Marie Benediktová Větrovcová

Filosofické aspekty al-Chvárizmího Aritmetického a Algebraického traktátu

Abstract
Al-Khwarizmi's books Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabal (The Book of Aljabr and Almuqabala) and Al-Kitab al-jam wa-t-tafriq bi-hisab al-Hind (a source for Dixit Algorizmi) form the origin of the mathematics of calculations, i.e. arithmetic and algebra. The first Czech translation of these books with the commentary by Petr Vopěnka was published in 2008. The 2nd edition (2009), involves the three new additional texts. The purpose of this contribution is an introduction to these source books with stressing out origins of Arabic mathematics of calculations and the border lines between the Indian and Greek mathematics. The paper deals with also some philosophical and methodical aspects of them.

Keywords: al-Kwarizmi, source texts of the mathematics, arithmetic, algebra, Arabic mathematics of the 9th century.
Klíčová slova: al-Chvárizmí, pramenné texty matematiky, aritmetika, algebra, arabská matematika 9. století.

1. Úvod

1.1 Zrod kalkulu

Starověká egyptská civilizace znala desítkovou soustavu – pro každou mocninu desítky až do deseti milionů měla zvláštní znak. Staří Sumerové a Babyloňané propojili šestkovou soustavu s desítkovou a počítali v šedesátkové číselné soustavě. Ještě v 5. století používal indický matematik Arjabhatta složité označování čísel pomocí slabik sanskrtu. Indie přitom pracovala s desítkovou číselnou soustavou. Ke zrodu aritmetického kalkulu s desítkovou *poziční* číselnou soustavou dochází patrně na začátku 7. století v Indii, přesná datace ale není nikde dochována. Najednou se místo zvláštního výsadního znaku pro desítku začaly objevovat znaky dva. Z původních zůstaly zachovány jen znaky označující čísla menší než deset a zavedla se tečka, později kroužek pro prázdné místo. Oproti nepozičním soustavám se tak potenciálně otevírá cesta k násobení a především dělení libovolně velkých čísel.[1] Tuto možnost však okryl a využil až Abu Abdalláh Muhammad ibn Músá al-Chvárizmí al Mádžúsí, zkráceně jen al-Chvárizmí, žijící na konci 8. a v první polovině 9. století.

1.2 Přínos al-Chvárizmího traktátů Evropě

V době 7. století začíná vzkvétat muslimská říše, sídelním městem se stává staroperský Damašek a dochází k prvnímu prolínání kultur – vládnoucí dynastie Abbásovců se totiž kromě Arabů ve své říši opírala i o Peršany, kteří přijali islám. Dochází tak k dalšímu stěhování sídelního města do Baghdádu. Vliv Persie znamenal i zájem o vědu a vzdělání. Chalíf al-Mamún, kráčející ve stopách svého otce, chalífa Háruna ar-Rašída, zde zřídil Dům moudrosti (Bajt al-hikmá), kde se soustředila většina islámských učenců. Hlavní náplní práce bylo soustřeďování, opisování a překládání do arabštiny spisů jak antické filosofie (a tedy i vědy), tak také prolínání s vlivy indickými. K antickým spisům se al-Mamún dostával přes Cařihrad nebo ze syrských či perských dřívějších překladů, ke spisům indickým převážně ze zdrojů perských.

Islámská vzdělanost se však obracela převážně ke kořenům antického Řecka, indickou vědu nedoceňovala. Proto al-Chvárizmí se svým bádáním v oblasti indické matematiky a astronomie nepatřil mezi nejprominentnější. Ve své době je znám převážně pro své astronomické výpočty a konstrukci astrolábu. Fakt, že v jejich pozadí stojí matematické zkoumání, byl tehdy opomíjen. Čas však ukázal, že jeho hlavními spisy byly tehdy nedoceněné traktáty, kterými se zasloužil o pozdější vývoj evropské matematiky a vzdělanosti. Dnes jsou tyto spisy známy jako *Algebraický traktát* a *Aritmetický traktát*.

Poznamenejme, že v téže době, kdy píše al-Chvárizmí svá pojednání, působí v Domě moudrosti také první překladatel Eukleidových *Základů* Ibn Júsuf ibn Matar al-Hajjáj (al-Hadždžádž) a jejich komentátor al-ᶜAbbás ibn Saᶜíd al-Džauhárí.[2] I o těchto pracech al-Chvárizmí téměř jistě věděl, ale v textech se na Eukleida (ani na indického učence Brahmaguptu) přímo neodkazuje, *Základy* pouze ve svých pracích používá.

1) O tom, že další aritmetické operace jako umocňování, odmocňování libovolných čísel či bohatá práce se zlomky bez desítkové soustavy je nesmírně náročná, prakticky neproveditelná, práce, se již není nutné příliš rozepisovat, zvláště uvědomíme-li si šíři spojení „práce s libovolně velkými (či malými) čísly".
2) Viz ŠIŠMA, Pavel, 2001, 156 či BEČVÁŘOVÁ, Martina, 2002, 40.

1.3 Jazyk jako předmět filosofického zkoumání

Ke zkoumání filosofického pozadí matematiky lze přistupovat z různých pozic. Vedle sledování určitých jednotících myšlenek, zrcadlení filosofického podloží a komparace určitého historického období filosofie a matematiky se můžeme zaměřit rovněž na sledování filosofie a dějin matematiky z hlediska vývoje jazyka. Během vývoje různých matematických disciplín se totiž vedle nových poznatků poměrně významným způsobem proměňuje i jazyk, kterým jsou tyto poznatky sdělovány, formulovány a dokazovány. Podle Ladislava Kvasze často určitý významný matematický objev byl možný teprve až změnou syntaxe nebo sémantiky jazyka matematiky.

> Ladislav Kvasz v (KVASZ, Ladislav, 2008) drží následujících šest aspektů jazyka matematiky:
>
> *logická síla*, která ukazuje, nakolik složité formule lze v daném jazyce dokázat;
>
> *expresivní síla*, která ukazuje, co nového, co v předešlých stadiích nebylo možné vyjádřit, nyní jazyk vyjádřit dovede;
>
> *explanatorická síla*, která ukazuje, jak nový jazyk umožňuje vysvětlit selhání jazyka, která byla v předešlém stadiu nepochopitelná;
>
> *integrativní síla*, která ukazuje, jak nový jazyk dovoluje vidět jednotu a pořádek tam, kde se na bázi předešlého jazyka ukazovaly pouze nesouvislé, ba až nahodilé, případy;
>
> *logické meze*, které přinášejí nečekaná a překvapivá ohraničení možností nového jazyka, omezení jeho schopnosti řešit určité problémy, anebo odpovídat na jisté otázky;
>
> *expresivní meze*, které se projevují tím, že i když se přísně dodržují syntaktická pravidla, v jazyce se začínají objevovat nesmyslné výrazy.

