zeta_2 = 0{,}5 \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right], \tag{32}$$

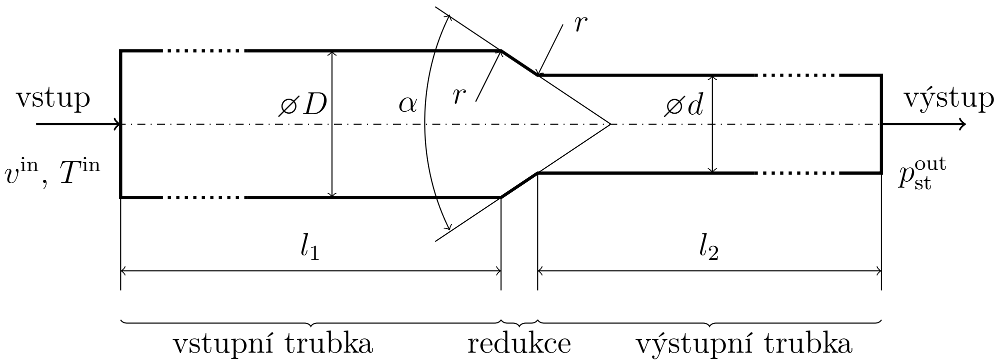
a tedy

$$\zeta_1 = 0{,}5 \cdot \left[\left(\frac{D}{d}\right)^2 - 1\right]\left(\frac{D}{d}\right)^2, \tag{33}$$

Výše uvedené vztahy platí pro nestlačitelnou tekutinu, pro určení tlakové ztráty stlačitelné tekutiny jsou nepřesné. Nedostatečná obecná platnost teoretických vztahů má za důsledek potřebu ztrátové součinitele získat experimentem nebo simulací.

3 Numerická simulace

3.1 Formulace problému



Obr. 5: Schématické vyobrazení řezu řešené geometrie kónické redukce trubky

Cílem numerické simulace je stanovení ztrátových součinitelů kónických redukcí trubek pro různé geometrické parametry a rychlosti proudění. Průměr vstupní trubky je $D = 150$ mm pro všechny simulované případy, poloměr zaoblení je $r = 10$ mm pro všechny geometrie s výjimkou $\alpha = 180°$, která je bez zaoblení. Je uvažována hladká stěna trubky. Mění se průměr výstupní trubky d, vrcholový úhel α a Reynoldsovo číslo. Konkrétně jde o následující hodnoty:

$$
\begin{aligned}
d &= 80, 100, 120 \text{ mm},\\
\alpha &= 10, 20, 30, 60, 90, 120, 180°,\\
\mathrm{Re} &= 50\,000, 100\,000, 200\,000, 300\,000, 500\,000.
\end{aligned}
$$

Dohromady se tedy jedná o 105 řešených variant. Pro každou z nich bude provedena numerická simulace proudění vzduchu a ze získaných dat bude určen součinitel místní ztráty v dané redukci.

3.2 Použitý výpočtový model

Simulace byly prováděny v komerčním programu ANSYS Fluent. Ve všech případech bylo počítáno ustálené proudění. Vzduch byl modelován jako ideální plyn o dynamické viskozitě $\eta = 1{,}7894 \cdot 10^{-5}$ Pa $\cdot$ s, měrné tepelné kapacitě při konstantním tlaku $c_p = 1006{,}43$ J $\cdot$ kg^{-1} $\cdot$ K^{-1}, teplotní vodivosti $k = 0{,}0242$ W $\cdot$ m^{-1} $\cdot$ K^{-1} a molární hmotnosti $M = 28{,}966$ g $\cdot$ mol^{-1}. Při daném rozpětí tlaků a teplot je model ideálního plynu zcela vyhovující.

Vzhledem k turbulentnímu charakteru proudění ve všech variantách byl v simulacích použit model turbulence Realizable k-ε se stěnovými funkcemi typu Scalable. Pro numerické řešení matematického modelu byla použita sdružená varianta Pressure-Based řešiče, kde gradienty byly aproximovány metodou Green-Gauss Node Based. Numerické toky rovnic kontinuity, hybnosti a energie byly aproximovány upwind schématem 2. řádu přesnosti, numerické toky v rovnicích modelu k-ε byly aproximovány upwind schématem 1. řádu přesnosti. Pro výpočet tlaku byla použita metoda PRESTO! (PREssure STaggering Option). Proudění bylo modelováno jako pseudo-transientní.

Tyto parametry vychází z dřívějšího výzkumu Katedry mechaniky [1], kde byl stejný model použit pro řešení celé klapky za podobných podmínek a výsledky byly úspěšně experimentálně validovány. Podrobný popis uvedených parametrů výpočtového modelu lze nalézt v manuálu [7].

Na vstupu byla předepsána rychlost v^{in} určená vztahem (22) ze zvoleného Re a teplota $T^{\text{in}} = 300$ K. Na výstupu byl předepsán atmosférický tlak. Na stěně trubky byla předepsána tzv. no-slip condition, tj. $v_i = 0\ \forall i = 1, 2, 3$.

3.3 Nalezení vhodných parametrů výpočetní sítě

Pro výpočty bylo nutné napřed vytvořit vhodnou výpočetní síť. Příliš velké buňky způsobují velkou chybu numerického řešení, naopak jemná síť zvyšuje výpočetní náročnost a příliš jemná síť též může způsobovat akumulaci chyb, která může vést k nestabilitě numerického řešení.

Protože nebyla pro většinu rozsahu řešených geometrických parametrů kónických redukcí k dispozici experimentální data, se kterými by výsledky simulací bylo možné porovnat, byla vhodná síť vybírána na základě ustálení výsledků. Pro jistý rozsah velikosti buněk výpočetní sítě by výsledky numerické simulace měly být nezávislé na síti. Proto je možné považovat výsledky numerické simulace za dostačující, pokud jsou při použití různých sítí téměř stejné.

Pro určení vhodné velikosti buněk sítě byly provedeny simulace na sítích o různé charakteristické velikosti buňky a. Sítě byly vytvořeny v programu ANSYS Meshing. Byly sledovány hodnoty tlaku na vstupu $p_{\text{st}}^{\text{in}}$ a rozdílu dynamického tlaku mezi výstupem a vstupem $\Delta p_{\text{dyn}} = p_{\text{dyn}}^{\text{out}} - p_{\text{dyn}}^{\text{in}}$, neboť hodnoty tlaku jsou hlavním předmětem zkoumání. Ve všech případech byly hodnoty tlaku v daném řezu určeny jako průměr vážený hmotností (mass-weighted average). I dále v práci bude střední hodnotou veličin na ploše vždy myšlen průměr vážený hmotností. Simulace byly prováděny ve 3D, pro snížení výpočetní náročnosti byly zkráceny vstupní a výstupní trubka. Všechny sítě byly stejně zahuštěny u stěn.

Simulace byly provedeny pro Re $= 50\,000,\ 200\,000$ a $500\,000$ na geometrii s $d = 120$ mm a $\alpha = 30°$. Stejné geometrické parametry má redukce před zpětnou klapkou vyobrazenou na obr. 1. V tab. 1 jsou uvedeny výsledky pro Re $= 500\,000$. Pro nižší

Re se hodnoty ustalovaly rychleji a rozdíly mezi jednotlivými sítěmi jsou menší.

Tab. 1: Hodnoty statického tlaku na vstupu $p_{\mathrm{st}}^{\mathrm{in}}$ a rozdílu dynamického tlaku mezi výstupem a vstupem Δp_{dyn} pro různé charakteristické rozměry buňky výpočetní sítě a při Re ≈ 500 000

a [mm]	počet buněk	$p_{\mathrm{st}}^{\mathrm{in}}$ [Pa]	Δp_{dyn} [Pa]	odchylka $p_{\mathrm{st}}^{\mathrm{in}}$ [%]	odchylka Δp_{dyn} [%]
10	275 243	3023,93	2532,27	6,759	4,331
8	447 032	2966,49	2517,08	4,731	3,705
6	810 380	2915,28	2480,61	2,924	2,203
5	1 199 291	2893,09	2465,45	2,140	1,578
4	1 944 270	2873,30	2451,42	1,442	1,000
3	3 629 734	2852,53	2437,84	0,709	0,440
2	8 936 038	2832,46	2427,15	0	0

Na základě výsledků těchto simulací byl vybrán charakteristický rozměr sítě $a = 4$ mm, tedy největší charakteristický rozměr, pro který je odchylka statického i dynamického tlaku oproti nejjemnější zkoumané síti menší než 2% i pro největší zkoumané Reynoldsovo číslo.

Dalším krokem bylo určení vhodného zahuštění buněk v mezní vrstvě. Je vhodné, když se velikost buněk v mezní vrstvě od stěny zvětšuje rovnoměrně a přechod mezi zahuštěním v mezní vrstvě a buňkami v jádru proudu je hladký. Zvětšují-li se buňky v mezní vrstvě geometrickou posloupností s kvocientem q a tloušťka první vrstvy buněk u stěny je a_1, pak tloušťka k-té vrstvy buněk je $a_k = a_1 q^{k-1}$. Z toho vyplývá, že má-li $(n+1)$-ní vrstva buněk (která již není součástí zahuštění) mít tloušťku a při tloušťce první vrstvy buněk a_1, pak počet buněk po tloušťce mezní vrstvy musí být

$$n = \left\lceil \log_q \frac{a}{a_1} \right\rceil = \left\lceil \frac{\log \frac{a}{a_1}}{\log q} \right\rceil , \tag{34}$$

kde $\lceil ... \rceil$ značí zakrouhlení nahoru na celé číslo. Velikost poslední buňky je (dle výběru na základě předchozích výpočtů) $a = 4$ mm. Pro kvocient byla použita výchozí hodnota programu ANSYS Meshing, tedy $q = 1{,}2$. Dále byly vybírány různé tloušťky první vrstvy buněk a_1 a na základě vzorce (34) byl určen odpovídající počet vrstev buněk n pro každou volbu a_1. Výsledky simulací provedených na výpočetních sítích s těmito parametry jsou uvedeny v tab. 2.

