

Posudek oponenta disertační práce

Doktorandka: RNDr. Michaela Zahradníková, FAV ZU v Plzni

Název disertační práce: Postupně vlny v kvazilineárních reakčně-difuzních rovnicích

Oponent: Prof. RNDr. Vlastimil Křivan, CSc., Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta JU v Č. Budějovicích

a) Zhodnocení významu disertační práce pro obor

Disertační práce se zabývá problematikou postupných vln (angl. travelling wave) ve zobecněných reakčně-difuzních rovnicích. Sir Ronald Fisher (Fisher 1937) ukázal, že kombinace difuze a logistického růstu vede k existenci speciálního typu řešení ve tvaru postupné vlny. Tento model Fisher použil pro popis šíření mutantní alely v prostoru. Otázky, které model evokuje se týkají existence postupných vln, jejich rychlosti, multiplicity a stability. Rychlost postupných vln je netriviální problém, protože je dána interakcí mezi difuzní konstantou a reakčním členem v diferenciální rovnici (např. v kontextu modelu Fishera se jedná o rychlost fixace mutantní alely). Ve stejném roce vyšel článek Kolmogorov et al. (1937), který se zabývá obecnější reakčně-difuzní rovnicí. Tyto práce ukázaly, že existuje nekonečně mnoho řešení pro danou rovnici v podobě postupných vln, odvodily minimální rychlost postupu těchto vln a to, že řešení "konvergují" k postupné vlně o minimální rychlosti. V populační ekologii se stejná rovnice používá pro popis šíření logisticky rostoucí populace v prostoru. V této souvislosti se v odborné literatuře zmiňuje šíření ondatry pižmové, která byla dovezena z Kanady hrabětem Colloredo-Mansfeldem a vysazena do rybníku u zámku Dobříš v roce 1905, kde má svůj pomníček. Odtud se začala šířit po Evropě, což bylo matematicky modelováno např. v práci Skellam (1951). Lze konstatovat, že Fisherova rovnice se stala jedním z pilířů populační genetiky a populační ekologie.

Fisherova rovnice byla zobecňována jak vzhledem k reakčnímu členu, tak i vzhledem k diferenciálnímu operátoru.

Kapitola 1 podává stručný přehled o některých zobecněních a dalších aplikacích uvedené teorie.

Kapitoly 2-5 se věnují zobecnění těchto výsledků pro model, kde v difuzním členu se vyskytuje p-Laplacián a koeficient difuze je jednak nespojitou funkcí (v konečném počtu bodů) řešení a jednak nemusí být omezený.

b) Vyjádření k postupu řešení problému, použitým metodám a splnění určeného cíle

Cílem práce byla analýza existence postupných vln ve zobecněné Fisherově rovnici a popis profilu této vlny. Metody práce jsou odpovídající dané problematice a ukazují dobrý přehled o daném tématu.

c) Stanovisko k výsledkům disertační práce a k původnímu konkrétnímu přínosu předkladatelky disertační práce

Práce navazuje na řadu výsledků, které postupně zobecňovaly předpoklady původního Fisherova modelu. Touto cestou se ubírá i disertační práce, která uvažuje závislost difuze na řešení. V práci je

tato závislost popsána po částech spojitou funkcí, která může mít i singularity v krajích bodech svého definičního oboru. Práce předpokládá tvar řešení ve tvaru postupné vlny, což umožňuje přepsat původní diferenciální rovnici na rovnici druhého řádu, která popisuje profil vlny. Vzhledem k tomu, že řešení není vzhledem k předpokladům dvakrát diferencovatelná funkce, v práci se definuje řešení v jistém slabém smyslu. Následně se problém za předpokladu monotonie profilu řešení převede na rovnici prvního řádu s okrajovými podmínkami. Protože se hledá nejenom řešení této rovnice, ale také parametr popisující rychlost šíření vlny, nejedná se o přeúčtenou rovnici. Metody použité v této části práce sice vycházejí z předchozích prací, ale byly velmi netriviálně modifikovány a představují tak zcela originální výsledky. Další části práce se zabývají velmi podrobným zkoumáním tvaru postupných vln. K tomu se používají horní a dolní odhady řešení. Jedná se opět o velmi technické a originální postupy.

d) Formální úroveň práce

Práce je velice dobře sepsaná, autorka zjevně věnovala psaní značnou péči.

e) Publikace

Doktorandka je spoluautorkou tří prací publikovaných v mezinárodních časopisech a jedna práce byla v době podání práce zaslána do tisku. Všechny tyto práce jsou indexovány např. v databázi Scopus a vztahují se k problematice studované v disertační práci. Publikační aktivitu považuji za zcela dostatečnou.

f) Závěr: Práci doporučuji k obhajobě bez výhrad.