Vývoj jazyka spočívá v nárůstu logické a expresivní síly, protože jazyk umožňuje dokazovat stále více tvrzení a popisovat stále bohatší oblast jevů. Postupně narůstá i jeho explanatorická a integrativní síla, neboť jazyk umožňuje stále hlubší porozumění svým metodám a poskytuje tak ucelenější a jednotnější pohled na svůj předmět. Al-Chvárizmího traktáty nám slouží jako dílčí doklad tohoto vývoje v přechodu od jazyka geometrie k jazyku algebry a aritmetiky.

1.4 Metodologická poznámka

Metodicky jsou *oba* al-Chvárizmího traktáty psány tak, aby téma bylo vyloženo nejprve velmi stručně v obecném pojednání. Následuje několik názorných příkladů, které se snaží postihnout všechny případy, které mohou nastat. Samy příklady v *Aritmetickém traktátu* vlastně popisují algoritmus, jak počítat. Vždy postupuje názorně, od jednoduššího ke složitějšímu. O metodě, kterou al-Chvárizmí otevírá nový svět matematiky kalkulací, se můžeme podrobněji dočíst v (KNUTH, Donald E. (1980)). V případě *Algebraického traktátu* jsou příklady dokreslující a dokládající obecnou metodu, ne však tak důsledně jako v případě Aritmetického traktátu. Nelze si ale nevšimnout, že povahou se jedná o deduktivní metodu Eukleidových *Základů*.

2. Aritmetický traktát

2.1 Úvod

Al-Chvárizmího *Aritmetický traktát* je arabským uvedením do světa indického počítání s čísly největšími, ale i nejmenšími, jak se uvádí v preambuli. Jde však o čísla, která ač se zdají na první pohled do té doby dostupnými prostředky neuchopitelná, se mohou ukazovat ve všech svých plnostech. Jako zdánlivě nedostupná mohou vyvstávat před obzorem jako reálně jsoucí. Cílem traktátu je ukázat, jak tato velká (nebo velmi malá) čísla pojmout a pracovat s nimi i v praktickém životě. Vnitřním cílem je ale i uskutečnit k těmto číslům pouť, plně prožitou a plně vnímatelnou. Cesta, která je „hmatatelnou" stopou po této pouti, residuum, představuje počítání ve dvou číselných pozičních soustavách, desítkové (pro čísla kladná celá) a šedesátkové (pro zlomky). Pro Evropu se ale rovněž jedná o učebnici aritmetického kalkulu v těchto číselných soustavách, jejichž zárodky byly v Mezopotámii[3] dlouho zakořeněné, přesto se při svém psaní autor odvolává výhradně na Indy. Vrcholem traktátu je počítání se zlomky o libovolném základě (nejspíše vlastní al-Chvárizmího práce).

Původní arabský text se nedochoval a není ani znám jeho vlastní název.[4] Vycházíme proto z latinského textu často označovaného jako *Algoritmi de numero Indorum* (uváděno též jako *Kniha o indickém počítání*). Nejedná se však o přesný překlad, ale spíše o výklad al-Chvárizmího počinu soudobými prostředky (používání římských číslic, chybějící arabské figury i vlastní výpočty). Česká vydání AL CHVÁRIZMÍ (2008)

3) Viz BEČVÁŘ, Jindřich, BEČVÁŘOVÁ, Martina, VYMAZALOVÁ, Hana, 2003, 207-218. Al-Chvárizmí pracoval na svých traktátech v Bagdádu v Domě moudrosti (Bajt al hikma) na dvoře chálifa al Mamúna – srv. VOPĚNKA, Petr, 2009, 20 nebo ŠIŠMA, Pavel, 2001, 156.

4) Al-Chvárizmího arabsky psaný spis se patrně jmenoval al-Kitab al-džam^{c} wa-l-tafrígh bi-hisáb al-Hind, tj. Kniha o sčítání a odčítání podle indického počtu – viz CRISTANNUS DE PRACHATICZ, 1999, X.

a AL-CHVÁRIZMÍ (2009) jsou pořízena překladem z ruštiny. Uzbecké vydání v ruštině vzniklo překladem z latiny na základě rukopisu uloženého v knihovně University of Cambridge.[5] Dodejme ještě, že oproti prvnímu českému vydání (AL CHVÁRIZMÍ (2008)), které obsahuje komentář a překlad latinského textu, je do druhého vydání (AL-CHVÁRIZMÍ (2009)) mimo jiné zařazen i pokus o rekonstrukci původního arabského textu (BENEDIKTOVÁ VĚTROVCOVÁ (2009)).

Poznamenejme (a připomeňme), že *Aritmetický traktát* stojí na počátku teorie algoritmu. Koneckonců i vlastní slovo algoritmus pochází z latinizované podoby al-Chvárizmího jména Algorizmi – úvodní pasáže traktátu latinského vydání totiž začínají slovy „Dixit Algorizmi" – Algorizmi pravil.

Stejně jako Eukleidovy *Základy* stojí na počátku geometrie a deduktivní metody, je i al-Chvárizmího *Aritmetický traktát* dalším pramenným textem základů evropské vzdělanosti, který společně s *Algebraickým traktátem* přinesl Evropě symbolické počítání.

2.2 Čtení Aritmetického traktátu

Jak je uvedeno v (VOPĚNKA, Petr, 2009), Indové uměli bravurně počítat s velkými čísly. Al-Chvárizmího to natolik zaujalo, že chtěl vstoupit do tohoto světa a svým pojednáním je tak zprostředkovat i ostatnímu (rozumějme arabskému) světu.[6] Postupuje přitom systematicky a názorně tak, aby vše, o čem píše, měl již náležitě odhalené.

Al-Chvárizmí nejprve představí východoarabskou i západoarabskou podobu číslic. Aby ale číslice nebyly pouhými symboly pro nic, hledá podstatu čísel, kterou opírá o číslo jedna.

2.2.1 Ontologický status jedna a čísla

Musíme si uvědomit, že obzvláště pro aritmetiku je důležité si ujasnit, co je jednotka, co je číslo. „Pro zkoumání ze všeho nejobtížnější a pro poznání pravdy nejnaléhavější je otázka, zda jsoucno a jedno jsou podstatami věcí, zda každé z nich, aniž je něčím jiným, je jednak *jedním*, jednak *jsoucnem*, či zda je třeba dále zkoumat, co je jsoucno a jedno, nemají-li podmětem jinou podstatu."[7] *Ontologický status jednotky* al-Chvárizmí velice pečlivě uchopuje a snaží se jednotku ukotvit:

5) Srovnání tohoto vydání a pozdějších al-Chvárizmímu podobných traktátů Algorithmi de numero indium a Liber Algorismi de pratica arismetrice, vydaných souhrnně v Římě roku 1857, najdeme v KARPINSKI, Louis C., 1921.