Tab. 2: Hodnoty statického tlaku na vstupu $p_{\mathrm{st}}^{\mathrm{in}}$, maximální hodnoty y_{max}^{+} a průměrné hodnoty y_{avg}^{+} na stěně pro různé tloušťky první vrstvy buněk a_1 v mezní vrstvě při $\mathrm{Re} \approx 500\,000$.

a_1 [mm]	n	$p_{\mathrm{st}}^{\mathrm{in}}$ [Pa]	y_{max}^{+}	y_{avg}^{+}	odchylka $p_{\mathrm{st}}^{\mathrm{in}}$ [%]
4	0	2872,02	381,07	283,05	−8,63
2	4	2848,23	232,18	232,19	−9,39
1	8	2832,69	133,48	77,79	−9,88
0,5	12	2828,63	76,67	38,70	−10,02
0,2	17	2835,21	38,35	15,40	−9,81
0,1	21	2878,08	19,70	8,20	−8,44
0,05	24	3018,72	10,59	4,56	−3,97
0,02	29	3117,34	4,84	1,93	−0,83
0,01	33	3143,51	5,25	0,96	0
0,005	37	numerické řešení diverguje			

Kromě ustálení $\Delta p_{\mathrm{st}}^{\mathrm{in}}$ byla sledována též hodnota veličiny y^+ u stěny. Ta má dle údajů uvedených v [6] ve vazké podvrstvě mezní vrstvy dosahovat $y^+ \leq 11{,}6$. Jiné zdroje, jako např. [2], uvádí hodnotu $y^+ < 5$. Adekvátní modelování vazké podvrstvy je důležité pro správnost výpočtů. Na základě těchto údajů a dat získaných z výpočtů bylo vybráno zahuštění výpočtetní sítě s tloušťkou první vrstvy buněk $a_1 = 0{,}05$ mm. Pro tuto síť je maximum $y_{\mathrm{max}}^{+} = 10{,}59 \leq 11{,}6$ a průměr vážený plochou je $y_{\mathrm{avg}}^{+} = 4{,}56 \leq 5$, což vyhovuje uvedeným teoretickým hodnotám.

Simulace prováděné na takto jemné 3D síti jsou značně náročné na výpočetní čas, proto je vhodné provést geometrické zjednodušení založené na osové symetričnosti úlohy. Proto byly výsledky simulací provedených na celé trubce porovnány s výsledky na polovině trubky a čtvrtině trubky s okrajovou podmínkou symetrie proudění na plochách řezu. Dále byla provedena simulace využívající model osově symetrického proudění implementovaný v programu ANSYS Fluent, který pracuje s rovinnou 2D sítí.

Pro jednotlivé varianty byly porovnány hodnoty statického tlaku na vstupu $p_{\mathrm{st}}^{\mathrm{in}}$ a rozdílu dynamického tlaku mezi výstupem a vstupem Δp_{dyn} a byl též změřen čas potřebný k provedení simulace (na zařízení HP ProBook 450 G9 při paralelizaci výpočtů na 4 jádra). Výsledky jsou zaznamenány v tab. 3.

Tab. 3: Hodnoty statického tlaku na vstupu $p_{\mathrm{st}}^{\mathrm{in}}$ a rozdílu dynamického tlaku mezi výstupem a vstupem Δp_{dyn} pro jednotlivé varianty geometrie při Re $\approx$ 500 000.

varianta	$p_{\mathrm{st}}^{\mathrm{in}}$ [Pa]	Δp_{dyn} [Pa]	odchylka $p_{\mathrm{st}}^{\mathrm{in}}$ [%]	odchylka Δp_{dyn} [%]	čas provedení simulace [min]
celá	3018,72	2470,36	0	0	49
polovina	3016,83	2470,67	−0,063	0,013	24
čtvrtina	3016,79	2470,93	−0,064	0,023	13
osová sym.	3053,50	2468,65	1,152	−0,069	1

Jak je možné vidět v tab. 3, i při řešení úlohy jako osově symetrického 2D proudění se hodnoty $p_{\mathrm{st}}^{\mathrm{in}}$ a Δp_{dyn} dobře shodují s výsledky simluace na celé 3D trubce, a to při výrazně menší výpočetní náročnosti. Proto byl model osově symetrického proudění použit i pro finální výpočty.

3.4 Určení vhodné délky trubek

Při určování tlakových ztrát je uvažován rozběhnutý rychlostní profil ve vstupní trubce. Ten je však obtížné zadávat jako okrajovou podmínku pro jednotlivé varianty, proto je výhodnější zadat jako vstupní okrajovou podmínku konstantní rychlostní profil a místo toho simulovat proudění s dostatečně dlouhou vstupní trubkou, kde se rychlostní profil rozběhne. Stejně tak je nutné, aby byla výstupní trubka dostatečně dlouhá pro ustálení rychlostního profilu.

Pro určení dostatečné délky trubek byly provedeny simulace v rovných trubkách, kde bylo sledováno ustalování rozběhnutého rychlostního profilu. Pro porovnání dvou rychlostních profilů byla použita odchylka vycházející z metriky indukované standardní L_2-normou určená vztahem

$$\delta(v_1(y), v_2(y)) = \frac{\|v_2(y) - v_1(y)\|}{v_{\mathrm{ref}}\sqrt{\frac{D}{2}}} = \frac{\sqrt{\int_0^{\frac{D}{2}} (v_2(y) - v_1(y))^2 \mathrm{d}y}}{v_{\mathrm{ref}}\sqrt{\frac{D}{2}}}. \tag{35}$$

Tato odchylka byla počítána z lineární interpolace diskrétních hodnot v_i v buňkách sítě procházejících daným řezem. K tomuto účelu byl vytvořen kód v jazyce Python. Referenční rychlost v_{ref} byla rovna konstantní rychlosti na vstupu.

Simulace byly provedeny v trubkách o délce L = 10 m a s mezními hodnotami průměru d a Reynoldsova čísla Re ze zkoumaného rozsahu, tj. d_{min} = 80 mm, d_{max} = 150 mm, $\mathrm{Re}_{\mathrm{min}}$ = 50 000, $\mathrm{Re}_{\mathrm{max}}$ = 500 000. Pro každou simulaci byly porovnávány rychlostní profily v řezech vzdálených od vstupu o $x = 0, 1, 2, \ldots, 10$ m. Délka, po které se dva po sobě jdoucí rychlostní profily liší o méně než 2 % dle (35), je označena $l_{2\%}$, a pro jednotlivé parametry je uvedena v tab. 4.

Tab. 4: Délka $l_{2\%}$, po které dojde k ustálení rychlostního profilu v rovné hladké trubce s odchylkou do 2 % pro různé parametry úlohy.

Parametry	$l_{2\%}$ [m]
$d = 150$ mm, Re $= 50\,000$	4
$d = 80$ mm, Re $= 50\,000$	4
$d = 150$ mm, Re $= 500\,000$	5
$d = 80$ mm, Re $= 500\,000$	5

Protože rychlost ve výstupní trubce je kvůli menšímu průměru větší, je v ní i Reynoldsovo číslo větší než na vstupu. Dle předchozích simulací se s rostoucím Re rozběhová délka mírně zvětšuje, a proto velká Reynoldsova čísla ve výstupní trubce mohou vyžadovat větší rozběhovou délku, než odpovídá zde provedeným simulacím. Největší rozběhová délka ze všech zde simulovaných variant je $l_{2\%} = 5$ m, a proto byla s rezervou zvolena délka trubek $l = 7$ m.

3.5 Výsledné parametry simulací

Na základě výsledků simulací uvedených v podkapitolách 3.3-3.4 byly určeny potřebné parametry geometrie výpočtové oblasti a výpočetních sítí použitých pro numerické simulace turbulentního proudění stlačitelné tekutiny v kónických redukcích, mající za cíl vyhodnotit tlakovou ztrátu a stanovit místní ztrátový součinitel.

Proudění je simulováno jako osově symetrické. Vstupní i výstupní trubka mají délku $l = 7$ m. Simulace jsou prováděny na nestrukturované čtyřúhelníkové síti o charakteristickém rozměru buněk v jádru proudu $a = 4$ mm. U stěn jsou buňky zahuštěné pro správnou simulaci mezní vrstvy, přičemž jejich velikost roste od $a_1 = 0{,}05$ mm s kvocientem $q = 1{,}2$ až k 24. vrstvě, která se hladce napojuje na buňky v jádru proudu.