Literatura:

Fisher, R. A. The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eugen.* 7 (1937), 355–369.

Skellam, J. G. Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika* 38 (1951), 196–218.

Kolmogorov, A., Petrovskii, I., and Piskunov, N. Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Bull. Univ. État Moscou Math. Mec.* 1 (1937), 1–26.

g) Případné dotazy na doktorandku

1. V práci je řada ilustrativních obrázků. Pokusila se autorka o numerické simulace, které by byly vhodným doplněním práce?
2. Na závěr autorka uvádí v krátkosti některé možnosti aplikací a případného dalšího rozšíření práce. Uvažuje autorka o tom, že by v dané problematice dále pokračovala a případně v jakém směru?

Prof. RNDr. Vlastimil Křivan, CSc.

Ústav matematiky, PřF JU v Českých Budějovicích

Oponentský posudek disertační práce
R.NDR. MICHAELY ZAHRADNÍKOVÉ
Postupné vlny v kvazilineárních reakčně-difuzních rovnicích.

Podstatná část disertační práce vznikla při řešení projektu GA ČR 22-18261S, jehož řešitelem je školitel uchazečky, která byla jistou část svého prezenčního studia také členkou řešitelského týmu. Většina výsledků zahrnutých do disertace byla již publikována v člancích:

- Drábek, P., Zahradníková, M.: Bistable equation with discontinuous density dependent diffusion with degenerations and singularities, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* **2021**, No. 61, 1–16.
- Drábek, P., Zahradníková, M.: Traveling waves for unbalanced bistable equations with density dependent diffusion, *Electron. J. Differ. Equ.* **2021**, No. 76, 1–21.
- Drábek, P., Zahradníková, M.: Traveling waves for generalized Fisher–Kolmogorov equation with discontinuous density dependent diffusion, *Math. Meth. Appl. Sci.* **64** (2023), No. 11, 12064–12086.

Nejnovější výsledky pak pocházejí z preprintu

- Drábek, P., Zahradníková, M.: Traveling waves in reaction-diffusion-convection equations with combustion nonlinearity,

který je zatím v recenzním řízení. Výsledků bylo dosaženo ve spolupráci "školitel - doktorandka", která probíhala podle obvyklého schématu. Podíl obou spoluautorů byl nezastupitelný a podle informace od školitele činil u každého 50%.

První kapitola je rozdělena do dvou částí: "motivace" a "state of the art" a je úvodem do problematiky i historického kontextu, ze kterých prezentované výsledky vycházejí.

V druhé kapitole je nejprve uvedena a objasněna definice řešení typu postupné vlny pro reakčně-difuzní rovnici druhého řádu s kvazilineárním difuzním členem. Pro případ monotonního profilu postupné vlny je tato rovnice dále s pomocí substituce inspirované podobným přístupem L. Sancheze a jeho spolupracovníků a adaptované na obecnější případ redukována na obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu. Tato redukce je východiskem pro důkaz existence (neexistence) postupné vlny a její rychlosti. Kapitola 3 je věnovaná studiu této rovnice. Byla tu dokázána některá nová tvrzení zatím neobsažená v dostupné literatuře. Klíčovou roli tu hrají srovnávací věty pro různé typy počátečních úloh a volba vhodných dolních a horních řešení.

Studována je tu i závislost vlastností řešení na rychlosti hledané postupné vlny. V další, čtvrté, kapitole jsou výsledky z kapitol 2 a 3 aplikovány na okrajovou úlohu na neohrazeném intervalu pro kvazilineární rovnici druhého řádu s nespojitým difuzním koeficientem a nehladkým reakčním členem.

