ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

VYUŽITÍ PROGRAMU GEOGEBRA PŘI ŘEŠENÍ ÚLOH O POHYBU

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Štěpán Lisý

Matematika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň, 2024

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni dne ………………..

....

vlastnoruční podpis

Rád bych poděkoval panu PhDr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, jeho vstřícný přístup a rady, které mi dal.

OBSAH

ÚVOD

Tématem této bakalářské práce je využití programu GeoGebra při řešení úloh o pohybu. Práce se zaměřuje na teoretickou matematiku a na to, jaký přínos může mít tento způsob řešení slovních úloh o pohybu pro žáky i pro pedagogy.

Práce je rozdělena do dvou kapitol. První kapitola je věnována zavedení pojmu slovní úloha. Autor poté popisuje, jaké výhody pro žáky mají slovní úlohy, s jakými druhy se mohou setkat a jak je možné tyto druhy řešit. Následně autor uvádí důležité pojmy především pro pedagoga, se kterými se lze v kapitole slovní úlohy setkat. Hlavní téma práce, slovní úlohy o pohybu, je definováno v další části, ve které jsou zmíněné i důležité prekoncepty, jež je potřeba znát k této problematice. Následují ukázky způsobů řešení slovních úloh o pohybu a jejich dělení. Tématem druhé části bakalářské práce je řešení slovních úloh v programu GeoGebra. Autor nejdříve představuje samotný program a možnosti, které nabízí. Poté autor vytvořil seznam kroků, kterými je možné se řídit v případě, že budeme chtít v programu tvořit simulace podobné těm, které tvořil autor v další části. Za pomoci těchto simulací vyřešil ukázkové typy úloh a vytvořil šablonu, ve které se dá vygenerovat velké množství příkladů nejen k procvičení. Na závěr se autor věnuje výhodám a nevýhodám, které jak pro žáky, tak pro pedagogy může mít řešení slovních úloh o pohybu v programu GeoGebra. Tato druhá část je praktická.

Cílem práce je shrnutí podstatných informací, které se týkají slovních úloh a podrobnější představení slovních úloh o pohybu. Toto téma je velmi úzce spjato s praxí a žáci se s ním setkávají již na základní škole. Autor se za pomoci daného programu snažil vytvořit podpůrný materiál, který by pomohl žákům pochopit slovní úlohy o pohybu a umožnil navázání se složitějšími typy příkladů. V praktické části jsou představeny základní typy slovních úloh vyřešené za pomoci GeoGebry a uvedené další příklady, které by se daly na vytvořené simulace použít a bylo by možné je využít i v praxi při výuce daného tématu.

K sepsání této práce byla použita odborná literatura, dále knihy s tématikou slovních úloh, vědecké i cizojazyčné články a internetové zdroje. K vytvoření praktické části využil autor program GeoGebra, který je dostupný online i volně ke stažení.

1. SLOVNÍ ÚLOHY O POHYBU NA ŠKOLÁCH

Tato kapitola nejdříve definuje samotný pojem slovní úloha, poté se zaměří na jejich výhody zmíněné nejen v Rámcovém vzdělávacím plánu (dále jen RVP) a přínos pro žáky. Dále bude následovat dělení slovních úloh do určitých kategorií a naznačen jejich způsob řešení. Poté, co bude nadefinován pojem slovní úloha o pohybu, uvede autor jejich základní způsoby řešení a nato i druhy, také s příkladem postupu řešení.

1.1 ZAVEDENÍ POJMU SLOVNÍ ÚLOHA

Pojem slovní úloha můžeme nadefinovat několika způsoby. Slovní úlohy jsou takové úlohy, ve kterých jsou slovní formulací vyjádřeny vztahy mezi zadanými a hledanými údaji. Úkolem je najít vhodné operace, které provedeme s údaji, jež máme zadané, abychom nalezli údaje, které hledáme. (BLAŽKOVÁ, 2017, s. 153)

Slovní úlohu můžeme také vnímat jako slovní popis matematického problému, který je převedený na reálnou situaci. V tomto popisu nalezneme jednu nebo více otázek a použitím matematických operací na ně získáme odpověď. Matematické slovní úlohy jsou však v porovnání se skutečnými situacemi zjednodušeny o některé aspekty, a je tak více kladen důraz na matematické postupy. (VERSCHAFFEL, 2020, s. 2–3)

Na slovní úlohy lze také nahlížet jako na úlohy, ve kterých se popisuje konkrétní reálná situace a řešitel hledá odpovědi na položené otázky. Ve školské matematice jsou slovní úlohy brány jako úlohy, v jejichž zadání nalezneme objekty, jevy a situace v mimomatematických oblastech. (NOVOTNÁ, 2000, s. 10)

Důležitým krokem, který musíme provést při řešení jakýchkoliv úloh z oblasti jiné, než je matematika, je převést je do matematického jazyka. (KVĚTOŇ, 1990, s. 212)

Z těchto definic je možné vyčíst typické znaky slovních úloh. Jsou jimi: slovní zadání, převedení do matematického jazyka, hledání vhodných operací, matematický problém daný na konkrétní situaci a její zjednodušení.

1.2 VÝHODY SLOVNÍCH ÚLOH

I přes výše zmíněné zjednodušení slovních úloh je jejich přínos pro žáky nesporný. Ve vyučování matematiky by mělo být jedním z nejdůležitějších cílů, aby žáci zvládli matematiku aplikovat. V prostředí školy je tato aplikace v hodinách matematiky většinou simulována řešením úloh, na úrovni základní školy tzv. slovních úloh. (KUŘINA, 1990)

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání uvádí jako očekávaný výstup žáků devátých tříd právě *„formulaci a řešení reálných situací pomocí rovnic a jejich soustav“* a *„analyzování a řešení jednoduchých problémů, modelování konkrétních situacích, ve kterých využívá matematický aparát v oboru celých čísel a racionálních čísel“*. (RVP ZV, 2023, s. 35–36)

RVP také mluví o rozvíjení klíčových kompetencí tím, že vede žáka například k (uvedeny jsou pouze vybrané body): (RVP ZV, 2023, s. 31–32)

- rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů
- vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu
- vnímání složitého reálného světa a jeho porozumění; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití; k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely
- provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému

Výhoda slovních úloh spočívá také v tom, že připravují žáky na řešení aplikačních úloh a úloh ve kterých nalezneme běžné životní situace. Aplikace početních slovních úloh souvisí s výkonem téměř každé profese a také s běžnými potřebami každého člověka, jako jsou například placení nebo hospodaření s financemi. (BLAŽKOVÁ, 2017, s. 153)

I když mohou být slovní úlohy v učebnicích zjednodušeny nebo idealizovány, schopnost je řešit je zásadní dovedností, která má vliv nejen v oblasti matematiky, ale také v mnoha dalších předmětech, včetně fyziky a ekonomiky. Tyto úlohy nejsou jen prostředkem k procvičení matematických dovedností, ale mají mnohem širší význam. Pomáhají žákům rozvíjet kreativní myšlení, schopnost analyzovat a řešit problémy, a také hledat nové a odlišné přístupy k jejich řešení.

1.3 DRUHY SLOVNÍCH ÚLOH A JEJICH ŘEŠENÍ

Dělení slovních úloh je několik. Nejzákladnější dělení je buďto dle kontextu slovní úlohy anebo dle oblasti matematiky, do které je úloha zařazena. (NOVOTNÁ, 2000, s. 16)

Slovní úlohy dle oblasti matematiky lze rozdělit na dvě základní kategorie, a to na slovní matematické úlohy a slovní úlohy s nematematickým obsahem. Slovní matematické úlohy si lze představit jako úlohy, ve kterých jsou zmiňována čísla, je však nejdříve potřeba zadání přepsat do matematických znaků. Příklad takového zadání může být následovný:

Příklad č. 1: Součet čísla a jeho druhé mocniny je 400. Určete toto číslo. (NOVOTNÁ, 2000, s. 16–17)

Na druhou stranu, slovní úlohy s nematematickým obsahem jsou úlohy, ve kterých se vyskytují i nematematické termíny. U těchto slovních úloh je potřeba nejdříve provést jejich matematizaci (převést zadaní do matematických znaků) a poté je vyřešit. Jako příklad lze uvést toto zadání:

Příklad č. 2: Sestry Katka a Petra dostali od rodičů za domácí práce dohromady 212 korun. Rozdíl v jejich odměnách byl 28 korun. Kolik korun dostala každá ze sester? (NOVOTNÁ, 2000, s. 16–17)

Dělení dle kontextu slovní úlohy je pestřejší. Zde rozlišujeme slovní úlohy o pohybu, společné práci, směsích, obsahu a dělení celku na části. (NOVOTNÁ, 2000, s. 17–19)

Slovní úlohy o pohybu se vyznačují tím, že v jejich zadání jsou informace o dráze, rychlosti anebo času. Více budou slovní úlohy o pohybu rozebrány v následujících kapitolách. (NOVOTNÁ, 2000, s. 17–19)

Pokud narazíme na úlohu, v jejímž zadání se mluví o výkonosti dvou a více subjektů, které vykonávají práci společně nebo současně, řadí se tato úloha do kategorie slovních úloh o společné práci. V úlohách o směsích budeme zjišťovat podobu výsledné směsi nebo jejích počátečních složek. Geometrické rovinné útvary jako jsou například čtverec, obdélník nebo trojúhelník a jejich obsahy jsou podstatou slovních úloh o obsahu. V posledním druhu slovních úloh, a to v těch o dělení celku na části, nalezneme v zadání vztah právě mezi celkem a částí. (NOVOTNÁ, 2000, s. 17–19)

K vyřešení slovních úloh lze dojít více způsoby. Základními dvěma postupy jsou způsob algebraický a způsob aritmetický. První bývá povětšinou schůdnější, ale žádá si předchozí matematické znalosti. Pokud se rozhodneme úlohu řešit aritmetickým způsobem, budeme používat vlastní úsudek. Tento způsob však může být, především u složitějších úloh, obtížný i pro dospělé, natož pro žáky. Tento přístup by avšak neměl být ve škole opomíjen, ale použití aritmetického způsobu by mělo být omezeno pouze na ty úlohy, u kterých je takovéto řešení jednodušší než řešení výpočtem. (KVĚTOŇ, 1990, s. 215–216)

V odborné literatuře se můžeme setkat také s analytickou a syntetickou metodou. Analytický postup vychází z otázky dané úlohy. První otázkou, kterou si při řešení žák položí, je tedy: „Co mám vypočítat?“. Poté následují další otázky typu „Jaké informace pro to potřebuji?“ nebo „Je některá z nich uvedena v zadání?“. Pokud všechny potřebné údaje dokáže vyčíst ze zadání, převede slovní úlohu na matematický zápis a vyřeší ji. Pokud scházejí některé potřebné údaje, musí nejprve tyto údaje dopočítat a poté může dořešit celou úlohu. Syntetická metoda spočívá v určování dalších údajů, z již zadaných, a to do té doby, dokud nedojdeme k řešení úlohy. Tato metoda nám umožnuje pracovat se zadanými údaji od samého začátku, její riziko však spočívá v opominutí vícera řešení dané slovní úlohy a nalezení pouze jednoho z nich. (KVĚTOŇ, 1990, s. 217)

Obecně je možné se při řešení jakékoli slovní úlohy řídit těmito základními kroky, díky kterým lze snadno a systematicky dojít k výsledku:

1. pochopení či nepochopení textu slovní úlohy
2. zvládnutí rozboru slovní úlohy
3. zápis příkladu, rovnice nebo soustavy rovnic
4. řešení příkladu
5. odpověď
6. provedení zkoušek správnosti