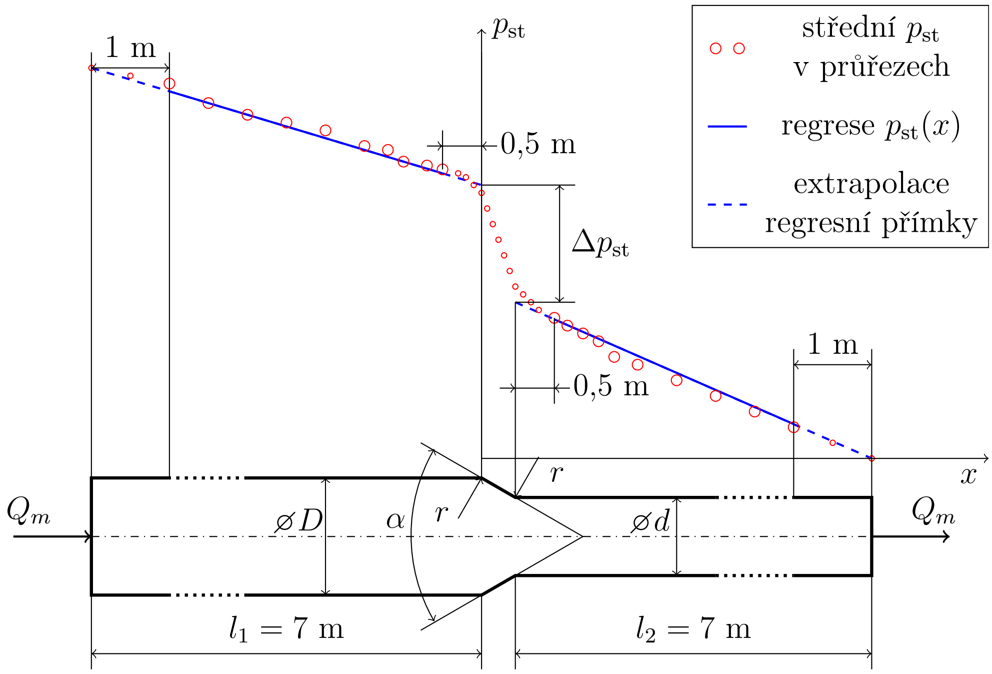
Jedna simulace na této finální síti trvá přibližně 6 minut. Tato doba trvání je delší oproti výsledkům testů uvedeným v tab. 3, protože vlivem delší vstupní a výstupní trubky výsledné sítě obsahují výrazně více buněk.

Na každé síti byly provedeny výpočty pro různá Reynoldsova čísla (viz podkapitola 3.1). Protože je uvažována vazká stlačitelná tekutina, může se uvnitř výpočtové oblasti s rychlostí měnit i hustota vlivem změny tlakové ztráty. Proto byla iteračně nastavována rychlost na vstupu tak, aby vstupní Reynoldsovo číslo odpovídalo požadované hodnotě s chybou do 0,1 %.

Ve vybraných řezech byly jako výsledky provedených numerických simulací zaznamenávány průměry vážené hmotností z p_{st}, p_{dyn}, ρ a dalších veličin.

4 Výsledky simulace

4.1 Určení ztrátových součinitelů z výsledků simulací



Obr. 6: Schématické zobrazení určení rozdílu statického tlaku v redukci

Pro určení ztrátového součinitele ζ pro danou geometrii a dané Reynoldsovo číslo je nutné znát změnu statického a dynamického tlaku v místě redukce. Protože se však v řezech na začátku a na konci redukce výrazně projevuje vliv redukce, použít přímo hodnoty p_{st} a p_{dyn} z těchto řezů by vedlo na velmi nepřesné výsledky.

Místo toho je pro statický tlak použita extrapolace z lineární regrese průměrů p_{st} z vybraných řezů vstupní a výstupní trubky, jak je naznačeno na obr. 6. V rovné hladké trubce je dle teorie tlaková ztráta konstantní (viz podkapitola 2.5) a p_{st} tedy klesá lineárně, s čímž se výsledky simluací dobře shodují. Lineární regresí tedy ze středních statických tlaků ve vybraných průřezech (červené body na obr. 6) vznikne přímka aproximující průběh tlaku po délce trubky (modrá plná čára na obr. 6) a tu lze protáhnout až k začátku, resp. konci redukce (modrá čárkovaná čára). Změna statického tlaku je pak rozdíl těchto extrapolovaných hodnot, tj.

$$\Delta p_{\mathrm{st}} = p_{\mathrm{st1}} - p_{\mathrm{st2}}. \tag{36}$$

Regrese byla prováděna z řezů v oblasti začínající 0,5 m od redukce a končící 1 m od vstupu, resp. výstupu (zvětšené červené body na obr. 6). Nebyly použity hodnoty přímo ze vstupu a výstupu, protože výsledky simulace na okrajích výpočtové oblasti mohou být deformovány okrajovými podmínkami. Podobně nebyly použity hodnoty z řezů v těsné blízkosti redukce, protože i tam je rozložení tlaku deformované.

Dynamický tlak $p_{\mathrm{dyn}} = \frac{1}{2}\rho v^2$ je v rovných trubkách téměř konstantní, ale vlivem změny hustoty ρ a rychlosti v se mírně mění, přičemž ve většině provedených simulací se v se mění výrazněji než ρ. Velikost této změny má významný vliv na výsledný ztrátový součinitel, a tak nelze tímto postupem získat s dobrou přesností jednu konstantní hodnotu p_{dyn} a je nutné jej počítat jinak.

K tomu byl využit fakt, že rychlost lze počítat na základě známého hmotnostního průtoku a hustoty jako

$$v = \frac{Q_m}{\rho S}. \tag{37}$$

Hmotnostní průtok Q_m je dle rovnice kontinuity konstantní po délce trubky a jeho numerická aproximace získaná metodou konečných objemů je velmi přesná. Hustota se mění v závislosti na teplotě T a (absolutním) statickém tlaku p_{st} dle stavové rovnice (4). Obě tyto veličiny se v rovné trubce mění výrazně méně než rychlost určovaná průměrováním z jednotlivých průřezů, díky čemuž je změna ρ téměř o řád menší než změna v. Díky tomu aproximace rychlosti v trubce je dle (37) poměrně dobrá a téměř nezávislá na místním kolísání stavových veličin. Jako hustota ρ byl použit průměr hodnot z průřezů ze stejné oblasti, ze které byl regresí určen průběh p_{st}.

Z takto získané rychlosti lze pak určit dynamický tlak dosazením do definičního vztahu $p_{\mathrm{dyn}} = \frac{1}{2}\rho v^2$. Rozdíl těchto dynamických tlaků

$$\Delta p_{\mathrm{dyn}} = p_{\mathrm{dyn1}} - p_{\mathrm{dyn2}} \tag{38}$$

lze pak použít společně s Δp_{st} k určení ztrátového součinitele ζ. Pro ten vyjádřením z rovnic (26) a (30) platí

$$\zeta = \frac{p_{\mathrm{z}}}{p_{\mathrm{dyn1}}} = \frac{\Delta p_{\mathrm{st}} + \Delta p_{\mathrm{dyn}}}{p_{\mathrm{dyn1}}}. \tag{39}$$

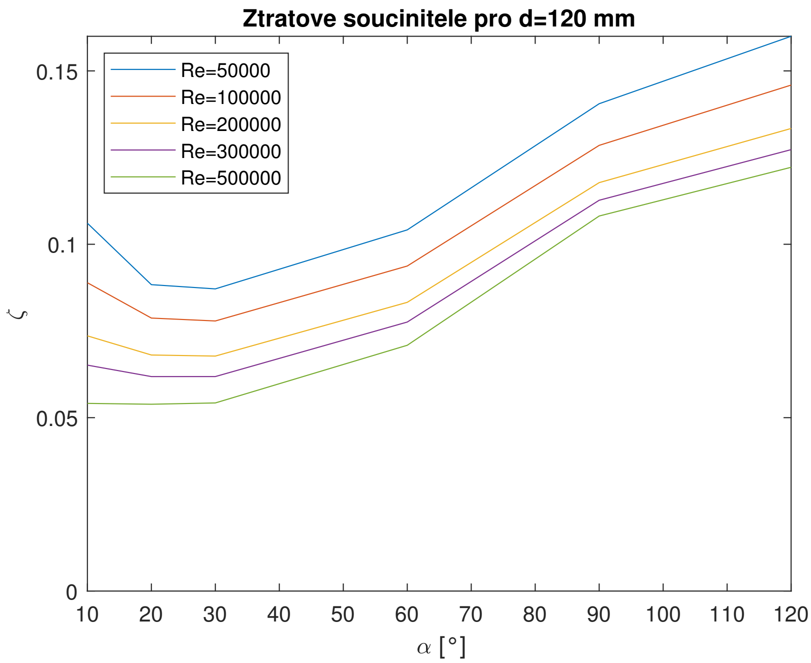
Výše uvedený postup určení ztrátových součinitelů jako tlaky $p_{\mathrm{st1,2}}$ a $p_{\mathrm{dyn1,2}}$ používá (extrapolované) hodnoty v řezech na začátku a na konci redukce. Naproti tomu norma ČSN EN 60534-2-3 [8] uvádí jinou definici ztrátového součinitele, kdy tlaky p_{st1} a p_{dyn1} jsou vzaté z řezu vzdáleného $2D$ před začátkem redukce a p_{st2} a p_{dyn2} jsou z řezu vzdáleném $6d$ za koncem redukce, kde D a d jsou průměry trubek před a za redukcí. Jinak je ztrátový součinitel počítán analogicky, tj. dle vztahu (39). Tyto ztrátové součinitele dle ČSN EN 60534-2-3 byly pro jednotlivé varianty určeny také, přičemž metoda výpočtu byla stejná až na polohu řezů, ve kterých byly z regresních přímek určovány tlaky p_{st1} a p_{st2}.