Jádrem disertace je nejobjemnější, pátá, kapitola, která je věnována podrobné kvalitativní analýze profilu postupné vlny za předpokladu, že difuzní koeficient a reakční člen mají v rovnovážných stavech mocninový tvar. Autorka provádí podrobnou diskuzi tvarů postupných vln v závislosti na těchto mocninách a parametru $p > 1$. Tato diskuze je ilustrována názornými obrázky, které usnadňují orientaci v poměrně technicky komplikované problematice.

Poslední kapitola (6) se zabývá existencí a neexistencí řešení reakčně-difuzní rovnice s konvekcí. Na rozdíl od předchozích kapitol, kde jsou vyšetřovány různé typy reakčních členů (bistabilních i monostabilních), v této kapitole je uvažován reakční člen používaný v modelech spalování. Podobnými metodami jako v předchozích kapitolách jsou dosaženy nové výsledky, které ilustrují vliv konvekce na existenci, neexistenci a kvalitativní vlastnosti řešení typu postupné vlny za obecnějších předpokladů na difuzní člen než bylo doposud v literatuře prezentováno.

Metody zkoumání se opírají o standardní redukci parciální diferenciální rovnice na obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu za předpokladu, že se hledá řešení ve tvaru postupné vlny. Hlavním přínosem předložené práce je to, že její výsledky platí i v případech, kdy difuzní koeficient může být obecně nespojitou funkcí a může mít i singularitu či degeneraci ve stacionárních bodech 0 a 1. Navíc, difuzní operátor druhého řádu obsahuje členy typu p -Laplaciánu ($p \in (1, \infty)$). Studium takto obecných úloh bylo umožněno zobecněnou definicí řešení, která vychází z prvního integrálu příslušné rovnice pro profil postupné vlny. Výsledné řešení pak není řešením klasickým a ztráta jeho hladkosti kompenzuje nespojitost difuzního koeficientu a případně i singularitu či degeneraci v rovnovážných stavech. Díky tomu předložená práce zobecňuje všechny dosud známé příspěvky s podobnou tematikou.

Práce ale přináší nové výsledky nejen z hlediska matematického. Zároveň může být i zajímavou inspirací například pro biology, kteří mohou přesněji modelovat systémy s nespojitou, degenerovanou nebo singulární difuzí a vyhnout se nepřesnostem, které mohou vzniknout aproximací pomocí modelů s hladkými či spojitými daty.

Předložená práce představuje velmi pěkný příspěvek k dané problematice, která se jeví být dosti obtížná. Důkazy byly provedeny velmi pečlivě. V celé disertaci jsem našel jenom nepodstatné nedostatky. Např.

- na řádce 73₈ má být s_* místo θ ,
- výklad na řádcích 74¹⁰ – 74¹⁶ by byl podle mne přesvědčivější kdyby se na řádce 74¹⁰ psalo "Let \underline{z}, \bar{z} be such that" místo "... there exist ...".

Některá použitá značení mi jdou trochu proti srsti, ale uznávám, že se drží symboliky v dané problematice všeobecně zažitě. Ostatně, většina disertace byla pečlivě prověřena recenzním řízením v kvalitních a respektovaných časopisech. Autorku jsem měl také možnost sledovat při jejím vystoupení nazvaným "Front propagation in reaction-diffusion-convection equations with combustion nonlinearity" na mezinárodní konferenci WDETA v polském Będlewu. Její výklad byl dobře připraven i velmi srozumitelně a s pěkným ohlasem přednesen. Podle mne rozhodně prokazuje schopnost samostatné tvůrčí práce i pedagogický talent.

Předložená práce podle mne plně vyhovuje požadavkům obvykle kladeným na PhD disertace a doporučuji tedy disertační práci RNDr. Michaely Zahradníkové k obhajobě.

Pro obhajobu mne napadají následující otázky:

- Je něco známo o úlohách se singularitami v reakční části (případně s klasickou difuzí).
- V jakých konkrétních praktických úlohách se objevuje potřeba vzít v úvahu i obecnější, nehladké, difuzní operátory.
- Jaké otázky ještě zůstávají otevřeny a tudíž by si zasloužily další výzkum.

V Praze 3. 2. 2024

doc. RNDr. Milan Tvrdý, CSc.
oponent