V první fázi musí žák ze zadání pochopit, které údaje má zadané a co musí zjistit. K lepšímu porozumění a systematickému přístupu může napomoci stručný zápis zadání. Žáci se tím učí získávat důležité informace z textu a lépe mu porozumět. V tom, jestli zadání porozumí a v jaké míře může hrát roli délka textu, použité termíny, způsob zadání číselných údajů, schopnost koncentrace na text ale také určité poruchy učení, především dyslexie. V druhé fázi se žáci zaměřují na vztahy mezi zadanými veličinami a hledanými údaji. Jako pedagogové můžeme žákům v této fázi napomoci například definováním daných pojmů nebo připomenutím úlohy podobného typu, kterou jsme již dříve počítali. Ze správně provedeného rozboru vyplyne volba početní operace, díky čemuž by se mělo dojít ke správnému výsledku. Také zde můžeme názorně ukázat použití vět a definic v praktické rovině a v konkrétních problémech. Pokud je to možné, je vhodné daný problém znázornit i graficky. Třetí fáze má název zápis příkladu, rovnice nebo soustavy rovnic. V této fázi je cílem, aby žáci byli schopni dané slovní zadání zapsat pomocí matematických výrazů a symbolů. Především v začátcích může tato fáze činit problémy (například rozlišit o čtyři menší a čtyřikrát menší). Můžeme proto na začátku zkoušet převádět matematické zápisy do zápisů slovních. Řešení těchto příkladů, rovnic nebo soustav rovnic přicházejí na řadu ve čtvrté fázi. Zde vyřešíme danou úlohu pomocí aritmetických nebo algebraických postupů řešení. Na úspěšné zvládnutí této fáze může mít vliv například zvládnutí operací v daných oborech nebo ovládání potřebných algoritmů. Pátým krokem, který učiníme po početním vyřešení příkladu, je zápis slovní odpovědi. Tu sepisujeme k jedné nebo více otázkám ze zadání a povětšinou postačí stručná odpověď jednou větou uvádějící přesný výsledek. Velmi důležitá je i šestá fáze, tedy zkouška správnosti. Cílem této fáze je ověřit správnost našeho výsledku. Výsledek musí splňovat všechny podmínky zadání slovní úlohy. Provedení takzvané zkoušky může napomoci nalézt případnou chybu ve výpočtu, proto se nedoporučuje, pokud je například slovní úloha řešena rovnicí, dosazovat při provádění zkoušky do oné rovnice, protože ta může být nesprávně sestavena. Zkouška může i napomoci pochopení řešení úlohy. To si lze ověřit jednoduchými otázkami na studenty. (BLAŽKOVÁ, 2017, s. 154–156)

1.4 DŮLEŽITÉ POJMY PRO PEDAGOGA

Slovní úlohy jsou bezesporu složitou kapitolou v hodinách matematiky pro většinu žáků. Orientace v nich a v jejich terminologii však může být obtížná i pro samotné pedagogy. Proto je důležité si některé pojmy spojené s řešením slovních úloh objasnit.

Uchopování úlohy. Při uchopování úlohy si žák sám, nebo za pomoci učitele, uvědomí, které objekty se nacházejí v dané úloze a jaké jsou mezi nimi vztahy. Následně eliminuje ty informace, které jsou přebytečné, tedy k řešení úlohy nepotřebné. K uchopení úlohy můžeme přistupovat několika směry. Pokud jeden proces ukončíme předtím, než zahájíme druhý, mluvíme o sériovém uchopení úlohy. V praxi tento postup může vypadat následovně: Žák zapisuje informace ze zadání. Čte zadání a zapisuje první údaj. Po zapsání prvního údaje pokračuje ve čtení a zapisuje druhý údaj. Jako poslední zapisuje otázku. Protikladem tohoto přístupu je paralelní uchopení úlohy. Zde probíhají současně dva či více procesů. Tento přístup lze demonstrovat na provádění zápisu slovní úlohy: Žák najednou čte celé zadání a současně zapisuje i výsledné vztahy. Na rozdíl od sériového uchopení, zde nutně nemusí být zapsána otázka. (NOVOTNÁ, 2000, s. 21–22)

Vhled. Jako vhled rozumíme komplexní pochopení vztahů mezi prvky nacházejícími se v zadání slovní úlohy a uvědomění si souvislostí. (NOVOTNÁ, 2000, s. 22)

Reprezentace. Tento pojem nabývá významu uchopení zadání v hlavě řešitele. Toto uchopení může být správné, neúplné nebo chybné. Řešitel, povětšinou žák, si ze zadání utvoří představy. Tyto představy lze poté slovně nebo písemně zveřejnit. Sdělení vlastní reprezentace může řešiteli napomoci například pokud je zadání slovní úlohy příliš složité a pouhou reprezentací v hlavě by nebylo možné získat vhled. V některých případech může reprezentace napomoci jiné osobě nebo samotnému řešiteli tím, že mu připomene předchozí zkušenosti. (NOVOTNÁ, 2000, s. 23)

Jednou z fází řešení slovních úloh je matematizace problému neboli převedení slovně zadaného problému do znakového systému. Znakový systém může být také označován jako referenční jazyk. V tomto případě mluvíme o kódování. Kódování nám pomáhá si přehlednějším a úspornějším způsobem zaznamenat data, podmínky a neznámé. Tím, že řešitel nějakým způsobem uchopí zadání slovní úlohy, zpracuje ji a vhodným referenčním jazykem zakóduje, vzniká legenda. Legenda může mít podobu stručného zápisu, obrázku, diagramu a další. (NOVOTNÁ, 2000, s. 23–24)

Souhrn pravidel určujících způsob dalšího postupu při řešení slovní úlohy nazýváme strategie. Zjednodušeně je to odpověď na otázku „Jak úlohu řešit?“. Pro pedagoga je toto velmi důležitým momentem při řešení slovních úloh. Odhalením strategie, kterou žák použije, může učitel odhadnout myšlenkové pochody odehrávající se v hlavě žáka a tím mu napomoci v případě chybného postupu. Není možné jednoznačně říct, která strategie je nejlepší. Výběr strategií je rozsáhlý, ne však neomezený a v určitých případech může být samotná volba strategie problematická. (NOVOTNÁ, 2000, s. 24–25)

Neméně důležité jsou i dva pojmy týkající se samotného zadání slovní úlohy. Zadání může být buďto konceptuální nebo procesuální. Konceptuální zadání popisuje situaci, která se časem nemění. Příkladem takového zadání může být:

Příklad č. 3: Čtyři muži se sešli na obchodním jednání. Každý podal ruku každému. Kolik podání rukou proběhlo? (NOVOTNÁ, 2000, s. 25)

Oproti tomu, procesuální zadání popisuje změny v situaci, ke kterým postupně dochází. Jako příklad lze uvést toto zadání:

Příklad č. 4: Na obchodním jednání se sešli Petr a Jan. Při setkání si podali ruku. Později se připojil Adam a při příchodu podal ruku Petrovi i Janovi. Jako poslední dorazil Kamil a podal ruku všem již přítomným. Kolik podání rukou proběhlo? (NOVOTNÁ, 2000, s. 25)

1.5 SLOVNÍ ÚLOHY O POHYBU

Slovní úlohy o pohybu jsou jedním z druhů slovních úloh. V této části práce bude nejdříve nadefinován pojem slovní úloha o pohybu, poté budou zmíněny důležité znalosti, které musejí žáci mít před řešením těchto úloh. Dále budou představeny možné způsoby řešení slovních úloh o pohybu a jejich jednotlivé druhy.

Slovními úlohami o pohybu rozumíme takové slovní úlohy, v jejichž zadání se vyskytují ve vzájemné kombinaci informace o dráze, době pohybu a rychlosti nějakého objektu. Ke správnému řešení můžeme tedy smysluplně použít vzorec $s = v \cdot t$ a jeho úpravy. (NOVOTNÁ, 2000, s. 18)

Z této definice je zřejmé, že identifikace slovní úlohy týkající se pohybu není obvykle náročná. Pokud v zadání po jeho přečtení nalezneme slovní spojení jako „vzdálenost dvou objektů“, „průměrná rychlost“ nebo „doba, za kterou se setkají“ můžeme s jistotou označit zadání za slovní úlohu o pohybu. (Buřil, 1985)

Příklad č. 5: zadání slovní úlohy o pohybu: Vzdálenost Mariánské Lázně – Praha je 162 km. Z obou měst vyjela současně proti sobě dvě auta. Auto z Mariánských Lázní jelo průměrnou rychlostí 75 km/h, auto z Prahy průměrnou rychlostí 60 km/h. Kdy se potkají? (Buřil, 1985)

K tomu, abychom byli schopni vypočítat slovní úlohy o pohybu musíme:

1. znát vztahy pro výpočet rychlosti, dráhy a času
2. být schopni převádět jednotky

Pro výpočet rychlosti, dráhy a času se předpokládá znalost značení těchto veličin a jejich vztah nejspíše z hodin fyziky. Základní vztah vypadá následovně $v = \frac{s}{t}$ a vyjadřuje rychlost rovnoměrného pohybu jako podíl dráhy kterou urazí těleso/ objekt za určitý čas. Pro žáky by bylo vhodné připomenout, jaké případy nám mohou nastat:

1. nízkou rychlost dostaneme, když v čitateli zlomku bude malé číslo a ve jmenovateli číslo velké (budeme se pohybovat po krátké dráze delší čas)
2. vysokou rychlost získáme dosazením velkého čísla do čitatele a malého do jmenovatele (po dlouhé dráze se pohybujeme v krátkém čase)

Ze vzorce pro rychlost můžeme vyjádřit vzorec pro dráhu, který bude vypadat následovně: $s = v \cdot t$. Zde je důležitým předpokladem to, že se objekt pohybuje stále stejnou rychlostí, vykonává tedy rovnoměrný pohyb.

Chybějící veličinu čas můžeme analogicky vyjádřit vzorcem $t = \frac{s}{v}$. I u tohoto vztahu je vhodné s žáky zopakovat, jaké výsledky můžeme očekávat:

1. krátký čas nám vyjde, když do čitatele dosadíme malé číslo a do jmenovatele velké (po krátké dráze se budeme pohybovat vysokou rychlostí)
2. dlouhý čas bude naším výsledkem, pokud v čitateli bude vysoké číslo a ve jmenovateli malé (po dlouhé dráze se budeme pohybovat nízkou rychlostí)

Další oblastí, kterou je potřeba před začátkem kapitoly slovní úlohy o pohybu zopakovat, jsou převody jednotek. Při počítání s veličinami *s*, *v* a *t* je potřeba, aby si jejich jednotky navzájem odpovídali. Pokud bude dráha uvedena v kilometrech (km) a čas v hodinách (h), výsledná rychlost bude v kilometrech za hodinu (km/h). Stejně tomu bude v případě metrů (m) a sekund (s), rychlost pak bude v metrech za sekundu (m/s). Je proto nutné ovládat převody jednotek délky, času a rychlosti. Základními vztahy jsou:

1. délka:
   a. 1 km = 1 000 m (násobíme tisícem)
   b. 1 m = 0,001 km (dělíme tisícem)
2. čas:
   a. 1 h = 3 600 s (násobíme 3 600)
   b. 1 s = $\frac{1}{3\,600}$ h (dělíme 3 600)

Složitější se může zdát převod tzv. odvozených jednotek, a to z km/h na m/s a naopak. I ten lze jednoduše odvodit:

a. 10 m/s = $\frac{10\text{ m}}{1\text{ s}} = \frac{10}{1\,000}\text{ km} : \frac{1}{3\,600}\text{ h} = 10 * \frac{3\,600}{1\,000}$ km/h = 10 * **3,6** km/h = 36 km/h

b. 36 km/h = $\frac{36\text{ km}}{1\text{ h}} = \frac{36\,000\text{ m}}{3\,600\text{ s}} = \frac{36\,000}{3\,600}$ m/s = $\frac{36}{\mathbf{3{,}6}}$ m/s = 10 m/s

Z tohoto odvození můžeme vidět, že je důležitá hodnota 3,6. Převod z metrů za sekundu na kilometry za hodinu lze provést vynásobením touto hodnotou. Pokud chceme udělat převod opačný (z km/h na m/s), budeme číslem 3,6 dělit. Ačkoli se tento převod může zdát na první pohled žákům složitý, po ukázce jeho odvození, může dojít k lepšímu pochopení a zapamatování.

1.6 ZPŮSOBY ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH O POHYBU

Jak již autor uvádí výše, k vyřešení slovní úlohy lze přistupovat dvěma směry. První z nich je algebraický, druhý aritmetický. Jinak tomu není ani u slovních úloh o pohybu. Ty můžeme tedy řešit buďto rovnicí (algebraický způsob), nebo úsudkem/ grafickým znázorněním (aritmetický způsob).

Příklad č. 6: použit pro ukázku obou postupů: Vzdálenost dvou bodů A a B je 90 km. Ve stejný čas vyjedou z obou bodů automobily. Auto vyjíždějící z bodu A jede průměrnou rychlostí 70 km/h, auto z bodu B má průměrnou rychlost 50 km/h. Za jak dlouho se potkají?

1.6.1 ŘEŠENÍ ROVNICÍ

Zápis:

s = 90 km

v_1 = 70 km/h

v_2 = 50 km/h

----

t = ?

Úvaha:

Čas, za který se automobily setkají je t hodin. Z nám známého vzorečku $s = v \cdot t$ dokážeme určit ujeté dráhy obou automobilů za čas t. Dráha prvního automobilu bude $s_1 = v_1 \cdot t$. Dráha druhého $s_2 = v_2 \cdot t$. Víme, že součet drah, které automobily ujedou do doby, než se potkají se musí rovnat celkové vzdálenosti, tedy: $s = s_1 + s_2$. Jak za s_1, tak za s_2 můžeme dosadit a dostaneme rovnici: $s = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t$.