4.2 Grafické znázornění získaných ztrátových součinitelů

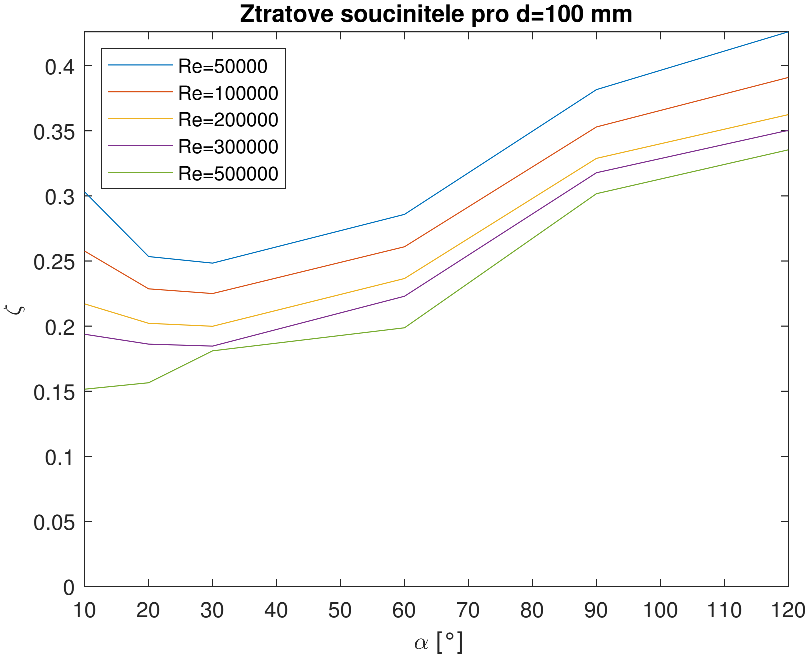
Součinitele místní ztráty byly postupem popsaným v podkapitole 4.1 určeny pro všechny řešené varianty s výjimkou variant s d = 80 mm a Re = 500 000, pro které se ani při délce výstupní trubky $l_2 = 7$ m neustálil rychlostní profil, což vedlo ke zkreslení tlakového pole a zavádějícím výsledným hodnotám ζ. Pravděpodobnou příčinou je výrazně větší rychlost tekutiny ve výstupní trubce (a tedy i větší Reynoldsovo a Machovo číslo), než pro kterou byl výpočtový model testován.

V grafech též není vykreslen součinitel ζ pro náhlé zúžení, protože byl určován pro geometrii bez zaoblení, a proto jej nelze přesně srovnávat s hodnotami ζ pro jiné úhly, kde zaoblení bylo.

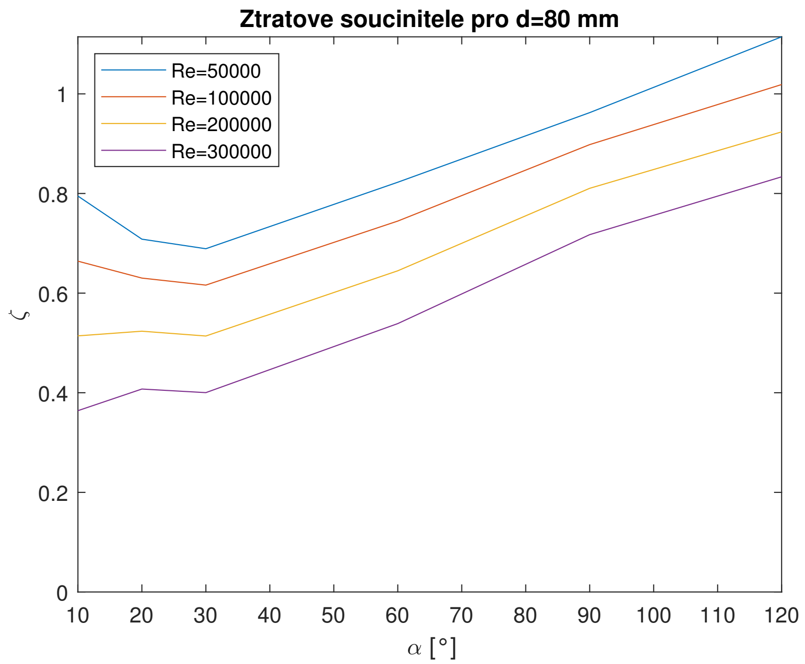
Přesné číselné hodnoty výsledných ztrátových součinitelů lze nalézt v tabulkách v příloze A.



Obr. 7: Průběh ztrátového součinitele ζ v závislosti na vrcholovém úhlu kónické redukce α při průměru výstupní trubky d = 120 mm pro různá Reynoldsova čísla Re



Obr. 8: Průběh ztrátového součinitele ζ v závislosti na vrcholovém úhlu kónické redukce α při průměru výstupní trubky $d = 100$ mm pro různá Reynoldsova čísla Re



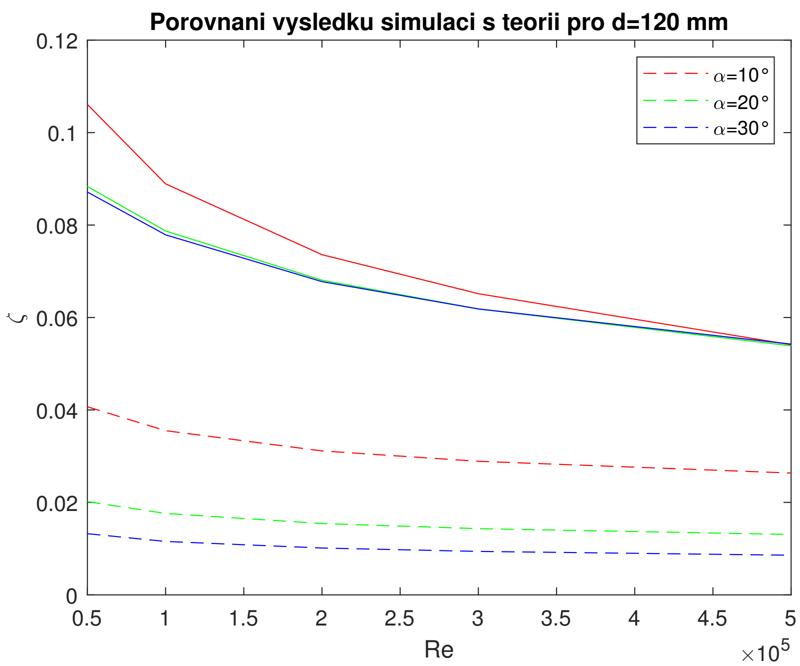
Obr. 9: Průběh ztrátového součinitele ζ v závislosti na vrcholovém úhlu kónické redukce α při průměru výstupní trubky $d = 80$ mm pro různá Reynoldsova čísla Re

5 Analýza výsledků simulací

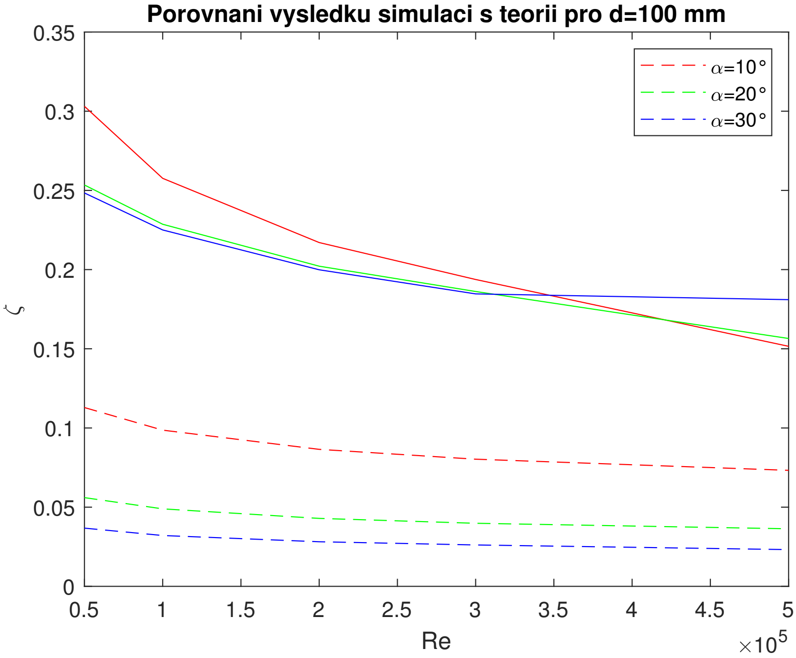
5.1 Porovnání závislosti vypočítaných ztrátových součinitelů na parametrech úlohy s literaturou

Pro kontrolu výsledků numerických simulací lze použít shodu s teoretickými či experimentálně určenými hodnotami pro ty varianty, pro které jsou k dispozici. Konkrétně pro malé vrcholové úhly α je teoreticky odvozen vztah (31) a pro náhlé zúžení ($\alpha = 180°$) uvádí [2] experimentálně určené hodnoty, znázorněné na obr. 4 v podkapitole 2.5. Porovnání výsledků simulací s těmito daty z literatury je znázorněno na obr. 10-13. Pro náhlé zúžení jsou jako referenční hodnoty použity součinitele ζ_2 odečtené z obr. 4, nikoli aproximace dle vztahu (32). Jsou přepočítány na součinitele $\zeta \equiv \zeta_1$ vztažené k dynamickému tlaku p_{dyn1} ve vstupní trubce, aby je bylo možné porovnávat se součiniteli získanými simulací, které jsou taktéž vztažené k p_{dyn1}.