6) „Prakticky každá vyspělejší civilizace si vytvořila vlastní číselný systém, který umožňoval převést úlohu počítání na úlohu manipulace s číselnými znaky." KVASZ, Ladislav, 2008, 18.

7) Metaphysica B 4 1001a5. Citováno dle ARISTOTELÉS, 2003, 93. Srov. „jsoucí a jedno jsou slova, která se navzájem provázejí a mají společné významové osudy" – PATOČKA, Jan, 1994, 69.

„Každé číslo je složené z jednotek. [...] Jednotka je základ každého čísla a leží vně čísel. [...] Ona určuje každé číslo. Vně čísel je proto, že je určena sama sebou. [...] Ostatní čísla se bez jednotky nemohou vyskytovat. [...] Tedy číslo není nic jiného, než soubor jednotek."[8]

Tomu rozumějme i tak, že jednotka jako jediné číslo má smysl sama o sobě, nepotřebuje nic víc dodat, aby mohla být, nevyžaduje ontologické dourčení „čeho počet". Jednotka má v sobě jistotu, protože o ní lze říci, že pokud je, tak je nutně. Číslo jedna (z dnešního pohledu) pro něj tedy ještě není plnohodnotným číslem.[9] Al-Chvárizmí tak zastává pozici nastolenou řeckou matematiku, pro kterou jedna ještě číslem jako počtem není.[10]

Eukleides totiž v *Základech* říká:[11] „Jednotka jest, dle níž každé věci se říká jedna. Číslo pak jest množství složené z jednotek." Tradice řecká pramení z názorů Empedokleových, „který říká, že jedno jest".[12] Na to navazuje Aristotelés: nebylo-li by číslo podstatou, ani číslo nemůže být druhem podstatnosti, odloučenou od věcí. „Neboť číslo je z jednotek, jednotka však je tolik co jedno."[13] Podle Jana Patočky se máme na Aristotelovy protiklady dívat nejen na bytí – nebytí, ale i na jednotu – mnohost.[14]

Středověká Evropa s ustavením čísla ještě stále zastává řeckou tradici. Ani pro Isidora ze Sevilly ještě jednotka není číslem:[15]

„Číslo je množství vytvořené z jednotek; neboť zárodkem čísla je jednotka, nikoli číslo. Číslu *(numerus)* dal název *nummus* (peníz) a toto slovo se zavedlo jeho častým užíváním." Připomeňme, co je přitom předmětem matematiky: abstraktní množství, tj. to, o čem „pojednáváme pouhým uvažováním, oddělujíce je rozumem od látky či jiných případků".[16]

U Křišťana z Prachatic lze vystopovat drobný sémantický posun:[17]

8) Viz AL-CHVÁRIZMÍ, 2009, 112.

9) Ačkoli dělá al-Chvárizmí velký rozdíl mezi podstatou jednotky a čísla, dovolíme si psát o jednotce jako o číslu, protože při zápisu pomocí číslic a vlastním počítání s ní jako s číslem pracuje. Podle Ladislava Kvasze (KVASZ, Ladislav, 2008, 17) má matematika sama tendenci svůj jazyk dodatečně vylepšovat a rozšiřovat a (dnes) za základní číselný obor bere komplexní čísla v jeho plnosti.

10) Viz Servítova poznámka (SERVÍT, František, 1907, 103) doprovázející výměry VII. knihy Eukleidových Základů).

11) Viz SERVÍT, František, 1907, 103.

12) Metaphysica B 4 1001a14. Citováno dle ARISTOTELÉS, 2003, 93.

13) Metaphysica B 4 1001a24. Citováno dle ARISTOTELÉS, 2003, 93–94.

14) Viz PATOČKA, Jan, 1994, 71.

15) Viz ISIDOR ZE SEVILLY, 2000, 283.

16) Viz ISIDOR ZE SEVILLY, 2000, 281.

17) Viz CRISTANNUS DE PRACHATICZ, 1999, 17.

„Číslo není nic jiného než shromážděné jednotky (*tato definice chápaná materiálně znamená souhrn jednotek, avšak chápaná formálně znamená množství složené z jednotek*). Jednotka (*totiž ona sama*) však (*ale*) je to, čím se o každé věci vypovídá (*tj. o jakékoliv přirozené věci či o věci jí podobné*), že je (*totiž formálně*) jedna (*tj. jedinečná*)."

Dodejme ještě, že ohledně ustanovení jednotky se al-Chvárizmí odvolává na svůj dřívější *Algebraický traktát*, nicméně zde je s výkladem preciznější.

Čísla, která následují, jsou vyčíslována *potenciálně do nekonečna*. Nekonečnost čísel v potenci al-Chvárizmí uvažoval a nebál se jí. Zacházení s čísly pomocí poziční desítkové soustavy, převzaté od Indů, se jevilo v té době jako revoluční. *Nula jako číslo* není uvažována vůbec. Pro vyjádření nuly v pozičním systému užívá symbol kroužku. Postavení, které má jednotka, se nule ještě zdaleka nedostává. Naopak z dnešního pohledu jsou nula i jednotka z hlediska aritmetiky rovnocenně významnými entitami – jsou to konstanty algebraického kalkulu.[18]

2.2.2 Syntax a sémantika čísla

Pro čtení *Aritmetického traktátu* je nutné si uvědomit, jakým způsobem jsou zde čísla vyjadřována. Číslo má jednak svou syntaktickou podobu, znak, ale i svůj význam, sémantiku. Tu v textu vidíme jako slovní zápis čísla. Sémantika čísla znamená skutečný počet (věcí) ve světě jsoucí. Skutečnost, jak to s číslem ve světě vlastně je. Takže *Aritmetický traktát*, ačkoli by se na první pohled dnešníma očima mohlo zdát, že je triviální příručkou kalkulu, který obsáhne žák prvních pěti ročníků povinné školní docházky, je vlastně uvedením do světa, kde lze najednou velká (a zároveň na druhou stranu velmi malá (kladná, nule blízká)) čísla i vidět.