Početní řešení:

Do odvozené rovnice dosadíme čísla a dopočítáme ji:

$$70 \cdot t + 50 \cdot t = 90$$

$$120 \cdot t = 90$$

$$t = \frac{90}{120}\ \text{h}$$

$$t = 0{,}75\ \text{h} = 45\ \text{minut}$$

Zkouška:

$s = s_1 + s_2 = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = 70 \cdot 0,75 + 50 \cdot 0,75 = 52,5 + 37,5 = 90$ km

Slovní odpověď:

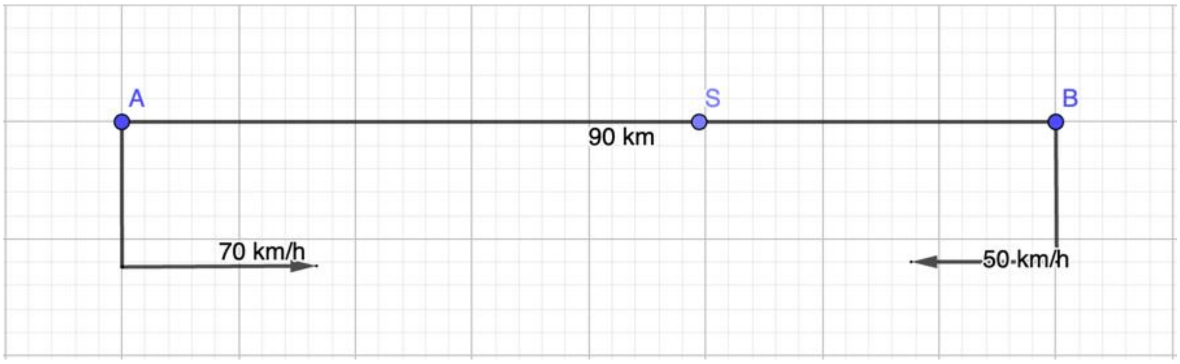
Oba automobily se potkají za 45 minut jízdy.

Po ověření výsledku zkouškou byla zapsána slovní odpověď a příklad je tím dokončen. Mohlo by následovat doplnění slovní úlohy o další otázky, například: „Jakou dráhu ujely oba automobily, než se setkaly?“ nebo „Kolik km bude ještě zbývat prvnímu /druhému automobilu do cíle po 55 minutách jízdy?“. Množství těchto otázek je nepřeberné.

1.6.2 ŘEŠENÍ ARITMETICKÝM ZPŮSOBEM

Zadání úlohy si znázorníme graficky:

Obrázek 1: Grafické znázornění zadání slovní úlohy



Zdroj: vlastní tvorba v programu GeoGebra

Nyní je více způsobů, kterými se dostat k výsledku:

1. způsob: Uvažujeme, že dráhy obou automobilů budou v době setkání v poměru rychlostí. V našem případě tedy 70 : 50 = 7 : 5.

Dráha automobilu z bodu A do bodu setkání bude: (90 km:12) ·7 = 52,5 km

Dráha automobilu z bodu B do bodu setkání bude: (90 km:12) ·5 = 37,5 km

Doba setkání bude: $\frac{52,5 \text{ km}}{70 \text{ km/h}}$ = 0,75 h = 45 minut

Obdobně: $\frac{37,5 \text{ km}}{50 \text{ km/h}}$ = 0,75 h = 45 minut

Auta se potkají za 45 minut.

2. způsob: Obě auta jedou proti sobě. Celkovou dráhu vždy zkrátí o (70 + 50) km za jednu hodinu. Celou trať tedy ujedou obě auta za: $\frac{90\ \mathrm{km}}{(70+50)\mathrm{km/h}} = \frac{90}{120}$ h = $\frac{3}{4}$ h = 0,75 h = 45 minut.

Auta se tedy potkají za 45 minut.

Při použití algebraického i aritmetického způsobu řešení dosáhneme stejného výsledku, liší se však cesta, kterou jsme k němu došli. Použití rovnice lze považovat za systematický postup. Jsou přesně stanovené kroky, které je potřeba udělat a je zde předpoklad určitých matematických znalostí (dosazování do vzorců, řešení rovnic atd.). Na druhou stranu, při řešení slovních úloh aritmetickým způsobem můžeme k výsledku dojít různými způsoby. U tohoto postupu je důležité logické uvažování, představivost a použití vlastního úsudku. Výhodou mohou také být zkušenosti z běžného života. Problém může nastat u složitějších zadání, kde může dojít ke špatnému úsudku, nebo například opomenutí více řešení. Nelze říci, že jeden způsob je horší než ten druhý. Žáci by měli být schopni alespoň jednodušší úlohy zvládat vyřešit oběma možnostmi řešení. Budou tím rozvíjet nejen své matematické schopnosti, ale také si mohou lépe představit využití vzorců a vět v praktickém životě. Při složitějších úlohách by autor volil algebraický způsob řešení, a to hlavně díky jeho systematičnosti.

1.7 JEDNODUCHÉ A SLOŽITĚJŠÍ SLOVNÍ ÚLOHY O POHYBU

V této kapitole budou autorem představeny různé druhy slovních úloh i se vzorovými zadáními a stručně nastíněny postupy jejich řešení.

Z výše uvedené definice slovní úlohy o pohybu víme, že jde o vztah jednoho nebo více pohybujících se objektů. A právě tyto faktory nám rozdělují slovní úlohy o pohybu na tři základní typy:

1. situace, kdy je v pohybu pouze jeden objekt
2. situace, kdy jsou v pohybu dva objekty proti sobě
3. situace, kdy jsou v pohybu dva objekty za sebou

1.7.1 SITUACE, KDY JE V POHYBU POUZE JEDEN OBJEKT

Slovní úlohy, ve kterých nastává tato situace, můžeme považovat za stavební kámen pro složitější typy úloh. Jde v nich totiž o výpočet průměrné rychlosti, dráhy nebo času a k dosažení výsledku tak většinou postačí dosazení do jedné z modifikací vzorečku *s = v·t*. Jedním z problémů, který u této slovní úlohy může nastat, je špatné převedení jednotek. Dle autora je také důležité, aby zadání těchto úloh byla rozdílná a zajímavá, jinak nebudou žáky motivovat k jejich počítání. Osvojení tohoto druhu úloh je však nutností pro další typy.

Příklad č. 7: slovní úloha, kde se pohybuje pouze jeden objekt: Za jak dlouho překoná letadlo vzdálenost mezi Prahou a Londýnem, která je 1 032 km, pohybuje-li se průměrnou rychlostí 900 km/h?

Řešení příkladu č. 7:

<u>Zápis:</u>

s = 1 032 km

v = 900 km/h

----

t = ?

<u>Početní řešení:</u>

Máme rovnici pro výpočet času, do které dosadíme hodnoty

$$t = \frac{s}{v}$$

$$t = \frac{1\,032}{900}\ \mathrm{h}$$

t = 1,15 h = 69 min

<u>Slovní odpověď:</u>

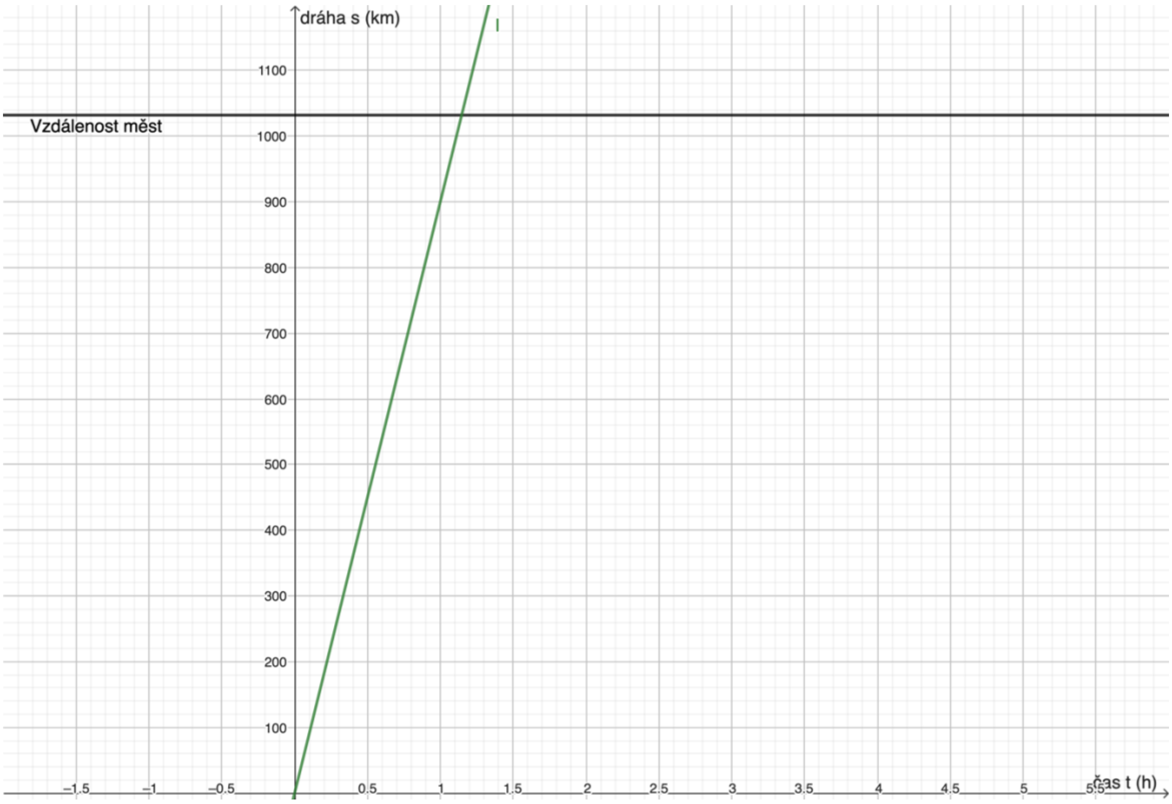
Letadlo překoná vzdálenost mezi Prahou a Londýnem za 69 minut.

Ukázka řešení je provedena algebraickým způsobem. Úlohu lze vyřešit i aritmeticky.

Grafické řešení:

Černá přímka reprezentuje vzdálenost měst, které je rovna 1 032 kilometrů. Zelená přímka označená *l* reprezentuje závislost dráhy na čase letadla pohybujícího se rychlostí 900 km/h. Předpis této funkce je $y = 900 \cdot x$ vycházející ze vztahu $s = 900 \cdot t$.

Obrázek 2: Grafické znázornění závislosti dráhy na čase letadla



Zdroj: vlastní tvorba v programu GeoGebra

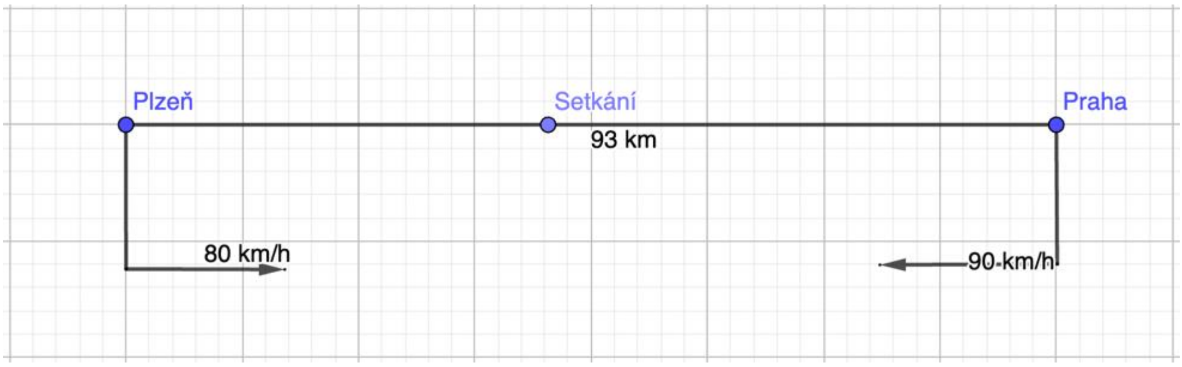
1.7.2 SITUACE, KDY JSOU V POHYBU DVA OBJEKTY PROTI SOBĚ

Složitější se již mohou zdát úlohy, do kterých nám vstupují dva objekty, které se pohybují proti sobě. Každý z těchto objektů má totiž svoji vlastní rychlost. Je důležité pamatovat si, že dva objekty se k sobě přibližují (pohybují se proti sobě) rychlostí, která se rovná součtu jejich jednotlivých rychlostí. U těchto již složitějších příkladů je vhodné pro lepší představivost danou situaci nejdříve graficky znázornit, popřípadě načrtnout.