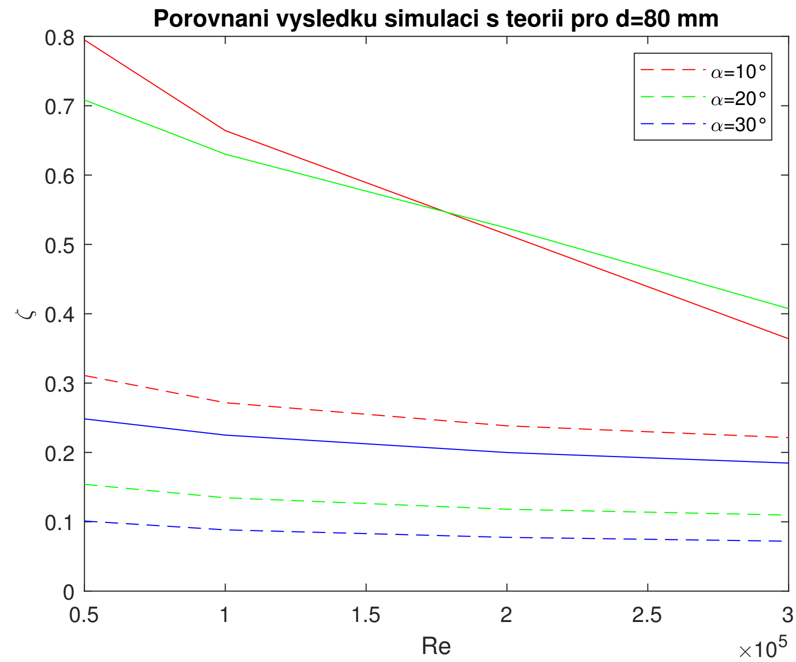
Lze vidět, že shoda hodnot ztrátových součinitelů s teoretickými výsledky je poměrně špatná. Trendy závislosti na parametrech úlohy (d, α, Re) se však shodují – ztrátový součinitel ζ klesá s rostoucím Re a roste s klesajícím d. S rostoucím α součinitel mírně klesá, pak výrazně roste. Průběh se od uvedených trendů odchyluje při vysokých hodnotách Re a malých d, kde má ζ monotónní rostoucí charakter. Na obr. 11 a 12 se to projevuje překřížením křivek průběhů ζ pro jednotlivé úhly.



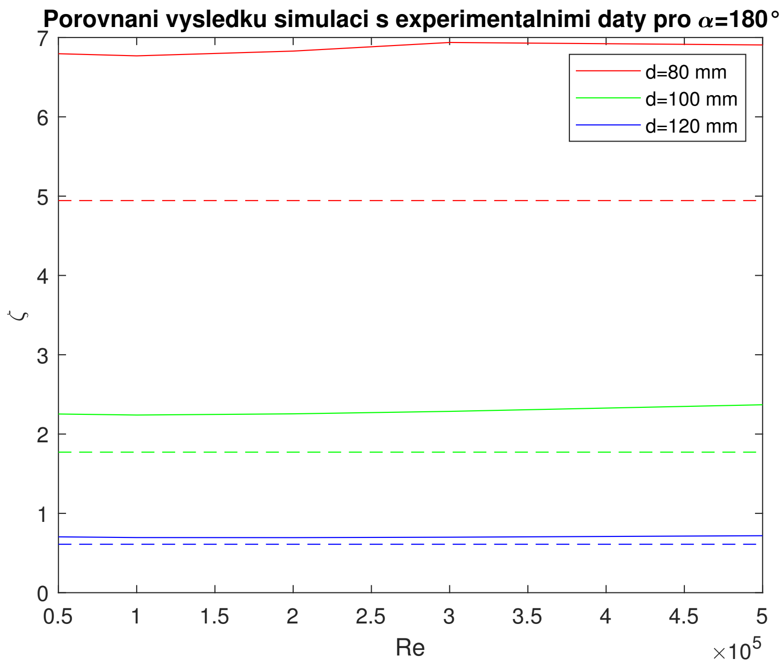
Obr. 10: Porovnání závislosti ztrátového součinitele ζ na Reynoldsově čísle Re pro průměr výstupní trubky d = 120 mm ve výsledcích simulací (plnou čarou) a dle teoretického vztahu pro malé úhly (čárkovaně)



Obr. 11: Porovnání závislosti ztrátového součinitele ζ na Reynoldsově čísle Re pro průměr výstupní trubky d = 100 mm ve výsledcích simulací (plnou čarou) a dle teoretického vztahu pro malé úhly (čárkovaně)



Obr. 12: Porovnání závislosti ztrátového součinitele ζ na Reynoldsově čísle Re pro průměr výstupní trubky d = 80 mm ve výsledcích simulací (plnou čarou) a dle teoretického vztahu pro malé úhly (čárkovaně)



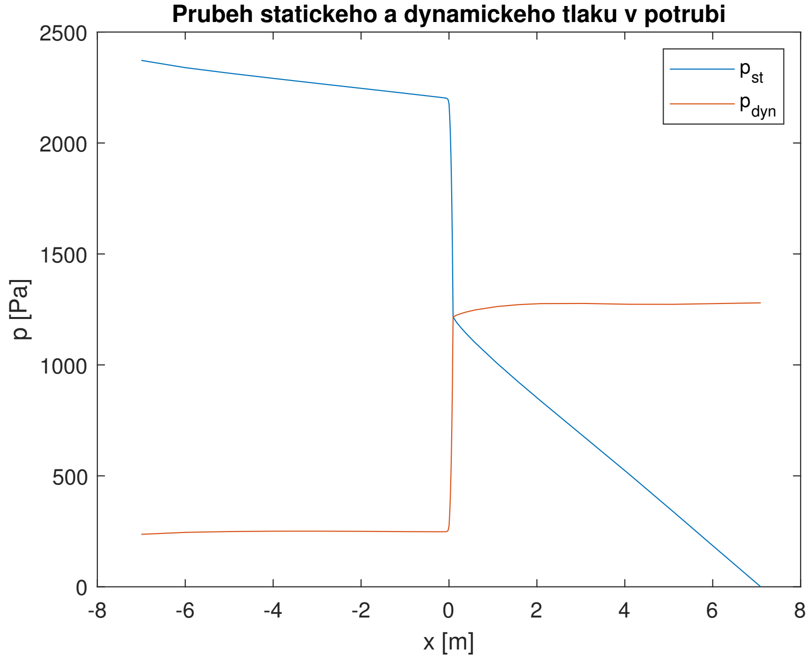
Obr. 13: Porovnání závislosti ztrátového součinitele ζ na Reynoldsově čísle Re pro náhlé zúžení ve výsledcích simulací (plnou čarou) a experimentálních výsledků převzatých z [2] (čárkovaně)

Součinitele ζ získané vyhodnocením výsledků simulací pro náhlé zúžení jsou přibližně konstantní, s rostoucím Re součinitel jen nepatrně roste. Hodnoty ζ jsou opět větší než odpovídající experimentálně určené hodnoty, avšak shoda je výrazně lepší než u malých úhlů (odchylka ztrátového součinitele od ztrátového součinitele redukce stejných parametrů určeného experimentálně je okolo 30%).

K tomu, že je relativní chyba výsledných ztrátových součinitelů takto velká, významně přispívá fakt, že součinitel ζ je velmi špatně numericky podmíněný, tj. i malá relativní chyba p_{st} a p_{dyn} způsobí velkou chybu ζ. Ztrátový tlak v redukci je totiž velmi malý v porovnání se statickým tlakem, který se přemění na dynamický. Např. pro vybranou variantu na obr. 14 (d = 100 mm, α = 30°, Re = 200 000) je pokles p_{st} v redukci roven $\Delta p_{\mathrm{stat}} \doteq 1024$ Pa, zatímco $p_{\mathrm{z}} \doteq 47$ Pa a zbytek rozdílu p_{st} se přemění na p_{dyn}.

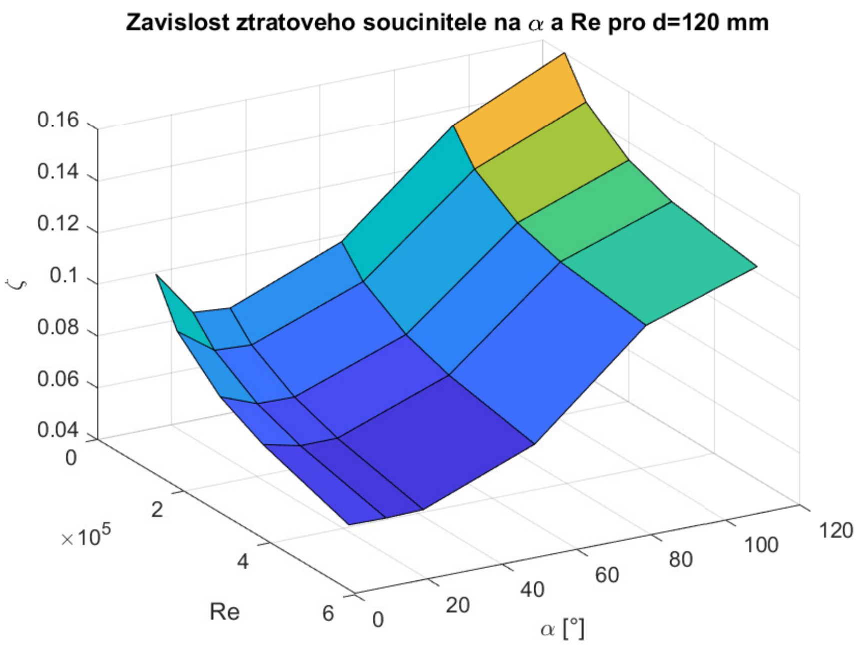
Znamená to však zároveň, že i při velké relativní chybě ζ je absolutní hodnota tlakové ztráty poměrně malá. Z obr. 14 je též vidět, že významnější podíl na výsledném ztrátovém tlaku mají třecí ztráty v potrubí (pro tuto konkrétní variantu je ve výstupní trubce tlaková ztráta přibližně 170 Pa na 1 m délky trubky). Zde určené ztrátové součinitele tak pro mnoho praktických aplikací mohou být uspokojivě přesné.

Též je na místě zdůraznit, že použitá referenční data z literatury platí pro nestlačitelnou tekutinu, a navíc použitý analytický vztah pro ζ při malých vrcholových úhlech je odvozen za poměrně silných předpokladů, které zde nemusí být splněny.