Al-Chvárizmího převzatý zápis pozičně sledoval sémantiku čísel (kolik jednotek, desítek, tisíců, desítek tisíců, stovek tisíců, tisíců tisíců, ..., tisíců tisíců tisíců, ...). Při čtení překladu latinského textu psaného pomocí římských čísel nám připadá, že se směšuje psaní čísel s jejich výkladem. V původním textu nejspíš tyto (římské, ale ani jiné) číslice nebyly, protože se nejprve pojednává o zavedení pojmů jednotlivých čísel (sémantika), a teprve poté jde o psaní čísel pomocí znaků (syntax). Římská čísla/číslice jsou tedy zde (podobně jako v jiných středověkých textech) zkratkou pro slovní zápis čísel, který s velkou pravděpodobností byl v arabském originále. V textu se vedle toho vyskytují místy i indo-arabská čísla. Ne však všude, kde v původním textu zřejmě byla. Tam, kde byl zápis syntaxe pomocí indo-arabských čísel pro překladatele z arabštiny do latiny příliš náročný, není totiž v latinském textu uvedeno nic.

18) Petr Vopěnka dokonce uvádí popis arabského algebraického kalkulu (pouze s konstantou), který upravuje na indický (algebraický kalkul) přidáním konstant a . – VOPĚNKA, Petr, 2009, 65–76.

2.2.3 Zapisování čísel

Al-Chvárizmí přebírá od Indů devět znaků pro jedničku a čísla do devíti, a navíc ještě desátý znak pro vyjádření prázdné pozice (řádu) má kroužek. Prostřednictvím zápisu do poziční desítkové soustavy, který se dodnes učí na začátku výuky matematiky, mohl uchopit velká čísla velmi rychle a snadno. Na rozdíl od dnešní zvyklosti čísla psal zprava doleva. Konkrétně zápis je velmi efektivní zkratkou za vyjádření jednotek, desítky a stovky (ve stejném smyslu jako jablek, hrušky a švestky). Způsob zapisování čísel je uzavřen sémantikou řádů v příkladu zápisu čísla .[19] Tento příklad je zdánlivě temný, ale zřetelně podán proto, aby bylo vidět, že i takto velká čísla jsou před obzorem a není problém je uchopit jako jsoucí, nejen jako syntaktickou zkratku něčeho, co si nelze představit. Záměrem al-Chvárizmího tedy bylo uchopit a mít možnost pracovat s do té doby nemyslitelnými velkými čísly jako s čísly běžnými. Ustavením desítkové poziční soustavy u al-Chvárizmího je vyjádřena podle Ladislava Kvasze expresivní síla jazyka.[20] Algoritmy, které následují, předznamenávají písemné počítání, které nejspíše Indové prováděli zpaměti.

2.2.4 Sčítání a odčítání velkých čísel

Následuje pojednání o tom, jak velká čísla sčítat a hlavně odčítat – dnešními slovy tedy písemně sčítat a odčítat. Písemné sčítání se al-Chvárizmímu jevilo jako neproblematické.[21] Uvádí pouze obecné poučení, příklady na rozdíl od metody odčítání neuvádí. U výběru příkladů pro odčítání se však zastavme, zdá se být pozoruhodný:

Nejprve odečítá polovinu čísla, jehož všechny řády jsou sudé:

$$\begin{array}{r} 6422 \\ -\underline{3211} \\ 3211 \end{array}$$

Je zřejmé, že umět udělat polovinu, bylo pro tehdejší svět velmi důležité. Navíc je zde skrytý fakt (dnešní symbolikou)

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Tato polovina je přitom ideální, dosažená však nikoliv konstrukcí, ale čistým kalkulem. Druhý příklad dokládá, jak pozice v zápisu fungují. Dnešní symbolikou 1144 - 144 = 1000.

19) AL-CHVÁRIZMÍ, 2009, 117–118.
20) KVASZ, Ladislav, 2008, 20.
21) Poznamenejme, že Křišťan z Prachatic už důsledně přičítá menší číslo k většímu, protože je to podle jeho komentáře snazší. Při sčítání kombinuje pamětné sčítání jednotek se sčítáním psaným. V komentáři se k tomu dočteme: „Sčítání je tedy jakási duševní činnost a existuje v duši subjektivně a v čísle objektivně, a proto je číslo subjekt čísla a objekt duše." – CRISTANNUS DE PRACHATICZ, 1999, 35.

Pro názornost a porozumění jsou dnešnímu čtenáři zápisy pomocí číslic v desítkové poziční soustavě nezbytností. Nebylo to však samozřejmostí. Třetí příklad totiž v překladu latinského textu chybí, jednalo se zřejmě o odčítání s přechodem přes desítku. Petr Vopěnka v komentáři uvádí 952 - 874 = 78.
Podobný příklad zřejmě však součástí traktátu byl.

Než se pustíme dál, je nutno si uvědomit, že metoda sčítání a odčítání se zde sice vykládá na běžně užívaných číslech, přesto ji lze aplikovat pro *libovolně velká* čísla (například přesné vyčíslení hrubého domácího produktu do jedné koruny jakožto součet peněžních hodnot všech ekonomických statků a služeb vytvořených za dané období na území České republiky). To se ovšem na úrovni primárního vzdělání nečiní, žáci to neprovádějí z důvodů časové náročnosti. Odpověď je pragmatická – nepotřebují to, „na to přece máme počítače".

2.2.5 Půlení a zdvojení čísla

Text pokračuje půlením a zdvojením čísla. Předpokládá se přitom znalost půlení sudého čísla (rozpůlení osmi, šesti, čtyř a dvou). Při půlení lichého čísla se dělí nejbližší nižší sudé číslo a jednotka se půlí na $\frac{30}{60}$ (tj. 30 minut). Al-Chvárizmí se přímo věnuje až *půlení* čísel větších než , přičemž dělení řádu řeší pomocí kroužku a čísla pět.

Dvojnásobek čísla provádíme od vyššího řádu k nižšímu. Aby byla metoda korektní, pak při překročení desíti musíme povýšit předchozí (tj. vyšší) řád o jedna.

2.2.6 Násobení libovolných čísel

Po dvojnásobku následuje poučení o *násobení libovolných čísel*, čímž se rozšiřuje pojednání z *Algebraického traktátu* (viz dále). Zde je však popsán postup, jak (písemně) násobit v desítkové poziční soustavě od vyšších řádů k nižším (příklad má 2326 · 214 = 497 764). Abychom byli více přesvědčeni o správnosti postupu (nikoli o pravdivosti názoru), uvádí al-Chvárizmí tzv. *devítkovou zkoušku*.[22]

2.2.7 Dělení velkých čísel

Al-Chvárizmí dodává i algoritmus pro dělení (v oboru kladných přirozených čísel). V latinském textu, který je zdrojem pro české vydání (AL CHVÁRIZMÍ, 2008), je však velmi ledabylé. Obsahuje pouze obecný popis, příklady se překladem z arabštiny do latiny nejspíš ztratily. Proto v druhém vydání (AL-CHVÁRIZMÍ, 2009) je dělení rozvedeno do algoritmické podoby tak, aby bylo v souladu se způsobem algoritmů, který dosud al-Chvárizmí užíval.[23] V (AL-CHOREZMI, 1983, 165-167) je k dělení i další komentář.