Příklad č. 8: slovní úloha, kde se pohybují dva objekty proti sobě: Praha a Plzeň jsou vzdálené přibližně 93 kilometrů. Z Prahy vyrazil osobní automobil rychlostí 90 km/h. Ve stejný okamžik vyjel z Plzně nákladní automobil jedoucí 80 km/h. Za jak dlouho se obě vozidla potkají?

Řešení příkladu č. 8:

Obrázek 3: Grafické znázornění slovní úlohy o pohybu, kde se pohybují dva objekty proti sobě



Zdroj: vlastní tvorba v programu GeoGebra

Zápis:

s = 93 km

v_a = 90 km/h

v_n = 80 km/h

----

t = ?

Oba pojedou stejnou dobu, tudíž $t_a = t_n = t$.

Osobní automobil urazí dráhu $s_a = v_a \cdot t$.

Nákladní automobil urazí dráhu $s_n = v_n \cdot t$.

Početní řešení:

Víme, že součet dráhy, kterou ujede osobní automobil s dráhou nákladního automobilu se musí rovnat celkové dráze, tudíž:

$$s = s_a + s_n$$

$$s = v_a \cdot t + v_n \cdot t$$

$$93 = 90 \cdot t + 80 \cdot t$$

$$93 = 170 \cdot t$$

$$t = \frac{93}{170} = 0{,}55 \text{ h} = 33 \text{ min}$$

Slovní odpověď:

Osobní automobil se s nákladním potká po 33 minutách jízdy.

Aritmetické řešení:

Vozidla se k sobě přiblíží za jednu hodinu o 170 km (90 km + 80 km).

93 kilometrů tedy urazí obě vozidla za $\frac{93}{170}$ h = 0,55 h = 33 min.

Grafické řešení:

V grafu je zelenou barvou znázorněna závislost dráhy na čase osobního automobilu. Ta je dána rovnicí *y = 90·x*, která vychází z výpočtu dráhy automobilu *s = 90·t*. Červenou barvou je znázorněna závislost dráhy na čase nákladního vozidla. Její předpis je *y = 93 – 80·x*. Ten je daný vzdáleností měst, kterou nákladní automobil každou hodinu sníží o 80 kilometrů. Průsečík těchto dvou přímek znázorňuje místo setkání vozidel. První souřadnice bodu udává čas, za který se automobil střetne s nákladním vozidlem. Druhá souřadnice představuje vzdálenost, kterou ujede automobil, než se setká s nákladním vozidlem.

Obrázek 4: Grafické znázornění závislosti dráhy na čase obou vozidel při pohybu proti sobě

Zdroj: vlastní tvorba v programu GeoGebra

1.7.3 SITUACE, KDY JSOU V POHYBU DVA OBJEKTY ZA SEBOU

Dalším případem se dvěma objekty mohou být slovní úlohy, kde se tyto objekty pohybují za sebou, tedy stejným směrem. I zde má každý z těchto objektů svoji vlastní rychlost. Zde je důležité si uvědomit, že objekt, který se pohybuje vyšší rychlostí, dohání objekt pohybující se nižší rychlostí. Rychlejší z dvojice se přibližuje relativní rychlostí, která se rovná rozdílu rychlostí objektů.

Příklad č. 9: slovní úloha, kde se pohybují dva objekty za sebou: Z Prahy vyjel v poledne autobus rychlostí 80 km/h. V jednu hodinu odpoledne ze stejného místa vyjel osobní automobil jedoucí rychlostí 130 km/h. V kolik hodin a jak daleko od Prahy dojede osobní automobil autobus?

Řešení příkladu č. 9:

Obrázek 5: Grafické znázornění slovní úlohy o pohybu, kde se pohybují dva objekty za sebou

Zdroj: vlastní tvorba v programu GeoGebra

<u>Zápis:</u>

v_a = 80 km/h

v_o = 130 km/h

----

t = ?

s = ?

Autobus vyjel ve 12 hodin. Osobní automobil v 1 hodinu odpoledne. Autobus tedy pojede o 1 hodinu déle, tudíž $t_a = t_o + 1$.

Dráha autobusu: $s_a = v_a \cdot t_a = v_a \cdot (t_o + 1)$

Dráha osobního automobilu: $s_o = v_o \cdot t_o$

Početní řešení:

Vycházíme z toho, že oba ujedou stejnou dráhu.

$$s_a = s_o$$

$$v_a \cdot t_a = v_o \cdot t_o$$

$$v_a \cdot (t_o + 1) = v_o \cdot t_o$$

$$v_a \cdot t_o + v_a = v_o \cdot t_o$$

$$80 \cdot t_o + 80 = 130 \cdot t_o$$

$$50 \cdot t_o = 80$$

$$t_o = \frac{80}{50}\ \text{h} = 1{,}6\ \text{h} = 96\ \text{min}$$

Známe dobu jízdy osobního automobilu. Dopočítáme dobu jízdy autobusu a dráhu, kterou oba ujedou.

$t_a = t_o + 1 = 1{,}6 + 1$ h $= 2{,}6$ h $= 156$ min

$s_o = v_o \cdot t_o = 130 \cdot 1{,}6 = 208$ km

$s_a = v_a \cdot t_a = 80 \cdot 2{,}6 = 208$ km

Slovní odpověď:

Osobní automobil stráví na cestě 96 minut, autobus 156. Obě vozidla se setkají 208 kilometrů od Prahy.

Aritmetické řešení:

V okamžiku, kdy vyjel osobní automobil, urazil autobus 80 km.

Osobní automobil se k autobusu každou hodinu přiblíží o (130–80) km = 50 km.

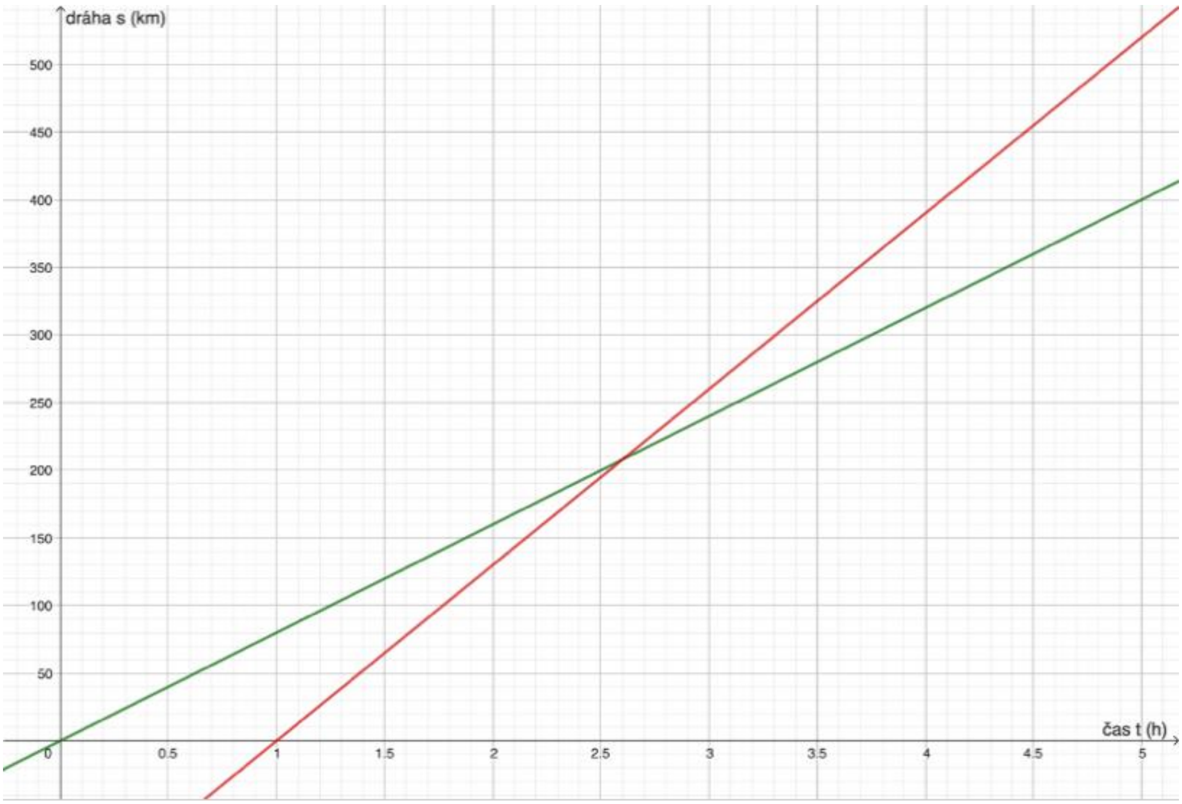
Náskok 80 km tak automobil dožene za 1,6 hodinu, tedy 96 minut.

Oba ujedou 208 kilometrů.

Grafické řešení:

V grafu je zelenou barvou znázorněna závislost dráhy na čase autobusu, a to předpisem $y = 80 \cdot x$ (vycházející ze vztahu $s = 80 \cdot t$) Červená barva představuje funkci $y = 130 \cdot (x - 1)$, neboli závislost dráhy na čase osobního automobilu, který vyjel o hodinu déle ($s = 130 \cdot [t - 1]$). Průsečík těchto dvou přímek znázorňuje místo, kdy osobní automobil dojede autobus. Souřadnice tohoto bodu na ose x udává čas, za který se to stane od vyjetí autobusu, souřadnice na ose y dává vzdálenost od počátečního místa.

Obrázek 6: Grafické znázornění závislosti dráhy na čase obou vozidel při pohybu za sebou



Zdroj: vlastní tvorba v programu GeoGebra

2. ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH O POHYBU POMOCÍ PROGRAMU GEOGEBRA

V druhé kapitole bakalářské práce se autor věnuje programu GeoGebra. Čtenáře nejdříve seznámí se samotným programem a poté popíše zásady, kterými je potřeba se řídit, při řešení slovních úloh v tomto programu. Poté autor nasimuluje řešení vybraných slovních úloh v tomto programu a ověří tato řešení početně jedním ze způsobů, které byly zmíněny výše v této práci. Na závěr autor zhodnotí, jaké výhody a nevýhody přináší řešení slovních úloh o pohybu v programu GeoGebra jak pro žáky, tak i pro učitele.

2.1 CO JE TO PROGRAM GEOGEBRA

Pod tímto pojmem si lze představit interaktivní počítačový program, který kloubí dohromady geometrii, algebru, tabulky, vykreslování grafů, statistiku a další matematické nástroje. GeoGebra je vhodná pro učitele i žáky. Její přínos lze vidět hlavně v grafických znázorněních různých problémů, jednoduchém intuitivním používání nebo dostupnosti v několika světových jazycích. GeoGebru lze využít zdarma, a to buďto online nebo ji lze stáhnout. Velkým přínosem je tento program i pro ostatní předměty, jelikož zde lze vytvořit nebo najít již vytvořené materiály k nespočetnému množství témat z jiných oborů. Autor sám se s GeoGebrou poprvé setkal ve svém druhém oboru, který studuje, geografii. Na animacích vytvořených právě v tomto programu pozorovali například polohu Země vůči Slunci během roku, zdánlivý pohyb Slunce po obloze nebo zatmění Slunce a Měsíce. (GeoGebra, 2024)

Na vývoji programu se začalo pracovat již v roce 2001 v Rakousku. Přes univerzity ve Spojených státech amerických se vývoj programu vrátil zpátky do Rakouska, kde dostal svoji dnešní podobu. Jak již bylo zmíněno, do programu se lze dostat přes aplikaci, která je dostupná na většině platforem nebo přes internetový prohlížeč. GeoGebra nevyžaduje přihlášení pro základní tvoření. Pokud však chceme projekt zachovat a uložit, musíme se do programu přihlásit neboli si vytvořit účet. Na úvodní stránce GeoGebry máme na výběr ze dvou záložek. První záložka nazvaná „materiály“ nám nabízí již vytvořené projekty a animace na nejrůznější témata. Najdeme zde již hotové podklady k tématům z geometrie, funkcí, výpočtů, trigonometrie, algebry a aritmetiky. Přes druhou záložku anebo tlačítko

„spustit kalkulačku“ se lze dostat do prostoru, kde je možné vytvářet vlastní grafy a výpočty. (Wikipedie, 2024)