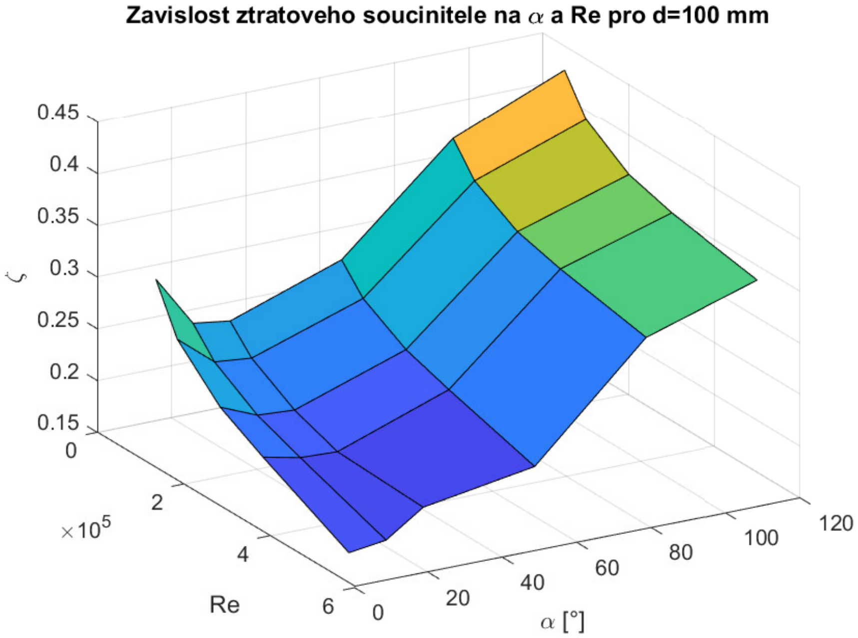


Obr. 14: Průběh středního statického a dynamického tlaku v trubce pro $d = 100$ mm, $\alpha = 30°$, $\mathrm{Re} = 200\,000$

Závislost ζ na α a Re lze vidět na obr. 15-17, kde je pro jednotlivé hodnoty d vykreslena jako graf funkce dvou proměnných.



Obr. 15: Graf závislosti ztrátového součinitele ζ na vrcholovém úhlu α a Reynoldsově čísle Re pro průměr výstupní trubky $d = 120$ mm



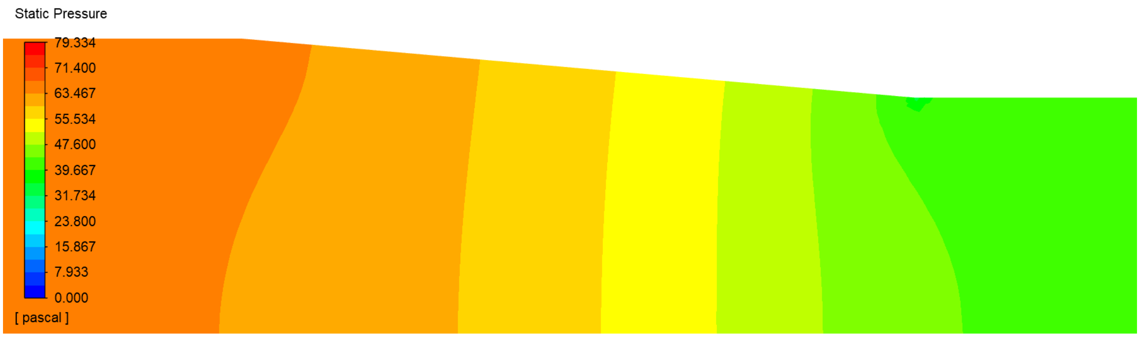
Obr. 16: Graf závislosti ztrátového součinitele ζ na vrcholovém úhlu α a Reynoldsově čísle Re pro průměr výstupní trubky $d = 100$ mm

Obr. 17: Graf závislosti ztrátového součinitele ζ na vrcholovém úhlu α a Reynoldsově čísle Re pro průměr výstupní trubky $d = 80$ mm

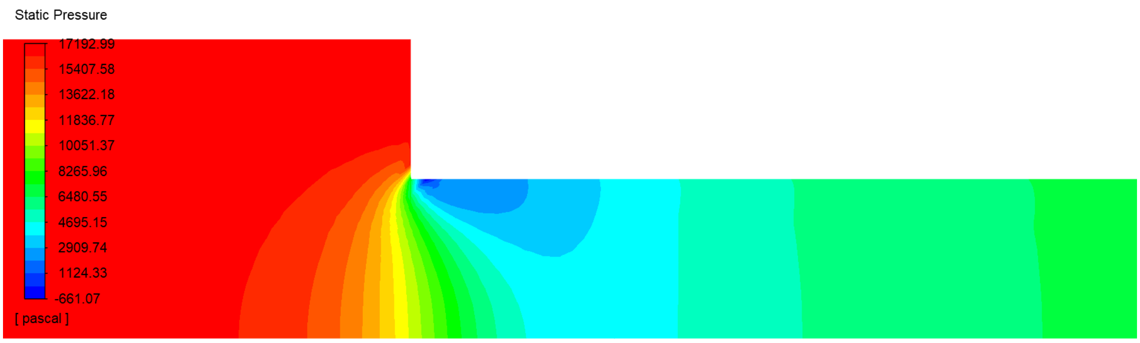
5.2 Porovnání rozložení vybraných veličin v okolí redukce pro různé parametry úlohy

V této podkapitole bude porovnáno rozložení tlaku, rychlosti a Machova čísla v okolí redukce pro dvě krajní varianty parametrů simulace z řešeného rozsahu. Konkrétně se jedná o variantu s $d = 120$ mm, $\alpha = 10°$ a $\mathrm{Re} = 50\,000$, kde rychlost proudění ve výstupní trubce dosahuje nejmenších hodnot, a variantu s $d = 80$ mm, $\alpha = 180°$ a $\mathrm{Re} = 300\,000$, kde je rychlost ve výstupní trubce největší.

Tlakové pole v těsném okolí redukce, které lze vidět na obr. 18 a 19, vždy vykazuje nerovnoměrnost po průřezu, v kontrastu s přímkovým profilem tlaku v trubkách dále od redukce. Pro variantu na obr. 19 tlak velmi výrazně klesá u stěny v oblasti těsně za redukcí, a to dokonce pod úroveň atmosférického tlaku, který je předepsán jako okrajová podmínka na výstupu.

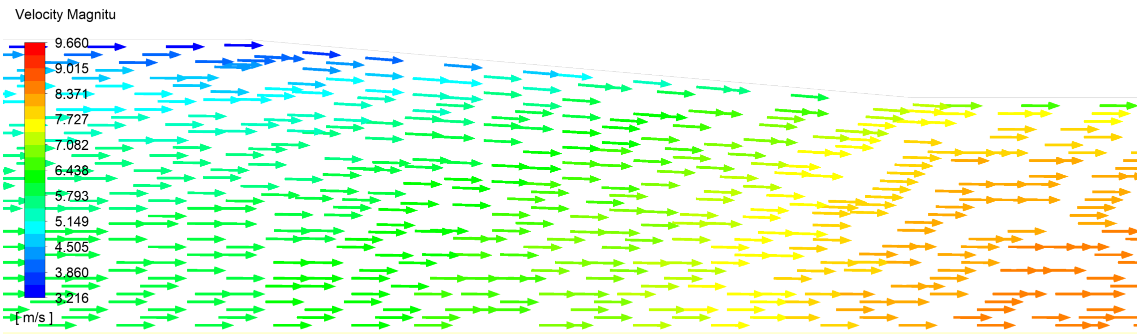


Obr. 18: Tlakové pole v okolí redukce pro $d = 120$ mm, $\alpha = 10°$ a $\mathrm{Re} = 50\,000$

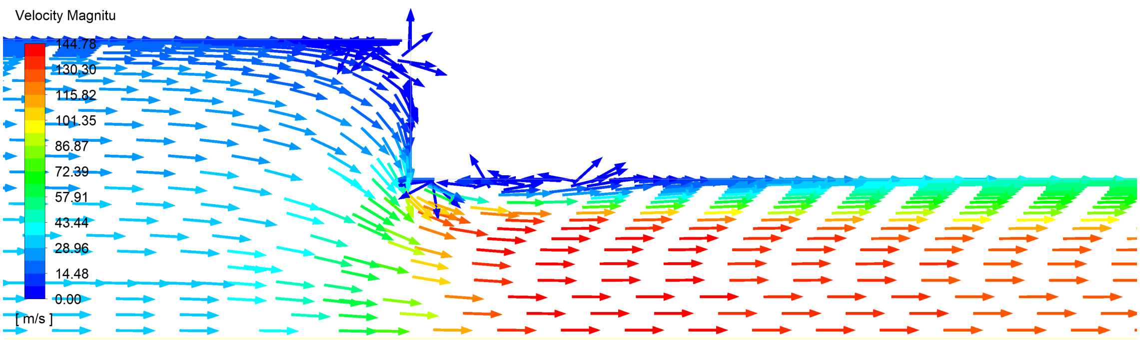


Obr. 19: Tlakové pole v okolí redukce pro $d = 80$ mm, $\alpha = 180°$ a $\mathrm{Re} = 300\,000$

Na obr. 20 a 21 je znázorněno vektorové pole rychlosti v okolí redukce pro obě porovnávané varianty. Pro lepší přehlednost mají všechny vektory stejnou délku a velikost rychlosti je znázorněna pouze pomocí barevné škály. Vektory rychlosti na obr. 20 ubíhají všechny téměř stejným směrem, což naznačuje plynulý přechod mezi pomalejším a rychlejším prouděním. Naproti tomu rychlostní pole na obr. 21 obsahuje velký vír v oblasti těsně za redukcí, kde dochází ke zpětnému proudění. Právě v této oblasti dochází též k poklesu tlaku (viz obr. 19). Menší vír se nachází též u stěny těsně před redukcí.