22) Srv. VOPĚNKA, Petr, 2009, 34 a AL-CHVÁRIZMÍ, 2009, 124–125.
23) Viz BENEDIKTOVÁ VĚTROVCOVÁ, Marie, 2009, 97–102.

2.2.8 Zlomky

Pokud se al-Chvárizmí věnuje zlomkům, je si sice vědom, že mohou mít různé základy, přesto začíná nejprve tzv. indickými, tj. šedesátinami. Činí tak zřejmě i z tradice mezopotamské. Je si zároveň vědom *potenciálně nekonečného množství zlomků* ve smyslu reciprocity potenciálně nekonečného množství čísel (kladných přirozených). Zlomkům o jiných základech, které v úvodu k počítání se zlomky předznamenává, se věnuje v závěru svého pojednání.

Se *zlomky založenými na šedesáti* zachází stejně elegantně jako s čísly kladnými přirozenými. Z dnešního pohledu s nimi zachází způsobem, jakým se vyučuje práce s úhlovou mírou. Používá pro to šedesátkovou soustavu zapisovanou pomocí čísel vyjádřených v desítkové poziční soustavě. Jednotlivé řády následující jednotky směrem k nižším pak jsou minuty, sekundy, tercie, kvarty, kvinty, sexty, atd.

Samotné počítání se zlomky představuje *násobení a dělení*. Al-Chvárizmí nejprve násobí zlomky celým číslem (stupněm), pak následuje násobení zlomků (vlastních i nevlastních) mezi sebou. Podobně jako s velkými čísly je potřeba i zde dávat pozor na řády a pro prázdný řád užívat kroužek. Vzhledem k tomu, že na závěr násobení al-Chvárizmí poznamenává, že zná i jiný způsob, jak násobení zlomků provádět, nebyl tento způsob buďtak efektivní, nebo akceptovatelný, jako ten, který popsal, tj. postup, který používali Indové při svém počítání. Při dělení čísel, z nichž jedno je necelé, je důležité umět převádět čísla do stejných řádů (až na úroveň toho nejnižšího).

Teprve až po násobení a dělení provádí sčítání, odčítání a zdvojení čísel – zlomků (opět od nejvyššího řádu k nejnižšímu, jak běžně počítáme zpaměti).

Aritmetický traktát je v českém vydání (AL CHVÁRIZMÍ, 2008) i (AL-CHVÁRIZMÍ, 2009) uzavřen prací se *zlomky o jiných základech*.

Slibované pojednání o *odmocňování* chybí. Možná ani součástí původního textu nebylo, protože bylo odvoditelné z algebry a almukabaly (obsažených v *Algebraickém traktátu*). Pozdější aritmetické traktáty ho ale běžně uváděly.[24]

2.3 Jazyk Aritmetického traktátu

Jazyk Aritmetického traktátu je stále ještě *neexplanatorický*, neumožňuje vyjádřit všeobecnost a není v něm možné vysvětlovat, pouze ukazovat. To, čím je *Aritmetický traktát* pro svou dobu přelomový, je ale *změna v integrativní síle* jeho *jazyka*.[25] Nejedná se už o pouhý souhrn úloh nejrůznější povahy bez jednotícího prvku jako u egyptské či mezopotamské matematiky,[26] ale o první črty vysvětlení matematické podstaty problému.

24) Srv. CRIASTANNUS DE PRACHATICZ, 1999, 98–125; zde nikoli ve tvaru výpočtu či algoritmu, ale pouze se slovním popisem.
25) Srv. KVASZ, Ladislav, 2008, 21.
26) Příklady viz BEČVÁŘ, Jindřich, BEČVÁŘOVÁ, Martina, VYMAZALOVÁ, Hana, 2003.

2.4 Aritmetický traktát jako kosmologický spis

Karl R. Popper přisuzuje Eukleidovým *Základům* povahu kosmologického spisu.[27] Své tvrzení zakládá na přesvědčení, že Eukleidovy *Základy* nejsou učebnicí geometrie, ale systematicky (deduktivní metodou založenou v názoru geometrie) řeší hlavní problémy Platónovy kosmologie obsažené v *Timaiu*. Vrcholem obou spisů jsou vlastnosti pravidelných mnohostěnů, tzv. platónských těles. V *Timaiu* se jedná o vlastnosti kosmologické, v *Základech* o vlastnosti geometrické. Navíc Karl R. Popper své tvrzení opírá i o to, že každá kosmologie a fyzika spíše než aritmetika ve svém fundamentu hledá geometrické odůvodnění podstaty.

Z tohoto hlediska al-Chvárizmího *Aritmetický traktát* povahu kosmologickou nemá – nejedná se přece o geometrii, ale o aritmetiku. Ovšem domníváme se, že pro al-Chvárizmího je devět čísel (jedna až devět) základními stavebními prvky – stoicheia/elementy, ze kterých lze cokoli získat, a to nejen v oboru aritmetiky. Každé má své bytí jako jednotka (o povaze jednotky viz odstavec 1.2.1), čísla do devíti (včetně) jsou považovány za jednotky a každé číslo je složené z jednotek:

„Když jsem uviděl, že Indové sestavili z devíti číslic – díky jimi stanovenému rozložení těchto znaků – libovolné dané číslo, pojal jsem přání odhalit, bude-li se to Bohu líbit, co lze získat užitím těchto číslic pro ulehčení práce s čísly. Pokud Indové chtěli právě to a smysl pro ně obsažený v těchto devíti znacích byl týž jako ten, který se i mně odkryl, pak Bůh mě k tomu přivedl. Jestli ale oni to činili z jiného důvodu kromě toho, který jsem já ukázal, pak z mého výkladu pozorný zájemce nepochybně a přesně i tento důvod snadno odkryje."[28]

Poznamenejme zde, že kosmologický *Timaios* má vedle geometrického základu i aritmetický podklad devíti sfér, který přebírá od pythagorejců.