Jako výchozí se zobrazí grafická kalkulačka. Zde lze vidět osu x a osu y. Po levé straně nalezneme sekci na vkládání vstupů. Do jednotlivých řádků klasickým zápisem zapíšeme výraz, text nebo vložíme obrázek. Výraz a text můžeme zapsat buďto na vlastní klávesnici nebo na pomocné klávesnici v programu, díky které lze snadno zapsat složitější zápisy jako jsou druhá mocnina nebo odmocnina, absolutní hodnota nebo zlomek, ale také interval nebo konstanty jako pí nebo Eulerovo číslo. Program ihned znázorní zadaný výraz (například graf funkce). Vlastnosti tohoto zobrazení (grafu) se dají upravit v nastavení. Měnit je možné popisky, barvu, styl čáry a další pokročilejší nastavení. Snadno poté vidíme průsečíky grafu s osami nebo s jinými grafy. Toto vše nabízí sekce na levé záložce nazvaná algebra. Velmi užitečné jsou nástroje v druhé sekci na této liště, která nese stejný název, a to „nástroje“. Zde pouhým zvolením základního nástroje a následného kliknutí na vybranou funkci nám program ukáže průsečíky, kořeny nebo extrémy funkce. Do svého vznikajícího grafu může autor vložit i bod. Jeho vlastnosti, jako například barva, označení a velikost, lze také měnit v nastavení. Nástroj „posuvník“ zavede parametr s daným označením, u kterého si lze zvolit minimální a maximální hodnoty. Tento parametr se pak dá použít při předpisech funkcí. Posuvníkem pak jednoduše měnit hodnotu a díky tomu pozorovat změny v grafu. Například zavedeme posuvníkem parametr a od -10 do +10 a poté v GeoGebře necháme vykreslit graf funkce $y = ax^2$. Díky tomu je možné snadno demonstrovat vlastnosti paraboly, kdy vedoucí koeficient *a* je násobený záporným číslem nebo naopak číslem kladným. Právě posuvník bude jedním ze základních prvků v další fázi této práce, konkrétně při řešení slovních úloh o pohybu v programu GeoGebra. Díky sekci nástroje jde lehce do vznikajícího projektu narýsovat přímku, polopřímku, úsečku nebo vektor, zkonstruovat střed, kolmici, osu úhlu, popřípadě úsečky, rovnoběžku nebo dokonce tečnu. Program GeoGebra automaticky zobrazí osovou nebo středovou souměrnost a posunutí o daný vektor, nebo vypočítá velikost úhlu, vzdálenost dvou bodů nebo obsah plochy. Poslední možností, kterou uživatelům GeoGebra nabízí na základní liště po levé straně, je vytvoření tabulky. Používání všech těchto funkcí a nástrojů je velmi intuitivní a snadno pochopitelné a nabízí jednoduchou a zábavnou formu, jak žákům vysvětlit nebo alespoň přiblížit fungování dané problematiky. (GeoGebra, 2024)

Prostředí GeoGebry není omezeno pouze na dvojrozměrný prostor. Výše popsané funkce vznikají v takzvané „grafické kalkulačce“. Z této kalkulačky je možné přepnout na 3D grafy kde přibyde i třetí rozměr- osa z. Veškeré funkce a nástroje zde fungují stejně v jako již zmíněném 2D prostoru. Mimo to se lze v GeoGebře dostat i do rozhraní nazvaného „geometrie“. Zde lze snadno tvořit geometrické tvary a konstrukce, počítat jejich vzdálenosti, velikosti nebo obsahy. Poslední sekcí, kterou je možné v programu využít, je sekce s názvem „pravděpodobnost“. Zde si lze ukázat jednotlivá rozdělení (normální, exponenciální, binomické nebo například Poissonovo) na uzavřeném nebo polouzavřeném intervalu.

Autor této práce považuje popsání fungování programu GeoGebra za důležité především proto, že se tento program může zdát na první pohled složitý, což by mohlo odradit některé potenciální uživatele. Opak je však pravdou a poté, co začne člověk program používat, pochopí, jak snadno ho lze ovládat a tvořit v něm. Žákům by mohla GeoGebra posloužit jako doplňující materiál při samostudiu, ve školách by se dala využít jako zábavný interaktivní prvek během vyučovacích hodin. Právě díky tomuto potenciálu si autor práce vybral tento program pro řešení následujících příkladů.

2.2 JAK POSTUPOVAT PŘI ŘEŠENÍ ÚLOH V PROGRAMU GEOGEBRA

V této kapitole bakalářské práce popisuje autor jednotlivé kroky, kterými se řídil při tvoření simulací v programu GeoGebra. Tyto obecné kroky by měly posloužit jako pomůcka ostatním uživatelům při tvorbě vlastních, podobných modelů.

Postup tvoření lze shrnout do těchto obecných kroků:

1. Selekce informací
2. Výchozí nastavení GeoGebry
3. Nastavení parametrů
4. Zobrazení významných bodů
5. Znázornění grafů funkcí
6. Nalezení řešení
7. Vizuální úprava

Ať už se kdokoliv rozhodne tvořit projekt v programu GeoGebra, je důležité nejdříve dobře zpracovat informace, se kterými bude pracovat. Nejdůležitější věcí je, určit si, které informace jsou pro následnou tvorbu důležité a které nikoliv. Autor se při vlastní tvorbě nejdříve rozhodoval, které parametry jsou pro výpočet důležité a které ho naopak nijak neovlivní. Jako ty důležité označil rychlosti subjektů, vzdálenost bodů a případný časový rozdíl, se kterým se objekty vydaly na cestu. Po vybrání a zanalyzování parametrů je důležité si vhodně nastavit prostředí GeoGebry, především rozsah os a jejich názvy. Pro tvorbu simulací slovních úloh o pohybu byla osa x označena „čas t (h)“ a osa y „dráha s (km)“. Vodorovná osa nám tedy udávala čas, svislá dráhu, kterou objekty vykonají. Ať už čas, tak ani dráha nemohou nabývat záporných hodnot, proto autor zvolil nastavení os tak, aby zobrazovaly převážně I. kvadrant. Do již připraveného grafu poté lze začít tvořit. Jako první je potřeba nastavit posuvníky. Posuvníky nám reprezentují parametry, které nějakým způsobem ovlivňují daný příklad. V autorově tvorbě to byly již výše zmíněné rychlosti subjektů (značené *v* a písmeno reprezentující daný objekt), vzdálenost bodů (označena jako *d*) a případný časový rozdíl (*čas*). U všech posuvníků se nastavují minimální a maximální hodnoty. Autor volil krajní meze tak, aby odpovídaly reálným situacím. Ve většině slovních úloh o pohybu se vyskytují minimálně dva body. Tyto body je potřeba v simulacích také zavést. Jeden z nich je možno zobrazit jako bod se souřadnicemi *[0,0]*, tomu druhému přiřadíme souřadnice *[0,d]*. Systém tím dostává informaci, že druhý bod je od toho prvního vzdálen na ose y o vzdálenost *d*. Díky nastavenému posuvníku se vzdáleností bodů tak můžeme nyní místa od sebe libovolně posouvat. Poté, co jsou nadefinovány všechny proměnné a důležité body, je na čase zobrazit grafy funkcí. Při řešení slovních úloh o pohybu tak byla potřeba zobrazit grafy znázorňující závislost dráhy na čase jednotlivých objektů. Důležité při tom je správné využití parametrů a správné označování, aby poté fungovalo jejich měnění pomocí posuvníků. Po vykreslení těchto grafů je potřeba najít jejich průsečík. Toho lze snadno docílit pomocí nástrojů, které GeoGebra nabízí. Právě souřadnice onoho průsečíku povětšinou udávají řešení slovní úlohy. Důležité je podle grafu si správně uvědomit, co nám která souřadnice říká a na co se ptá zadání slovní úlohy. Celkový výstup je možné poté ještě upravit graficky, a to ať už pojmenováním všech prvků, úpravou jejich velikostí nebo například změnou barvy.

Autor práce se sám řídil tímto postupem při tvorbě vlastních projektů. Tento seznam a popis jednotlivých úkonů slouží především pro uživatele, kteří se s programem GeoGebra setkají poprvé a měl by jim napomoci lépe pochopit fungování tohoto systému, které je velmi intuitivní.

2.3 PŘÍKLADY ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH O POHYBU V PROGRAMU GEOGEBRA

Tato kapitola je věnována řešení slovních úloh o pohybu přímo v tomto programu. Autor si sám vymyslel zadání příkladů, které později pomocí tohoto programu řešil. Při vypracovávání těchto řešení postupoval podle výše popsaných kroků. Zavedení posuvníku pro daný parametr umožňuje experimentálním způsobem najít řešení dané slovní úlohy. Změnou hodnot parametru lze najít požadovanou situaci, která bude odpovídat hledanému řešení. Autor řešení daného příkladu vždy ověřil výpočtem pro dané hodnoty v zadání. Řešení z programu GeoGebra je uvedeno online, veřejně přístupné a je možné si ho zobrazit přes uvedený QR kód.

Autor si pro řešení vybral dva typové příklady slovních úloh o pohybu. Oba jsou již zmíněny výše v této práci. Prvním typem je příklad, ve kterém se dva objekty pohybují za sebou (dohánějí se), druhým je příklad s pohybem objektů proti sobě (přibližují se). Objektem v zadání slovní úlohy může být chodec, cyklista, automobil, autobus, vlak nebo například letadlo. Důležité je zadání slovní úlohy upravit tak, aby bylo reálné – dát objektům rychlost kterou se ve skutečnosti mohou pohybovat a vzdálenost, kterou mohou za daný čas opravdu urazit. Nevhodně zvolené parametry v zadání by mohly žákům zkreslovat realitu.

2.3.1 SLOVNÍ ÚLOHY KDE SE POHYBUJÍ OBJEKTY ZA SEBOU

Příklad č. 10: Vzdálenost Plzně a Rokycan je 19 km. Z Plzně vyjel v poledne cyklista směr Rokycany a celou cestu se pohybuje stálou rychlostí 10 km/h. Automobil jedoucí stálou rychlostí 85 km/h vyjel o půl hodiny déle. Za jak dlouho od vyjetí cyklisty dojede cyklistu automobil?

Řešení příkladu č. 10:

Zápis:

Dolní index c označuje danou veličinu pro cyklistu, dolní index a pro automobil.

$v_c = 10$ km/h

$v_a = 85$ km/h

$s = 19$ km/h

$t = ?$

Cyklista vyjel ve 12 hodin. Osobní automobil o půl hodiny déle, tedy ve 12:30. Cyklista tedy pojede o 0,5 hodiny déle, což můžeme vyjádřit takto: $t_c = t_a + 0{,}5$.

Dráha cyklisty: $s_c = v_c \cdot t_c = v_c \cdot (t_a + 0{,}5)$

Dráha automobilu: $s_a = v_a \cdot t_a$

Početní řešení:

Počáteční předpoklad je, že oba ujedou stejnou dráhu, než se potkají.

$$s_c = s_a$$

$$v_c \cdot t_c = v_a \cdot t_a$$

$$v_c \cdot (t_a + 0{,}5) = v_a \cdot t_a$$

$$v_c \cdot t_a + 0{,}5 * v_c = v_a \cdot t_a$$

$$10 \cdot t_a + 5 = 85 \cdot t_a$$

$$75 \cdot t_a = 5$$

$$t_a = \frac{5}{75} \text{ h} = 0{,}067 \text{ h} = 4 \text{ min}$$

Známe dobu jízdy automobilu. Dopočítáme dobu jízdy cyklisty.

$t_c = t_a + 0{,}5 = 0{,}067 + 0{,}5$ h $= 0{,}567$ h $= 34$ min

Doplňující otázkou by mohlo být například, jakou dráhu ujede cyklista i automobil do doby, než se setkají.

$s_a = v_a \cdot t_a = 85 \cdot 0{,}067 = 5{,}7$ km

Slovní odpověď:

Automobil dojede cyklistu za 34 minut jeho jízdy, tedy ve 12:34.