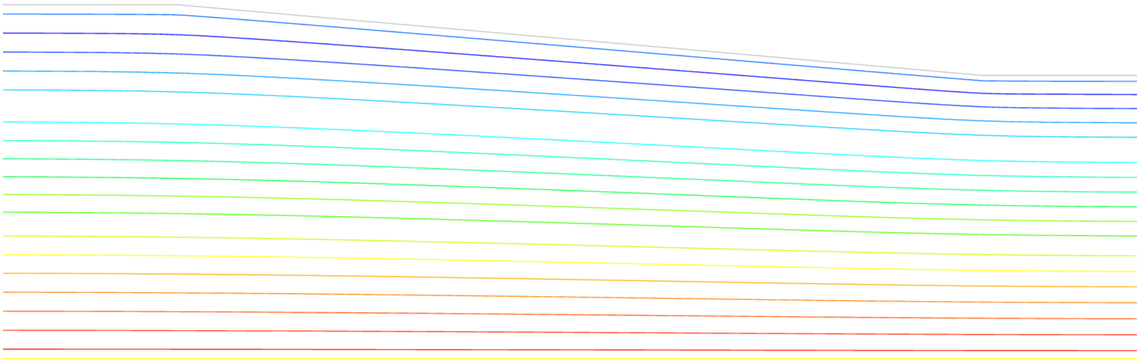
Obr. 20: Vektorové pole rychlosti v okolí redukce pro d = 120 mm, $\alpha = 10°$ a Re = 50 000



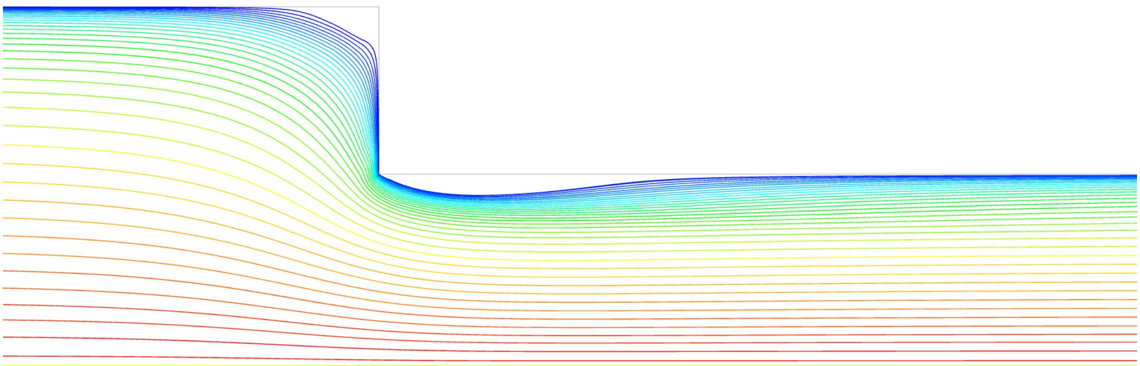
Obr. 21: Vektorové pole rychlosti v okolí redukce pro d = 80 mm, $\alpha = 180°$ a Re = 300 000

Rozdíl v pohybu tekutiny v obou variantách dobře ilustrují též trajektorie nehmotných částic v proudu, vykreslené na obr. 22 a 23. Trajektorie na obr. 22 hladce kopírují pozvolné zúžení stěn, a to i v mezní vrstvě v bezprostřední blízkosti stěny. Naproti tomu trajektorie na obr. 23 se v oblasti těsně za redukcí výrazně odtrhávají od stěny. Tekutina v této oblasti tak protéká výrazně menším průřezem, než je průřez výstupní trubky. Tato kontrakce se vyskytuje též u výtoků z nádob, viz např. [2].

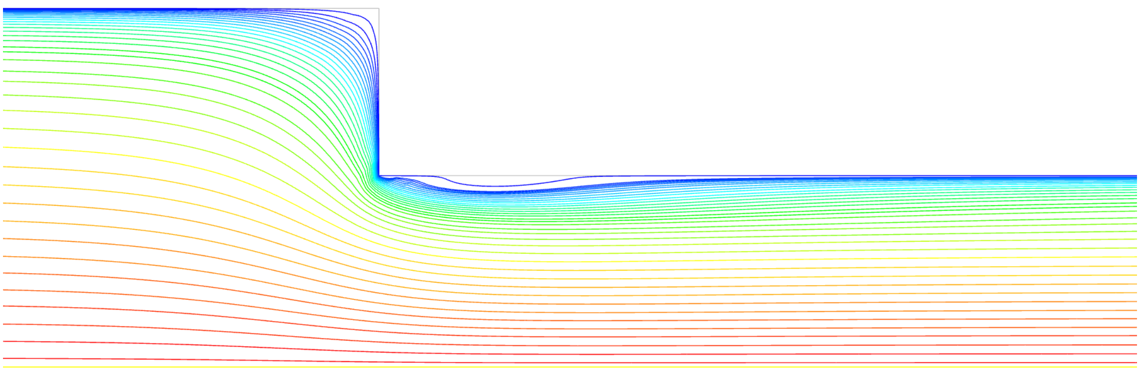
Podobné, ale méně výrazné odtržení lze vidět i na obr. 24, kde jsou vykresleny trajektorie proudění ve stejné geometrické variantě, ale při menším vstupním Reynoldsově čísle.



Obr. 22: Trajektorie v okolí redukce pro $d = 120$ mm, $\alpha = 10°$ a Re = 50 000

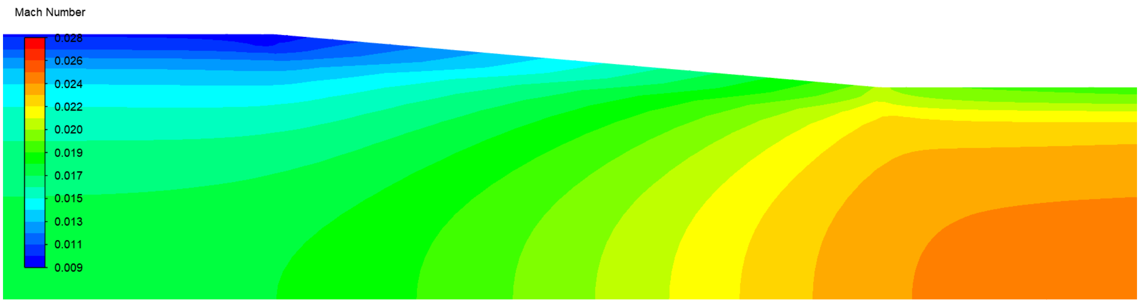


Obr. 23: Trajektorie v okolí redukce pro $d = 80$ mm, $\alpha = 180°$ a Re = 300 000

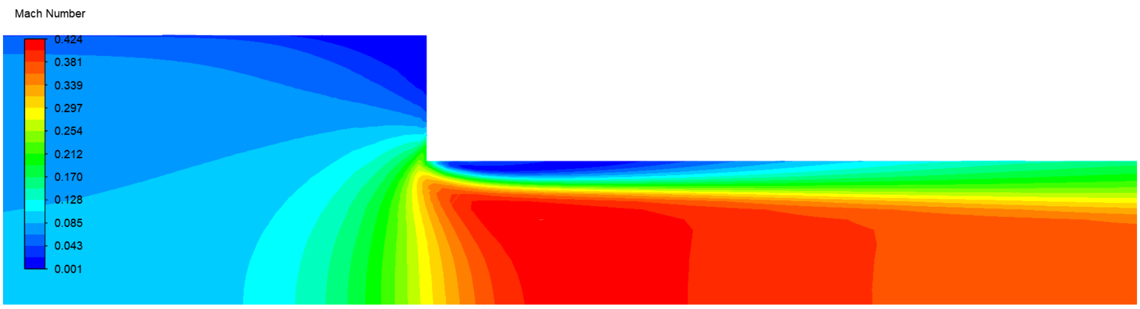


Obr. 24: Trajektorie v okolí redukce pro $d = 80$ mm, $\alpha = 180°$ a Re = 50 000

Na obr. 25 a 26 je vykresleno rozložení Machova čísla v okolí redukce pro obě porovnávané varianty. Rozložení Machova čísla přibližně kopíruje rozložení rychlosti, avšak nejedná se o přesnou úměrnost, protože se v prostoru zároveň mění i lokální rychlost zvuku.



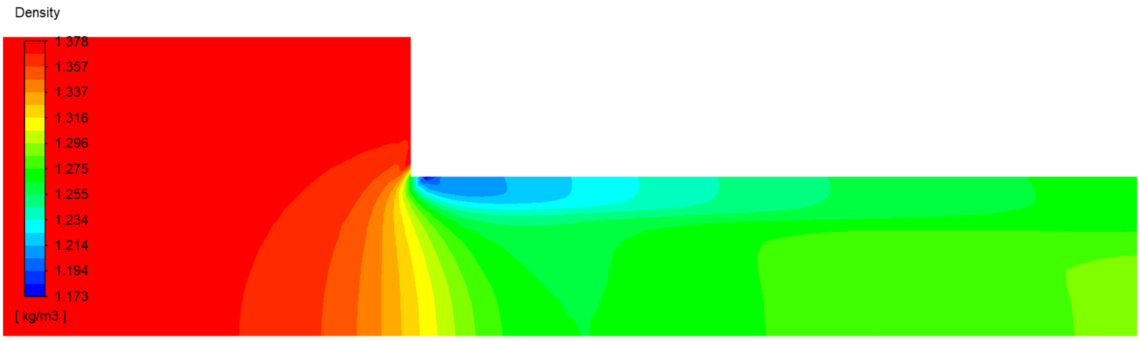
Obr. 25: Rozložení Machova čísla v okolí redukce pro d = 120 mm, $\alpha = 10°$ a Re = 50 000



Obr. 26: Rozložení Machova čísla v okolí redukce pro d = 80 mm, $\alpha = 180°$ a Re = 300 000

Jako poslední je zde vykreslené rozložení hustoty v okolí redukce pro obě porovnávané varianty, jež lze vidět na obr. 27 a 28. Varianta na obr. 27 vykazuje velmi malou změnu hustoty, která odpovídá malému Machovu číslu (viz obr. 25). U varianty na obr. 28 je změna hustoty již zřetelná, což je spojeno s větším Machovým číslem (viz obr. 26). Rozložení hustoty přibližně kopíruje rozložení statického tlaku (viz obr. 18 a 19), avšak podobně jako v případě Machova čísla a rychlosti se nejedná o přesnou shodu, neboť hustota dle stavové rovnice (4) závisí též na teplotě.