Aritmetický traktát se uvádí jako učebnice aritmetického kalkulu,[29] ale stejně jako Eukleidovy *Základy*, doprovázející Platónova *Timaia*, se na text můžeme dívat jako na nedokonaný kosmologický spis. Pravým a jediným kosmologickým textem je pro islám *Korán*, nicméně preambulační súra al-Fátiha započíná i *Aritmetický traktát*:

„Ve jménu Boha milostivého, slitovného,
Chvála Bohu, Pánu lidstva veškerého,
Milosrdnému, Slitovnému,
vládci dne soudného!
Tebe uctíváme a Tebe o pomoc žádáme,
veď nás stezkou přímou,

27) Viz POPPER, Karl R., 2002, 116–118.
28) Viz BENEDIKTOVÁ VĚTROVCOVÁ, Marie, 2009, 86.
29) Viz VOPĚNKA, Petr, 2009, 23.

stezkou těch, jež zahrnuls milostí Svou, ne těch,
na něž jsi rozhněván, ani těch, kdo v bludu jsou",

který tak můžeme považovat za kosmologický spis z historického hlediska, nikoli z hlediska Karla R. Poppera. Hovoří pro to i fakt, že text byl ve své době vedlejším, na druhou stranu ale ústředním (a to nejen z našeho pohledu) produktem pro porozumění al-Chvárizmího astronomické práci *Zij al-Sindh* v Baghdádu.[30] Kromě toho zapracoval do kosmologického Ptolemaiova *Almagestu* svá pozorování a společně s výpočty prováděnými „po způsobu Indů" dal islámské vědě novou netradiční metodu studia kalkulací pro astronomii.

2.5 Metodická poznámka a povaha *Aritmetického traktátu*

Jak bylo uvedeno v poznámce 1.3, spis vedle obecného popisu kalkulu a metody, jak se dobrat dalšímu (tj. algoritmů), obsahuje i doprovodné příklady. Ty jsou z velké části jak ilustrativní a dokládající správnost algoritmů, tak také nástinem povahy aritmetiky obecně. Al-Chvárizmí totiž volí příklady nejen od nejjednodušších ke složitějším, ale rovněž i podchycující a dokládající (i když ne vždy přímo explicitně v obecnosti) jisté jevy a vlastnosti arabské aritmetiky, nového kalkulu.

3. Algebraický traktát

3.1 Úvod

Algebraický traktát je text starší, *Aritmetický traktát* předurčuje, ale zároveň i doprovází. Je pomůckou, jak se na svět čísel dívat co nejjednodušeji. Jedná se o praktickou příručku, jak s čísly jako pomocníky zacházet „při dělení majetků, v záležitostech soudních, v obchodě, při uzavírání smluv a také při vyměřování půdy, vedení kanálů, ve stavitelství a při nejrůznějších jiných pracích".[31] Pojednává o číslech jako veličinách geometrických obrazců tak, aby pomohla řešit jednoduché otázky aritmetiky, ty složitější pak spadají do *Aritmetického traktátu*, kde se jim al-Chvárizmí věnuje systematicky a s utvořením metody – příslušného algoritmu.

Text se nám zachoval v arabštině jako *Al-Kitáb al-muchtasar fí hisáb al-džebr wa-l-muqábala*, v latinském překladu jako *Liber algebrae et almucabalae continens demontrationes aequationum regularum Algebrae* (autorství je připisováno Robertu z Chesteru).

30) Srv. VOPĚNKA, Petr, 2009, 21-23.
31) Viz AL-CHVÁRIZMÍ, 2009, 139.

Arabské slovo al-džebr znamená přenos odčítaných výrazů z jedné strany rovnice na druhou tak, abychom nahradili odčítání přičítáním. Výraz al-muqábala je krácení. Pro Evropu se naukou algebry a almukabaly (z dnešního pohledu) rozuměla dnešními pojmy nauka o (algebraických) rovnicích druhého i vyšších stupňů o jedné, ale i více neznámých.

Poznamenejme, že podobně jako slovo *algoritmus* (algorithmus, argorismus, algorismus, alchorismus) má díky frázi „po způsobu Algorizmiho" původ ve jménu arabského učence, je termín *algebra* odvozen od arabského výrazu označujícího způsob práce s rovnicemi al-džebr a al-muqábaly.

3.2 Čtení Algebraického traktátu

V samotném *Algebraickém traktátu* se setkáváme se studiem rovnic kvadratických s kladnými přirozenými koeficienty (místy i racionálními čísly), řešenými v oboru kladných celých čísel. Hlavním cílem bylo často získat kvadrát (tj. majetek), nikoli kořen, který vyjadřoval, jak velkou část pole, půdy, kdo při dělení dědictví získá.

Kvadratické rovnice, na které se nejčastěji odkazuje, však nebyly jedinou součástí tohoto traktátu. O tom, že Algebraický traktát byl *předstupněm* pro Aritmetický traktát, svědčí praktické oddíly – o algebraickém násobení čísel a zvětšování a zmenšování. Stejně tak můžeme pohlížet i na hledání kořene jako na jednu z možností, jak ve speciálních případech odmocňovat.[32]

Vedle tohoto aritmetického uplatnění v textu najdeme dále úlohy založené na metodě výpočtu trojčlenky (oddíl o obchodování) a úlohy metrické geometrie, v nichž al-Chvárizmího výsledky, uvedené v předchozím textu, můžeme uplatnit. Geometrické úlohy al-Chvárizmí přebírá jednak od Eukleida, jednak od Archimeda.

3.2.1 Preambule

Algebraický traktát je zahájen slovy „Ve jménu Boha milosrdného a slitovného". Tedy stejně jako jakékoli počínání, které má být v souladu s islámskou vírou. Hned poté následuje vlastní autorova modlitba oslavující Boha, přinášející zvěsti o významu učenců pro poznání a připomínající imáma al-Mámúna, u kterého al-Chvárizmí působil.[33] Za účelem pomoci učencům na imámově dvoře pak sepsal „knihu o algebře a almukabale, obsahující jednoduché i složité otázky aritmetiky".

32) Odmocňování je totiž v Aritmetickém traktátu předznamenáno, ne však v nejstarších překladech-výkladech vysvětleno. Domníváme se tedy, že se al-Chvárizmí odvolával na svůj Algebraický traktát.
33) Bůh vložil do al-Mámúna „lásku k vědě a tužbu obklopit se učenci, rozprostřít nad nimi ochranná křídla a pomáhat jim objasňovat to, co je jim nejasné a usnadňovat obtížné". – AL-CHVÁRIZMÍ, 2009, 138–139.

3.2.1 Jednotka a čísla

Jak jsme se zmínili u *Aritmetického traktátu*, *Algebraický traktát* se jednotkou rovněž zabírá, ne však tak důkladně. Všechna čísla jsou sestavena z jednotek a jednotka je přítomna v každém čísle. Jednotky jsou čísla větší než jedna a menší než deset. Čísla, se kterými se zde zachází, jsou malá – největší je zmíněn řád tisíce a operace s ním.