Zápis parametrů pro program GeoGebra:

vzdálenost měst… d

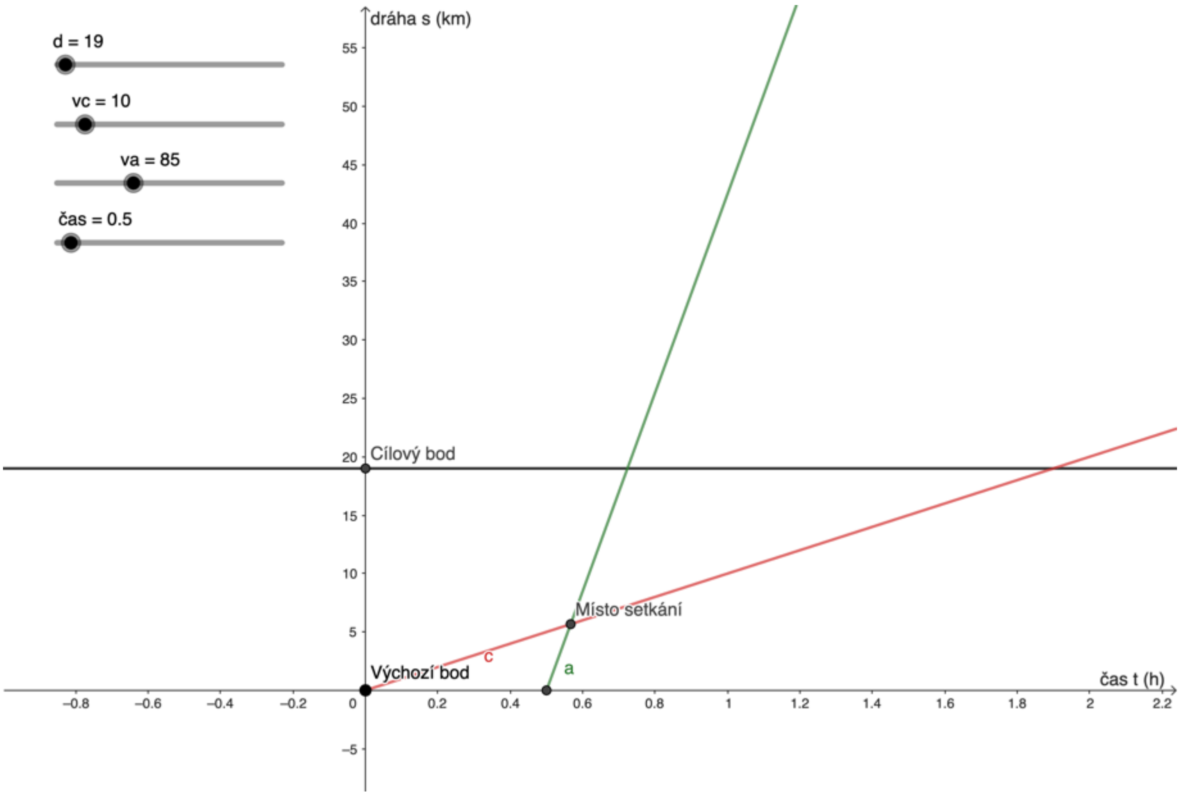
rychlost cyklisty … v_c

rychlost automobilu … v_a

rozdíl… čas

Řešení v programu GeoGebra:

Obrázek 7: Řešení příkladu č. 10 v programu GeoGebra



Zdroj: vlastní tvorba v programu GeoGebra

QR kód 1: Řešení slovní úlohy o pohybu s objekty pohybujícími se za sebou v programu GeoGebra

Zdroj: vlastní tvorba v programu GeoGebra

Přes uvedený QR kód 1 se lze dostat k řešení příkladu číslo 10 v programu GeoGebra. Výchozí hodnoty jsou nastaveny na zadání příkladu. Posuvníkem u jednotlivých parametrů však lze hodnoty snadno měnit. Posuvník označený písmenem *d* udává vzdálenost výchozího a cílového bodu. Posuvník *vc* udává rychlost cyklisty a posuvník *va* rychlost automobilu (obecně jednoho a druhého objektu). Posledním volitelným parametrem je čas. Ten udává časový rozdíl, se kterým vyjede automobil (druhý objekt). Červená polopřímka *c* a předpisem $y = 10 \cdot x$ znázorňuje závislost dráhy na čase cyklisty, zelená polopřímka s označením *a* automobilu. Předpis přímky *a* je $y = 85 \cdot (x - 0{,}5)$. Průsečík těchto dvou polopřímek označuje místo setkání, tedy místo, kde automobil dojede cyklistu (druhý objekt dojede ten první). Jeho souřadnice jsou udávány v postranní liště v části „bod – C“. Jeho první souřadnice nám říká, jak dlouhou dobu pojede cyklista (první objekt), druhá souřadnice udává dráhu, kterou oba urazí. Můžeme vidět shodné výsledky jak při početním řešení, tak při řešení v programu GeoGebra.

2.3.2 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ (OBJEKTY SE POHYBUJÍ ZA SEBOU)

1. Petr vyrazil na celodenní pochod v 9 hodin ráno průměrnou rychlostí 5,5 km/h. Ve 4 hodiny odpoledne za Petrem vyrazili jeho rodiče. Ti jeli autem průměrnou rychlostí 75 km/h. V kolik hodin rodiče dojedou Petra?

2. Praha a Dubaj jsou od sebe vzdáleny 4 500 km. Z Prahy vzlétlo letadlo v pondělí ve 21:00. Letadlo letělo průměrnou rychlostí 790 km/h. O dvě hodiny později z Prahy vzlétlo další letadlo letící stejným směrem. To letělo rychlostí vyšší o 60 km/h. V kolik hodin a jaký den

dožene rychlejší letadlo to pomalejší? Kolik km bude oběma strojům v okamžik střetnutí chybět do Dubaje?

3. Z kempu vyjela dvojice kamarádů na lodi v 9:30 a pluli rychlostí 12 km/h. Jejich cílem bylo tábořiště 30 kilometrů daleko. Další čtveřice vyrazila o 15 minut déle, plula na raftu a rychlostí o třetinu vyšší. Kdy dojela posádka raftu posádku lodi?

2.3.3 SLOVNÍ ÚLOHY KDE SE POHYBUJÍ OBJEKTY PROTI SOBĚ

Příklad č. 11: Vzdálenost Plzně a Rokycan je 19 km. Z Plzně vyšel v poledne chodec směr Rokycany a pohybuje se stále stejnou rychlostí 5 km/h. Ve stejný čas vyjel z Rokycan cyklista do Plzně. Ten jede stálou rychlostí 15 km/h. Za jak dlouhou dobu se chodec a cyklista minou a jak daleko od jednotlivých měst.

Řešení příkladu č. 11:

Zápis:

Dolní index c označuje danou veličinu pro cyklistu, dolní index p pro chodce – pěší.

$s = 19$ km

$v_p = 5$ km/h

$v_c = 15$ km/h

$t = ?$

Oba pojedou stejnou dobu, tudíž $t_p = t_c = t$.

Chodec urazí dráhu $s_p = v_p \cdot t$.

Cyklista urazí dráhu $s_c = v_c \cdot t$.

Početní řešení:

Součet dráhy, kterou urazí chodec, než potká cyklistu s dráhou cyklisty do okamžiku, než potká chodce se musí rovnat vzdálenosti měst:

$$s = s_p + s_c$$

$$s = v_p \cdot t + v_c \cdot t$$

$$19 = 5 \cdot t + 15 \cdot t$$

$$19 = 20 \cdot t$$

$$t = \frac{19}{20} = 0{,}95 \text{ h} = 57 \text{ min}$$

Čas, za který se střetnou známe, nyní je potřeba dopočítat vzdálenosti které oba urazí:

$s_p = v_p \cdot t = 5 \cdot 0{,}95 = 4{,}75$ km

$s_c = v_c \cdot t = 15 \cdot 0{,}95 = 14{,}25$ km

Slovní odpověď:

Chodec se s cyklistou potkají po 57 minutách. Chodec za tu dobu urazí 4,75 kilometrů, cyklista 14,25 kilometrů.

Zápis parametrů pro program GeoGebra:

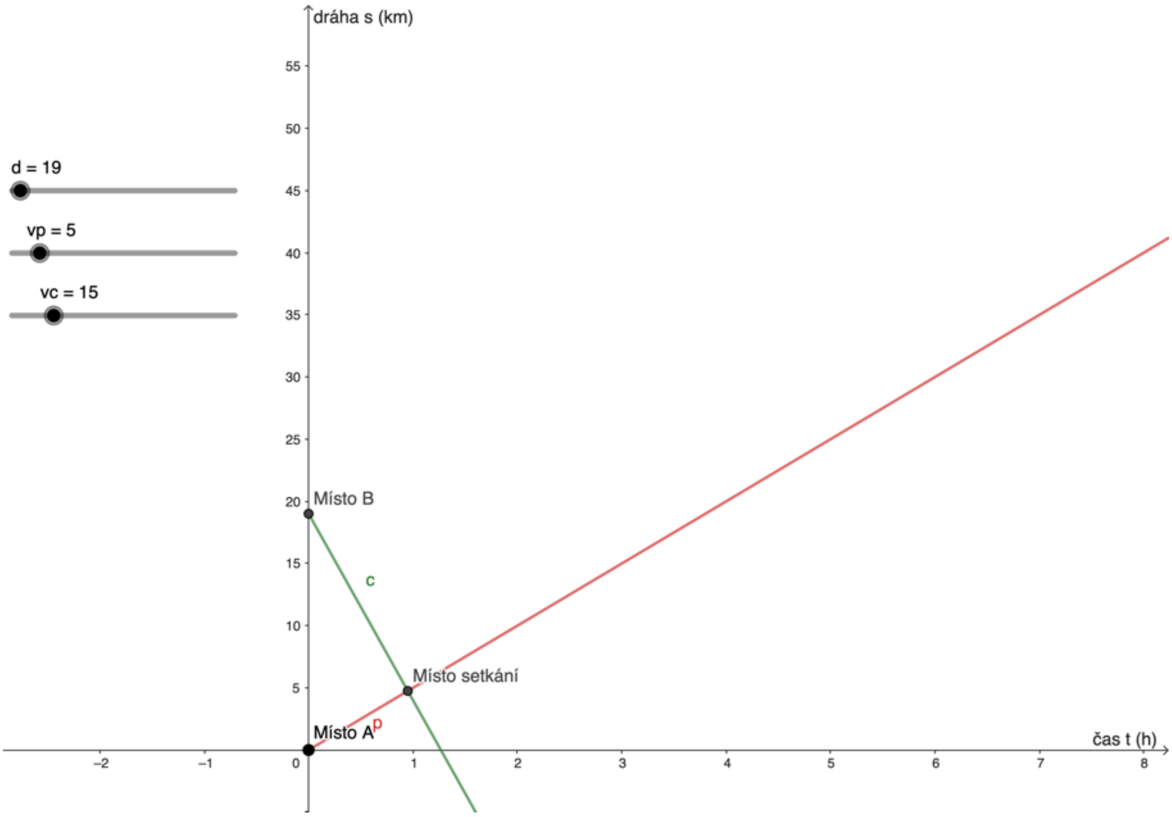
vzdálenost měst… d

rychlost chodce… v_p

rychlost cyklisty … v_c

Řešení v programu GeoGebra:

Obrázek 8: Řešení příkladu č. 11 v programu GeoGebra



Zdroj: vlastní tvorba v programu GeoGebra

QR kód 2: Řešení slovní úlohy o pohybu s objekty pohybujícími se proti sobě v programu GeoGebra

Zdroj: vlastní tvorba v programu GeoGebra

QR kód 2 odkazuje na řešení příkladu číslo 11 v programu GeoGebra. I zde jsou výchozí hodnoty nastaveny na zadání příkladu, ale snadno je lze uzpůsobit jinému zadání. Posuvník označený písmenem *d* udává vzdálenost dvou míst. Posuvník *vp* ukazuje rychlost chodce a posuvník *vc* rychlost cyklisty (obecně tedy jednoho a druhého objektu). Předpis $y = 5 \cdot x$ zobrazuje přímku s označením písmenem *p*, která má červenou barvu znázorňuje závislost dráhy na čase chodce, zelená přímka s označením *c* cyklisty. Tato přímka je daná předpisem $y = 19 - 15 \cdot x$. Průsečík těchto dvou přímek označuje místo setkání, tedy místo, kde se chodec a cyklista potkají. Jeho souřadnice jsou udávány v postranní liště v části „bod – C“. Jeho první souřadnice udává čas, za jaký se střetnou, druhá souřadnice vzdálenost, kterou urazí chodec (první objekt). Můžeme vidět shodné výsledky jak při početním řešení, tak při řešení v programu GeoGebra.

2.3.4 PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ (OBJEKTY SE POHYBUJÍ PROTI SOBĚ)

1. Z Pece pod Sněžkou na vrchol Sněžka vede pěší trasa dlouhá 6,5 kilometrů. Petr který na vrchol ráno vyjel lanovkou má v plánu dolu sejít pěšky. Z vrcholu dolů se vydá v 11:00 průměrnou rychlostí 4 km/h. Jeho kamarád Tomáš má opačný plán. V 11:00 vyráží z Pece pod Sněžkou pěšky na vrchol. Jde v průměru 4,5 km/h. V kolik hodin a jak daleko od vrcholu se oba kamarádi setkají?