Obr. 27: Rozložení hustoty v okolí redukce pro $d = 120$ mm, $\alpha = 10°$ a $\mathrm{Re} = 50\,000$



Obr. 28: Rozložení hustoty v okolí redukce pro $d = 80$ mm, $\alpha = 180°$ a $\mathrm{Re} = 300\,000$

6 Závěr

Předmětem této bakalářské práce bylo stanovení součinitelů místní ztráty kónických redukcí vybraných parametrů a analýza jejich závislosti na parametrech geometrie a rychlosti proudění.

Nejprve zde byl popsán matematický model proudění stlačitelné tekutiny a princip řešení parciálních diferenciálních rovnic popisujících proudění s využitím metody konečných objemů. Na Burgersově rovnici byly porovnány vlastnosti vybraých schémat pro aproximaci konvektivních toků s využitím vlastního kódu v Matlabu. Též byla stručně uvedena problematika tlakových ztrát v potrubí.

Následně byl definován výpočtový model konkrétní řešené úlohy. Byl popsán matematický model proudění tekutiny a metoda jeho numerického řešení v komerčním výpočtovém programu ANSYS Fluent. Vhodnou výpočetní síť, zahuštění sítě v mezní vrstvě a délku vstupní a výstupní trubky bylo nutné vybrat pro danou úlohu na základě konvergenční analýzy. Též se ukázalo, že řešení s využitím modelu osově symetrického proudění je velmi blízké výsledkům simulovaným na plné 3D geometrii, díky čemuž bylo možné výrazně urychlit výpočty.

Dále byly z výsledků určeny ztrátové součinitele metodou založenou na extrapolaci regresních přímek vážených průměrů statického tlaku ve vybraných průřezech. Kromě součinitelů definovaných na základě rozdílu tlaků na začátku a konci redukce byly též určeny součinitele definované dle normy ČSN EN 60534-2-3.

Simulacemi získané součinitele místní ztráty obecně rostou s poměrem průměrů vstupní a výstupní trubky $\frac{D}{d}$, rostou s vrcholovým úhlem redukce α a klesají se vstupním Reynoldsovým číslem Re. Ztrátové součinele náhlých zúžení jsou několikanásobně větší než ztrátové součinitele kónických zúžení při stejných hodnotách d a Re. Shoda výsledků s daty z literatury pro ty varianty, pro které jsou srovnatelná data dostupná, je značně špatná. Trendy závislosti $\zeta(\frac{D}{d}, \alpha, \mathrm{Re})$ se však s daty z literatury shodují. Navíc ztrátový tlak je pro většinu zde zkoumaných variant velmi malý v porovnání s poklesem statického tlaku v redukci vlivem přeměny na dynamický tlak i s třecími ztrátami v potrubí, a tak se případná chyba zde uváděných ztrátových součinitelů jen málo projeví na chybě celkové tlakové ztráty v potrubním systému.

Analýzou rozložení vybraných veličin v okolí redukce bylo zjistěno, že výrazně větší ztrátové součinitele náhlých zúžení korespondují s výrazným odtržením mezní vrstvy a vznikem rozsáhlé recirkulační zóny za redukcí.

Získané součinitele jsou aplikovatelné při návrhu potrubních systémů například v tepelných elektrárnách. Zde vyvinutou metodu určování ztrátových součinitelů lze též použít při určování ztrátových součinitelů redukcí jiných geometrických parametrů, a dokonce i jiných typů armatur.

Reference

[1] Vimmr, J., Plánička, S., Jonášová, A. *Vývoj pokročilé metodiky pro stanovení průtočných charakteristik zpětné odběrové klapky u parního turbosoustrojí.* Souhrnná výzkumná zpráva: NTIS-VP3-010/2022, ZČU v Plzni, 2022.

[2] Noskievič, J. a kol. *Mechanika tekutin.* SNTL – Státní nakladatelství technické literatury, 1987.

[3] Hirsch, Ch. *Numerical computation of internal and external flows.* 2nd ed. Elsevier Ltd, 2007. ISBN 978-0-7506-6594-0.

[4] Brandner, M., Egermaier, J., Kopincová, H. *Numerické modelování v hydrologii.* Studijní text VŠB-TUO a FAV ZČU, 2011.

[5] Ascher, U. M. *Numerical methods for evolutionary differential equations.* Computational science & engineering. SIAM – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008. ISBN 978-0-898716-52-8.

[6] Linhart, J. *Mechanika tekutin I.* Skriptum ZČU v Plzni, 2009. ISBN 978-80-7043-766-7.

[7] ANSYS Fluent 12.0 Theory Guide. ANSYS Inc., 2009. [cit. 25.4.2024]. Dostupné na: `https://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/th/main_pre.htm`.

[8] ČSN EN 60534-2-3, Regulační armatury pro průmyslové procesy – Část 2-3: Průtok – Zkušební postupy.

A Tabulky výsledných ztrátových součinitelů

Tab. 5: Hodnoty ztrátového součinitele ζ v závislosti na Reynoldsově čísle Re a vrcholovém úhlu redukce α pro průměr výstupní trubky $d = 120$ mm

α ⋱ Re	50 000	100 000	200 000	300 000	500 000
10	0,1061	0,0889	0,0736	0,0651	0,0541
20	0,0884	0,0787	0,0681	0,0618	0,0539
30	0,0871	0,0779	0,0678	0,0619	0,0542
60	0,1041	0,0937	0,0833	0,0776	0,0709
90	0,1405	0,1285	0,1178	0,1127	0,1081
120	0,1600	0,1459	0,1334	0,1273	0,1222
180	0,7039	0,6950	0,6942	0,6994	0,7182

Tab. 6: Hodnoty ztrátového součinitele ζ v závislosti na Reynoldsově čísle Re a vrcholovém úhlu redukce α pro průměr výstupní trubky $d = 100$ mm

α ⋱ Re	50 000	100 000	200 000	300 000	500 000
10	0,3031	0,2576	0,2171	0,1937	0,1516
20	0,2534	0,2286	0,2022	0,1862	0,1565
30	0,2484	0,2250	0,1999	0,1847	0,1810
60	0,2858	0,2609	0,2366	0,2229	0,1987
90	0,3816	0,3530	0,3288	0,3178	0,3017
120	0,4261	0,3910	0,3624	0,3504	0,3354
180	2,2529	2,2399	2,2550	2,2861	2,3692

Tab. 7: Hodnoty ztrátového součinitele ζ v závislosti na Reynoldsově čísle Re a vrcholovém úhlu redukce α pro průměr výstupní trubky $d = 80$ mm

$\alpha \ddots$ Re	50 000	100 000	200 000	300 000
10	0,7949	0,6641	0,5142	0,3640
20	0,7083	0,6302	0,5235	0,4074
30	0,6891	0,6161	0,5139	0,4002
60	0,8226	0,7446	0,6448	0,5388
90	0,9623	0,8981	0,8104	0,7174
120	1,1145	1,0187	0,9236	0,8335
180	6,7957	6,7688	6,8289	6,9374

Tab. 8: Hodnoty ztrátového součinitele ζ dle normy ČSN EN 60534-2-3 v závislosti na Reynoldsově čísle Re a vrcholovém úhlu redukce α pro průměr výstupní trubky $d = 120$ mm

$\alpha \ddots$ Re	50 000	100 000	200 000	300 000	500 000
10	0,4447	0,3846	0,3365	0,3145	0,2965
20	0,4138	0,3629	0,3198	0,2999	0,2841
30	0,4128	0,3622	0,3196	0,3000	0,2846
60	0,4297	0,3779	0,3350	0,3156	0,3011
90	0,4586	0,4061	0,3636	0,3450	0,3326
120	0,4777	0,4232	0,3789	0,3593	0,3464
180	1,1973	1,1256	1,0753	1,0600	1,0687

Tab. 9: Hodnoty ztrátového součinitele ζ dle normy ČSN EN 60534-2-3 v závislosti na Reynoldsově čísle Re a vrcholovém úhlu redukce α pro průměr výstupní trubky $d = 100$ mm

$\alpha \ddots$ Re	50 000	100 000	200 000	300 000	500 000
10	0,9006	0,7821	0,6904	0,6531	0,6284
20	0,8745	0,7729	0,6915	0,6595	0,6451
30	0,8696	0,7695	0,6894	0,6583	0,6699
60	0,9069	0,8053	0,7259	0,6964	0,6876
90	0,9844	0,8812	0,8035	0,7769	0,7757
120	1,0281	0,9185	0,8365	0,8089	0,8087
180	3,2825	3,1428	3,0692	3,0779	3,1999

Tab. 10: Hodnoty ztrátového součinitele ζ dle normy ČSN EN 60534-2-3 v závislosti na Reynoldsově čísle Re a vrcholovém úhlu redukce α pro průměr výstupní trubky $d = 80$ mm

$\alpha \ddots$ Re	50 000	100 000	200 000	300 000
10	2,1569	1,8753	1,6538	1,5378
20	2,1378	1,8982	1,7111	1,6253
30	2,1188	1,8844	1,7017	1,6184
60	2,2523	2,0129	1,8328	1,7575
90	2,3716	2,1670	1,9991	1,9370
120	2,4916	2,2401	2,0677	2,0071
180	9,4315	9,1132	9,0460	9,2428