3.2.2 Kvadratické rovnice

Čísla algebry al-Chvárizmí rozděluje do tří druhů: kořen (arabsky džízr, ve zvyku dnešní notace *x*), kvadrát (arabsky mál, dnešní notací x^2, jinak též majetek) a dané určité číslo (arabsky dirham, tj. arabská mince, dnes konstanta *c, d* atd.), které se nevztahuje ani ke kořenu, ani ke kvadrátu. V následujících šesti oddílech (vlastně šesti případech) rozlišuje úlohy vedoucí na řešení toho, čemu dnes říkáme kvadratická rovnice. Pracuje přitom v oboru kladných celých čísel jak pro proměnné, tak pro koeficienty.

K popisu práce s tímto matematickým jevem zde budeme užívat velkou zkratku – dnešní značení a dnešní pojmy rovnice, neznámé, koeficient, umocňování, odmocňování, atd., ale i zápis čísel v desítkové poziční soustavě, z důvodu snazšího porozumění.[34]

První oddíl řeší rovnice tvaru $ax^2 = bx$

Po úpravě $x^2 = \frac{b}{a} x$,

a odtud $x = \frac{b}{a}$.

Jedná se tedy o krácení. Tyto úpravy jsou zcela v oboru kladných přirozených čísel korektní. Příklady k tomu podává $x = 5x$, $\frac{1}{3}x^2 = 4x$ a $5x^2 = 10x$.

34) Pro porovnání uveďme zde znění Prvního oddílu Algebraického traktátu v českém překladu, kde se pojem rovnice, natož kvadratické, vůbec nevyskytuje:
„Co se týče kvadrátů rovných kořenům; to pokud například řekneš: Kvadrát je roven pěti svým kořenům, potom je kořen kvadrátu pět a kvadrát dvacet pět, což je rovno pěti jeho kořenům. Pokud řekneš: Třetina kvadrátu je rovna čtyřem kořenům, potom celý kvadrát je roven dvanácti kořenům, to znamená, že je roven sto čtyřiceti čtyřem a jeho kořen dvanácti. Pokud například řekneš: Pět kvadrátů je rovno deseti kořenům, pak jeden kvadrát je roven dvěma kořenům, kořen kvadrátu je dva a kvadrát čtyři. Tímto způsobem, ať je kvadrátů mnoho či málo, převede se vše na jeden kvadrát a stejně se pracuje s jim rovnými kořeny, které se převedou tak, jako se převedl kvadrát." – AL-CHVÁRIZMÍ, 2009, 140.

Druhý oddíl se věnuje odmocňování $ax^2 = b$, kde je ve tvaru druhé mocniny nějakého kladného přirozeného čísla. Doprovodné příklady: $x^2 = 9$, $5x^2 = 80$, a $\frac{1}{2}x^2 = 18$.

Třetí oddíl umocňuje: cílem je najít kvadrát kořenu rovnice $bx = c$.

Příklady: $x = 3$, $4x = 20$, $\frac{1}{2}x = 10$.

Čtvrtý oddíl se zabývá rovnicí tvaru $x^2 + bx = c$.

s řešením $x = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} - \frac{b}{2}$.

Doprovodné příklady: $x^2 + 10x = 39$, $2x^2 + 10x = 48$ (nejprve krátíme dvěma) a $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$.

Pátý oddíl probírá rovnici tvaru $ax^2 + c = bx$.

V příkladu $x^2 + 21 = 10x$ si al-Chvárizmí neopomene povšimnout, že vychází dva různé kladné celé kořeny $x_1 = 3$ a $x_2 = 7$. Rovněž zde provádí i rozbor počtu řešení kvadratické rovnice včetně případu, kdy rovnice nemá žádné, dvě či jedno řešení. Upozorněme, že jedno řešení přitom ještě neznamená nutně zdvojený kořen, protože počítáme v oboru kladných přirozených čísel.

Šestý oddíl završuje rovnicí typu $bx + c = ax^2$.

Příklad pro tento typ rovnice uvádí $3x + 4 = x^2$.

První tři oddíly jsou z hlediska arabského algebraického kalkulu zcela neproblematické, zbylé tři vyžadují důkazy. Ty jsou prováděny převodem na geometrii Eukleidových *Základů*. Je to z toho důvodu, že díky metodě překrývání ploch, která pochází patrně od Pythagora, je podle Thomase L. Heathe libovolný planimetrický problém redukovatelný na řešení kvadratické rovnice s kladnými koeficienty a naopak.[35]

Poznamenejme, že se al-Chvárizmí na Eukleida přímo neodvolává, pouze *Základy* ve svých důkazech užívá, obzvláště II. knihu. Úsečky či plošné útvary zde figurují jen jako pomůcka lepší názornosti. To, o co al-Chvárizmímu jde, jsou čísla. Vlastní algebraický důkaz ve smyslu propojení geometrie a algebry, jak jej známe od Descarta, to ještě ale zdaleka není. Nicméně geometrie se v arabském středověkém světě ukazuje v úplně novém světle – jako užitá, aplikovaná matematika, kterou užíváme k vybudování další, nové matematické disciplíny – algebry.

35) Viz HEATH, Thomas L., 1897, 125.

Příklady k těmto oddílům obsahuje později podaný *Oddíl o šesti úlohách* a *Oddí*l o rozličných úlohách. První z nich doprovází typovými příklady s podrobným vysvětlením prvních šest oddílů a rozebírá tak možnosti při řešení kvadratické rovnice v oboru kladných přirozených čísel. Oddíl o rozličných úlohách je již sbírkou řešených úloh ke stejné problematice. Některé z nich jsou i praktického rázu a dnešními slovy je můžeme označit za *slovní úlohy* vedoucí na řešení kvadratické rovnice.

3.2.3 Počítání s dvojčleny

Po řešení kvadratických rovnic následuje oddíl o násobení – v naší matematice o úpravě algebraických výrazů typu $(a \pm x) \cdot (b \pm x)$. Významně zde přitom vystupuje číslo deset. Příklady (psané v dnešní notaci) $(10 + 1) \cdot (10 + 2)$, $(10 - 1)$. $(10 + 2) \cdot (10 - 1)$ propojují algebru s aritmetikou. Následují je příklady ryze algebraické typu $(10 - x) \cdot 10$, $(10 + x) \cdot (10 + x)$, $(10 - x) \cdot (10 - x)$. Zajímavý je přitom příklad se zlomky $(1 - \frac{1}{6}) \cdot (1 - \frac{1}{6})$, který al-Chvárizmí řeší nejen algebraicky, ale i aritmeticky.