2. Praha a Dubaj jsou vzdušnou čarou vzdáleny 4 500 kilometrů. Obě města spojují na pravidelné lince dva lety. Oba tyto lety startují ve stejný čas, jeden z Prahy, druhý z Dubaje. Let z Prahy letí díky příznivému větru rychlostí 890 km/h. Let mířící do Prahy letí rychlostí 800 km/h. Za jako dlouho od vzletu se obě letadla setkají?

3. Zapomnětlivý Zdeněk po dvou hodinách jízdy ujel 160 kilometrů. Zjistil však, že doma zapomněl notebook, který potřeboval. Vydal se tedy zpět domů stejnou rychlostí jako předtím. V ten samý okamžik se mu naproti vydala jeho manželka i s potřebným notebookem. Ta jela rychlostí ještě o 10 km/h vyšší než Zdeněk. Kolik kilometrů se nakonec bude muset Zdeněk vrátit?

2.4 VÝHODY A NEVÝHODY ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH O POHYBU POMOCÍ GEOGEBRY

V závěrečné fázi této práce zhodnotí autor vlastní tvorbu v programu GeoGebra. Zaměří se především na výhody a nevýhody řešení slovních úloh pomocí tohoto programu, a to jak z pohledu pedagoga, tak z pohledu žáka, kdy největším problémem při využití tohoto způsobu může být názornost a čitelnost řešení. Právě tyto problémy autor ukáže na vybraných příkladech č. 12 a 13.

Příklad č. 12: slovní úloha, jejíž řešení v programu GeoGebra je názorné: Města A a B jsou od sebe vzdálena 80 km. Jirka se stěhuje z města A do města B a na pomoc se stěhováním mu přišli dva kamarádi. Do plně naloženého auta se však vejde pouze Jirka a jeden z kamarádů. Proto se kamarádi rozhodli, že dva z nich vyrazí autem, které se pohybuje průměrnou rychlostí 80 km/h. Třetí z nich se mezitím vydá na cestu pěšky rychlostí 5 km/h. Řidič auta několik kilometrů před městem B vysadí spolujezdce, který bude pokračovat pěšky a řidič se vydá zpět pro druhého kamaráda. Všichni dorazí do města B současně. Kde má automobil vysadit prvního spolujezdce?

Nástin řešení příkladu č. 12:

<u>Zápis:</u>

Dolní index a označuje danou veličinu pro automobil, dolní index p pro chodce – pěší.

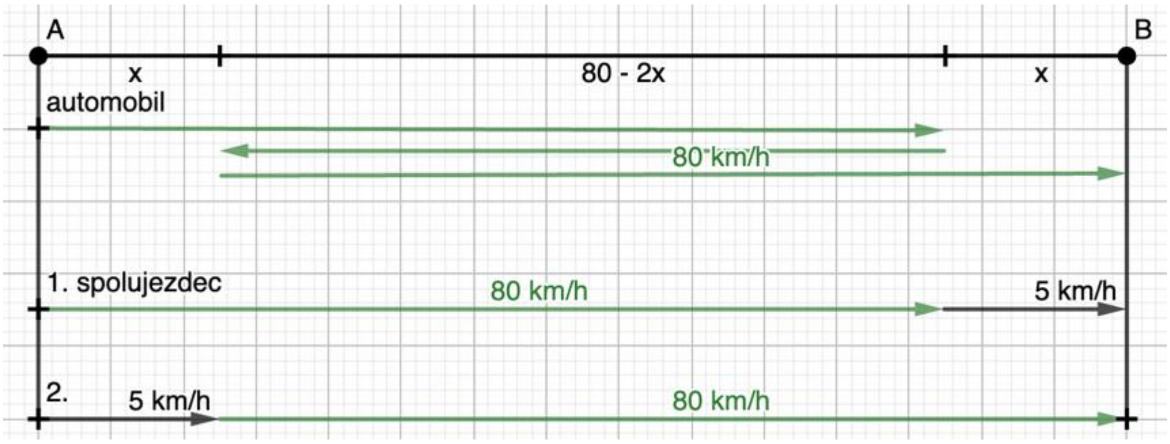
$s = 80$ km

$v_p = 5$ km/h

$v_a = 80$ km/h

Nástin početního řešení:

Obrázek 9: Grafické znázornění zadání slovní úlohy



Zdroj: vlastní tvorba v programu GeoGebra

Oba chodci stráví na cestě stejné množství času: t = $\frac{x}{5} + \frac{80-x}{80}$ h, chodec ujde x kilometrů rychlostí 5 km/h a zbytek cesty dlouhé 80 kilometrů pojede autem rychlostí 80 km/h.

Automobil stráví na cestě čas t = $\frac{x+3\cdot(80-2x)+x}{80}$ h, ujede tedy dráhu dlouhou s = x + 3· (80–2·x) + x po které se bude pohybovat rychlostí 80 km/h.

Tyto dvě rovnice pro čas chodce a čas automobilu se musejí rovnat. Vyřešením této rovnice dostaneme výsledek x = 8,42 km. Tento výsledek představuje vzdálenost od města B, kterou musí vysadit řidič prvního spolujezdce.

Slovní odpověď:

Řidic musí vysadit prvního spolujezdce 8,42 kilometrů před městem B.

Zápis parametrů pro program GeoGebra:

vzdálenost měst… d

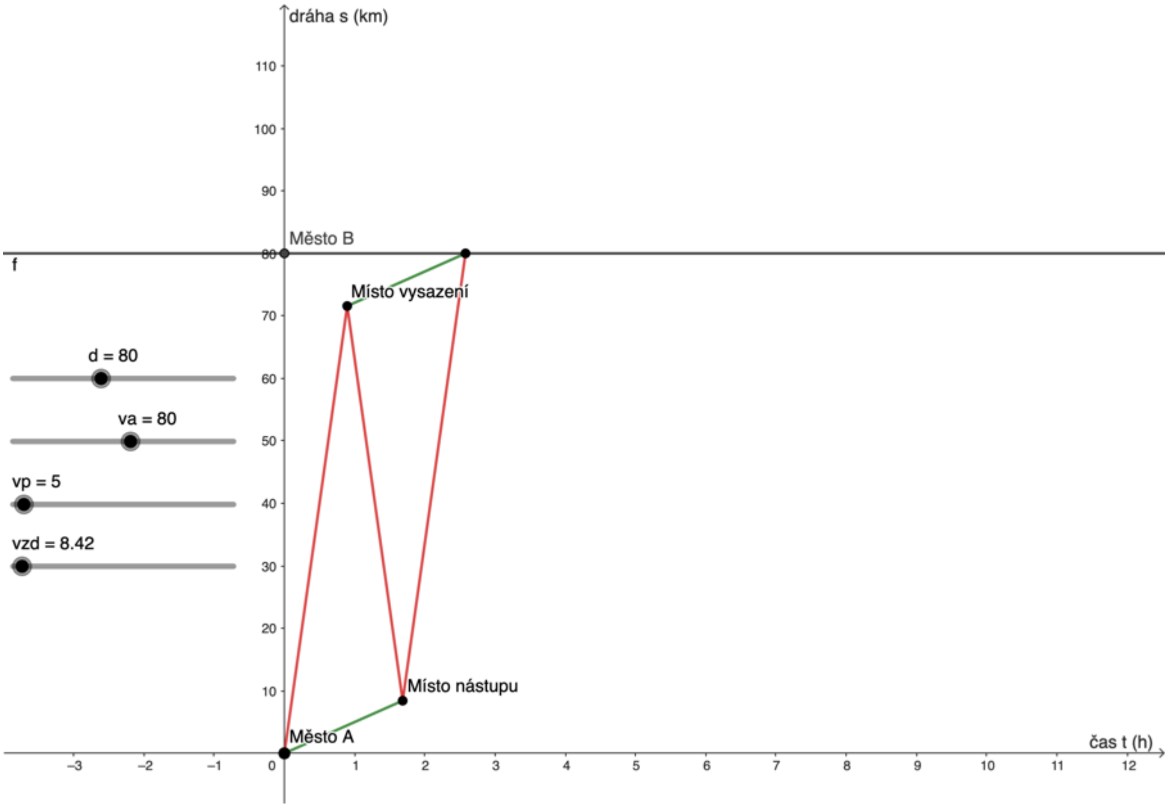
rychlost chodce… v_p

rychlost automobilu … v_a

vzdálenost před městem B… vzd

Řešení v programu GeoGebra:

Obrázek 10: Řešení příkladu č. 12 v programu GeoGebra



Zdroj: vlastní tvorba v programu GeoGebra

QR kód 3: Řešení příkladu č. 12 v programu GeoGebra

Zdroj: vlastní tvorba v programu GeoGebra

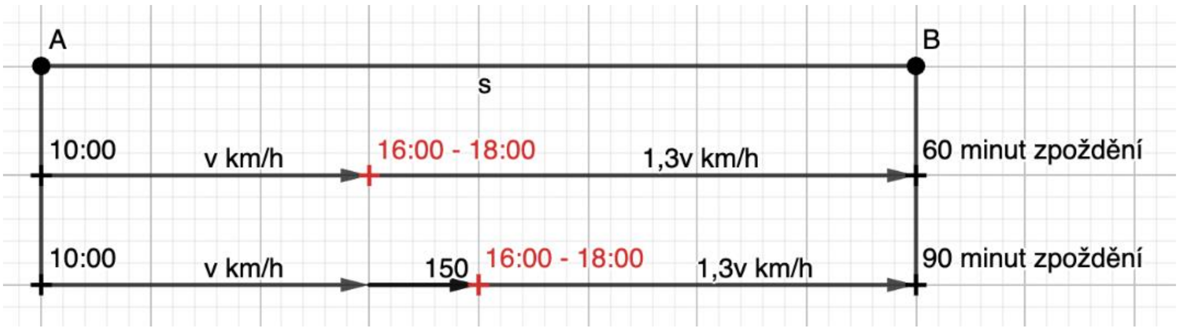
QR kód 3 umožní přístup k řešení příkladu č. 12. Použité předpisy pro znázornění závislosti dráhy na čase obou objektů byly $y = 80 \cdot x$ pro automobil *a* $y = 5 \cdot x$ pro chodce. Ve vytvořené simulaci je červenou barvou znázorněna dráha, kterou urazí osobní automobil, zelenou barvou dráha chodce. Názorně je zde ukázáno, jak automobil nejdříve urazí dráhu s prvním spolujezdcem, poté ho vysadí a začne se vracet zpět k městu A pro 2. spolujezdce, který mezitím vyrazil pěšky. V místě nástupu nabere řidič chodce a společně se vydají do města B. Mezitím se 1. spolujezdec vydal pěšky k městu B. Okamžik, ve kterém konečné body automobilu i chodce splynou, znamená, že oba dorazili do města B ve stejný okamžik. Vzdálenost, ve které řidič vysadí 1. spolujezdce lze upravovat posuvníkem *vzd* a tím lze najít potřebný výsledek.

Příklad č. 13: slovní úloha, jejíž řešení v programu GeoGebra není názorné: Autobus na pravidelné lince mezi městy A a B vyjíždí každý den v 10:00. V pondělí musel po 6 hodinách jízdy zastavit v koloně, která se znovu rozjela po dvou hodinách. Řidič navýšil svoji rychlost o 30 % aby dohnal ztracený čas. Díky tomu dojel autobus pouze s hodinovým zpožděním. Druhý den ten stejný autobus uvízl znovu v koloně, tentokrát však o 150 kilometrů dále od města A než v pondělí. Po dvouhodinovém zdržení opět pokračoval rychlostí vyšší o 30 %, do města B však dorazil se zpožděním 90 minut. Jak daleko jsou od sebe města A a B?

Nástin řešení příkladu č. 13:

<u>Nástin početního řešení:</u>

Obrázek 11: Grafické znázornění zadání slovní úlohy



Zdroj: vlastní tvorba v programu GeoGebra

Dráhy, které autobus ujel oba dny se musejí rovnat. Je proto potřeba nejdříve zapsat dráhy jednotlivých dnů

$s_1 = 6 \cdot v + 1{,}3 \cdot v \cdot [t - (6 + 2) + 1]$, autobus se pohybuje 6 hodin rychlostí v, zbytek celkového času t zmenšený o 6 hodin jízdy a 2 hodiny čekání, a naopak zvětšený o 1 hodinu zpoždění pokračuje rychlostí 1,3v.

$s_2 = 6 \cdot v + 150 + 1{,}3 \cdot v \cdot [t - (6 + 2) - \frac{150}{v} + 1{,}5]$, autobus se pohybuje 6 hodin rychlostí v a pak ještě o 150 km dále, zbytek celkového času t zmenšený o 6 hodin jízdy a 2 hodiny čekání a 150 kilometrů ujetých rychlostí v, a naopak zvětšený o 1,5 hodiny zpoždění pokračuje rychlostí 1,3v.

Výrazy v těchto rovnicích poté položíme sobě rovny a po vyřešení vzniknuté rovnice dostaneme výsledek v = 69,23 km.

Jednu z rovnic s_1, popřípadě s_2 položíme rovnou $v \cdot t$ (vztah $s = v \cdot t$ vyjadřuje ideální jízdu bez zpoždění nebo změny rychlosti). Vyřešením rovnice zjistíme že t = 10,33 h. Poté dopočteme výslednou dráhu, která se rovná s = 715,15 kilometrů.

<u>Slovní odpověď:</u>

Města A a B jsou od sebe vzdálena 715,15 kilometrů.

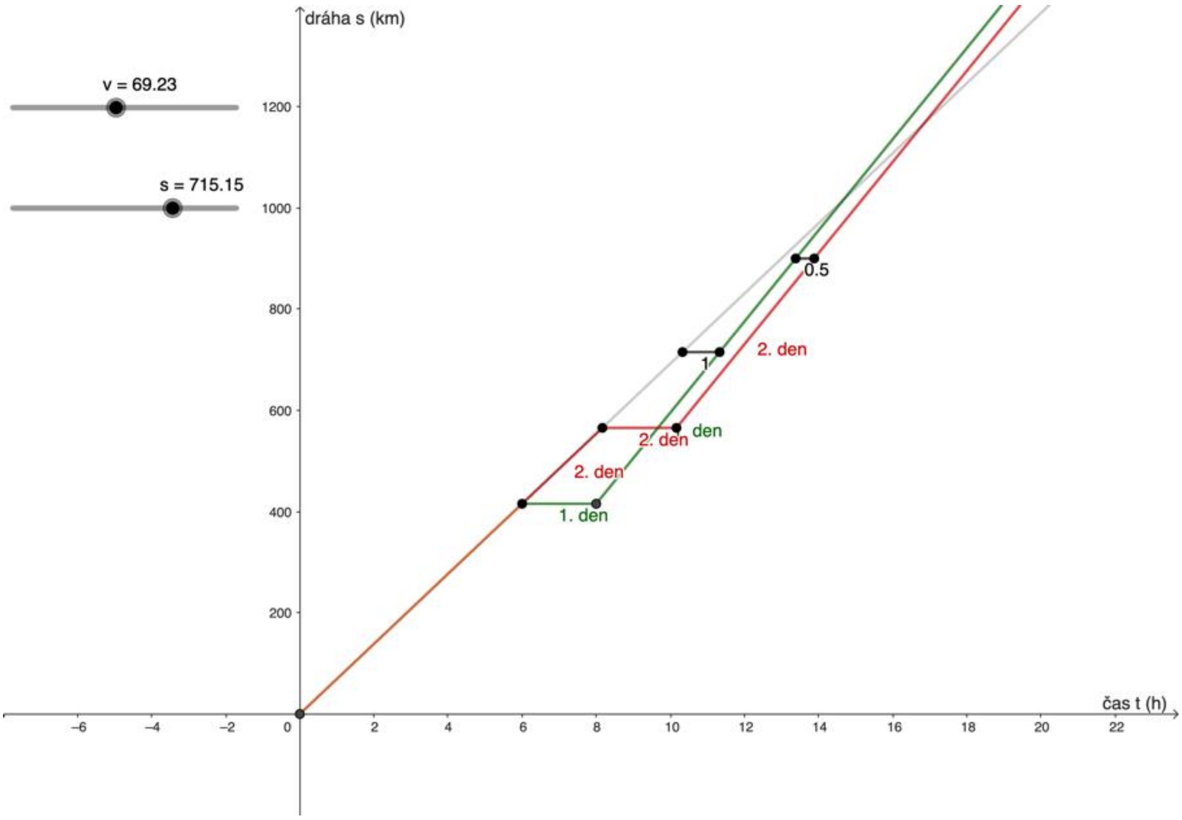
<u>Zápis parametrů pro program GeoGebra:</u>

vzdálenost měst… s

rychlost autobusu… v

Řešení v programu GeoGebra:

Obrázek 12: Řešení příkladu č. 13 v programu GeoGebra



Zdroj: vlastní tvorba v programu GeoGebra

QR kód 4: Řešení příkladu č. 13 v programu GeoGebra

Zdroj: vlastní tvorba v programu GeoGebra

Tento příklad je také vyřešený v prostředí GeoGebry. Použité předpisy pro znázornění závislosti dráhy na čase obou dnů byly $y = v \cdot x$ pro první den *a* $y = 1{,}3 \cdot v \cdot x$ pro den druhý. Oranžová linie ukazuje dráhu, kterou urazí autobus jak 1., tak i 2. den. Vodorovné úseky reprezentují čekání v kolonách jednotlivé dny, zelená barva = 1. den, červená = 2. den. Stejnými barvami jsou pak vyznačeny závislosti dráhy na čase po zvýšení rychlosti o 30 %. Pokud chceme nalézt řešení tohoto příkladu, není to tak jednoznačné. Je potřeba si uvědomit, že mezi zpožděním 1. a 2. den je rozdíl 0,5 hodiny a zároveň rozdíl mezi ideální jízdou (šedá linie) a zpožděním 1. den je 1 hodina. Proto měříme vzdálenosti mezi těmito polopřímkami a hledáme rychlost pro kterou bude splněna podmínka rozdíl zpoždění 0,5 hodiny a také hledáme vzdálenost při které bude zpoždění 1. den 1 hodina oproti situaci bez zpoždění.

Příklady i jejich samotné řešení jsou složitější než u příkladů řešených v této práci dříve. Cílem simulací je napomoci žákům při řešení i složitějších příkladů. Zde však může nastat problém co se týče názornosti a jednoznačnosti řešení. Zatímco u příkladu č. 12 lze jednoznačně vidět v řešení v programu GeoGebra trasy jak automobilu, tak pěších a snadno z toho vyčíst téměř na první pohled výsledek příkladu, u příkladu č. 13 tomu tak není. Zde jsou znázorněny závislosti dráhy na čase pro jednotlivé dny, řešení zde ale nelze poznat ihned. Je potřeba se více zamyslet nad zadáním příkladu a je důležité si uvědomit, jaký rozdíl musí být mezí zpožděními jednotlivých dnů a mezi 1. dnem a jízdou podle jízdního řádu. Řešení tohoto příkladu v GeoGebře tak působí zmateně, nepřehledně a složitě. Pro spoustu žáků by mohlo být snadnější příklad vyřešit početně oproti hledání řešení v simulaci.

Dalším možným problémem, se kterým by se mohli někteří pedagogové při práci s GeoGebrou střetnout, je jeho zdánlivá složitost a nepřehlednost. Nicméně, jak již bylo několikrát zdůrazněno, po krátkém seznámení s programem si většina uživatelů uvědomí, že tvorba v něm je překvapivě jednoduchá a intuitivní. Proto je, dle názoru autora, důležité motivovat pedagogy k tomu, aby překonali počáteční obavy a byli ochotni vytvářet pro své žáky podpůrné materiály například pomocí tohoto nástroje.

Tato práce byla vytvořena s cílem představit přínosy využití GeoGebry ve výuce. GeoGebra je skvělým nástrojem pro výuku geometrických témat, jelikož umožnuje snadno vytvářet jak jednoduché, tak i složité geometrické útvary a tělesa. Dále poskytuje prostředí pro intuitivní vysvětlení a demonstraci tvorby grafů funkcí a jejich změn v závislosti na konstantách.

Zaměření této bakalářské práce je především na řešení slovních úloh o pohybu, kde GeoGebra přináší velké množství výhod. Grafy závislosti dráhy na čase se zde vytvářejí překvapivě snadno a s pomocí posuvníků lze grafy upravovat podle různých zadání. Při pohybu více objektů ve slovní úloze je potřeba zobrazit více grafů. Ty je možné odlišit buď barevně nebo popisky. Snadné označení průsečíků více grafů okamžitě ukáže místo setkání daných objektů.

Výhody využití tohoto programu však nekončí jen v oblasti matematiky. Různé simulace mohou obohatit výuku a poskytnout žákům nové podněty. GeoGebra může sloužit jako interaktivní prvek v hodině, kde žákům umožní nejen měnit parametry úlohy, ale i třeba vytvořit samotné grafy.

Autor této práce by rád ve své pedagogické praxi společně se studenty vytvářel podobné simulace, což by jim mohlo pomoci naučit se hledat různé způsoby řešení, rozvíjet kreativní myšlení a pracovat ve skupině. Autor by také rád využíval existující simulace i v hodinách svého druhého oboru, geografie. Vhodné simulace se mohou týkat například vesmírných těles, vzdušných nebo vodních proudů či geologických procesů. Tento přístup by mohl zefektivnit výuku daných témat.

ZÁVĚR

Cílem této bakalářské práce bylo shrnutí informací o slovních úlohách a podrobnější seznámení se slovními úlohami o pohybu. Praktickým cílem této práce bylo vytvoření simulací vybraných slovních úloh v programu GeoGebra.

Jako první byl nadefinován pojem slovní úloha, následovaný výhodami a nevýhodami slovních úloh, jejich druhy a způsoby řešení. Jsou zde vysvětleny pro pedagoga důležité pojmy, po kterých autor definoval slovní úlohy o pohybu. Dále jsou uvedeny způsoby řešení úloh a jejich druhy. Vše je ukázáno na příkladech.

V druhé části práce se autor věnuje praktickému využití programu Geogebra při řešení slovních úloh o pohybu. Čtenář je krátce seznámen s daným programem, poté jsou uvedeny nezbytné kroky k vytvoření simulací. Pomocí těchto simulací jsou pak vyřešeny typové příklady slovních úloh o pohybu. Na závěr jsou shrnuty výhody a nevýhody tohoto způsobu řešení.

RESUMÉ

Tato bakalářská práce je věnována slovním úlohám o pohybu a jejich řešení v programu GeoGebra. Práce je rozdělena do dvou hlavních kapitol. V první kapitole je nadefinován pojem slovní úloha, popsán přínos slovních úloh pro žáky, jejich dělení a možné způsoby řešení. Dále jsou vysvětleny důležité pojmy pro pedagoga. Následuje definování slovních úloh o pohybu, ukázka jejich řešení a jejich druhy. Vše je ukázáno na vhodných příkladech. V druhé části autor nejdříve popisuje program GeoGebra, poté jsou uvedeny kroky, kterými se lze řídit při řešení slovních úloh o pohybu v tomto programu. Následuje vyřešení určitých příkladů pomocí simulací a na závěr autor popisuje výhody a nevýhody tohoto řešení v programu GeoGebra.

RESUMÉ

This bachelor thesis is devoted to word problems about motion and their solution in the GeoGebra program. The work is divided into two main chapters. In the first chapter, the term word problem is defined, the benefit of word problems for students, their division and possible solutions are described. Next, important terms for the teacher are explained. The following is a definition of word problems about movement, an example of their solutions and their types. Everything is demonstrated on suitable examples. In the second part, the author first describes the GeoGebra program, then there are steps to follow in solving motion word problems in this program. This is followed by the solution of certain examples using simulations, and at the end the author describes the advantages and disadvantages of this solution in the GeoGebra program.

SEZNAM LITERATURY

BLAŽKOVÁ, Růžena. Didaktika matematiky se zaměřením na specifické poruchy učení. Masarykova univerzita, Brno, 2007. ISBN 978-80-210-8673-9.

GEOGEBRA, 2024. Dostupné 22.4.2024 z: https://www.geogebra.org

KUŘINA, František. Umění vidět v matematice. Státní pedagogické nakladatelství, 1990.

KVETOŇ, Pavel. Kapitoly z didaktiky matematiky 1. Pedagogická fakulta, Ostrava, 1990. ISBN 80-7042-024-3.

NOVOTNÁ, Jarmila. Analýza řešení slovních úloh. Praha, 2000. ISBN 80-7290-011-0.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: MŠMT, 2023. [cit. 2024-03-02]. Dostupné z: https://www.msmt.cz/file/60264/

VERSCHAFFEL, Lieven. Word problems in mathematics education: a survey. FIZ Karlsruhe, 2020.

WIKIPEDIE, 2024. GeoGebra. Dostupné 22.4.2024 z: https://cs.wikipedia.org/wiki/GeoGebra

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