Oddíl o násobení al-Chvárizmí zakončuje úpravou algebraických výrazů $(10 - x) \cdot (10 + x)$, $(10 - x) \cdot x$, $(10 + \frac{1}{2}x) \cdot (\frac{1}{2} - 5x)$ a $(10 + x) \cdot (x - 10) = (x + 10) \cdot (x - 10)$.

Je zřejmé, že tato pasáž Algebraického traktátu podává návod na *násobení dvouciferných čísel*. Ten má oporu v řecké geometrii a svou povahou, ačkoli by měla spíše spadat pod *Aritmetický traktát*, má opodstatněné místo zde, nevyžaduje totiž užití desítkové poziční soustavy. Další postřeh, který je nutno zmínit, je ten, že nejspíše ještě v této době nebyla samozřejmá komutativnost násobení a sčítání – proč by jinak al-Chvárizmí zmiňoval poslední uvedenou rovnost při úpravě algebraických výrazů?

3.2.4 Další úpravy algebraických výrazů

Oddíl o zvětšování a zmenšování se věnuje dvěma jevům – jednak počítání s odmocninami a jednak počítání s polynomy. Dokládají to tvrzení o úpravách výrazů s odmocninami $(\sqrt{200} - 10) + (20 - \sqrt{200}) = 10$;[36] $)20 - \sqrt{200} - 10) = 30 - 2\sqrt{200}$, kde $2\sqrt{200} = 800$.

Následují dvě tvrzení o úpravách kvadratických polynomů:
$(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2) = 150 - x^2 - 10x$ a $(100 - x^2 - 20x) - (50 + 10x - 2x^2) = 50 - 3x^2 - 30x$. K těmto tvrzením je později ve spise přiloženo vysvětlení podle obrázku, tedy pomocí Eukleidovy geometrie.

Dalšími početními úkony s odmocninami jsou násobení kořenu kvadrátu, polovina kořenu kvadrátu, podíl kořenů (podíl odmocnin), násobení kořenů mezi sebou (násobení odmocnin) a násobení různých násobků různých kořenů mezi sebou (např. $2\sqrt{9} \cdot 3\sqrt{4}$).

36) Srv. *AL-CHVÁRIZMÍ, 2009, 154.*

3.2.5 Jak rychle obchodovat? S trojčlenkou

Obchod jako předmět *Algebraického traktátu* se plně odráží ve výkladu a počítání s trojčlenkou, tj. přímou a nepřímou úměrou:[37]

„Věz, že dělení se lidí o něco, stejně jako nákup i prodej, výměna i nájem a jiné mají co do činění se čtvero čísly, stanovenými tázajícím a to s mírou, cenou, množstvím a hodnotou. Číslo, odpovídající míře, stojí proti číslu odpovídajícímu hodnotě a číslo odpovídající ceně proti číslu odpovídajícímu množství. Z těchto čtyř čísel jsou vždy tři známé a jedno je neznámé a o něm hovořící říká „kolik" a táže se tázající."

Tento oddíl al-Chvárizmí doporučuje užívat nejen v otázkách obchodování, ale i výměny, objemu nebo váhy.

Poznamenejme, že tímto oddílem končí překlad *Algebraického traktátu* podaný Robertem z Chesteru. V českém vydání (AL CHVÁRIZMÍ, 2008) i (AL-CHVÁRIZMÍ, 2009) je ještě *oddíl o měření*, ve kterém se podle Donalda E. Knutha[38] porovnává *Mishnat ha-Middot*, sepsaný židovským rabínem Nehemjanem, s al-Chvárizmího *Algebraickým traktátem*.

3.2.6 Geometrie

Oddíl o měření propojuje geometrii s algebrou a uvádí do arabského světa Archimedovy výsledky z oblasti obsahu ploch rovinných i objemu prostorových geometrických útvarů. Al-Chvárizmí nejprve zavádí plošné míry přes plochu čtverce. Jednotkovou plochu sice má jako násobek stran obrazce se stejnými stranami a úhly (tj. obecně jako plochu pravidelného polygonu), uvažuje však o čtverci. Od plochy čtverce je pak schopen odvodit délku strany jako kořen (tj. odmocninu) plochy. Dále má vztah pro obsah trojúhelníku pomocí výšky a poloviny základny, pro obsah kosočtverce pomocí součinu úhlopříček.

Vlastnosti kruhu a jeho částí jsou rozvedeny pečlivěji. Obvod kruhu řeší jako Archimedes přes násobek průměru (tj. pomocí násobku číslem), pro astronomy speciálně přes násobek průměru dělený (tj. z dnešního pohledu přesnějším násobením číslem), což je přesnější honora transcendentálního čísla . Z obvodu dostane průměr obráceným postupem. Plochu kruhu počítá z průměru a obvodu. Rovněž se zabývá mírami kruhové výseče pomocí míry oblouku a délky tětivy.

Následuje stručný přehled tvrzení o objemu prostorových těles pomocí plochy podstavy a jejich výšky. Některá z nich al-Chvárizmí přebírá i od Eukleida.[39]

37) Viz AL-CHVÁRIZMÍ, 2009, 178.
38) Viz KNUTH, Donald E., 1980, 3–4.
39) Tvrzení „Co se týče jehlanu trojúhelného, čtvercového a kruhového, mají tu vlastnost, že součin třetiny plochy jejich podstavy s výškou je objem." (AL-CHVÁRIZMÍ, 2009, 182) přebírá z XII. knihy Eukleidových Základů. Viz poznámka Petra Vopěnky AL-CHVÁRIZMÍ, 2009, 182. Srv. SERVÍT, František, 1907, 271.

3.2.7 Pythagorova věta pro pravoúhlý trojúhelník

Al-Chvárizmí ve svém výkladu neopomine ani *Pythagorovu větu* o rovnosti součtu čtverců sestrojených nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku se čtvercem sestrojeným nad přeponou. Ovšem ve znění více algebraickém:

„Každý pravoúhlý trojúhelník má tu vlastnost, jestliže vynásobíš obě kratší strany samy sebou, pak součet těchto součinů je roven součinu nejdelší strany samy se sebou."[40]

U geometra Eukleida přitom máme:[41]

„V pravoúhlých trojúhelnících čtverec na straně proti úhlu pravému ležící rovná se čtvercům na stranách pravý úhel svírajících."

Rovněž důkaz je jiný, než jaký známe z Eukleidových *Základů*. Al-Chvárizmí konstruuje čtverec, který rozdělí na osm stejných pravoúhlých trojúhelníků a Pythagorovu větu dokazuje pro jeden z nich. Důkaz je učiněn pomocí obsahů vzniklých trojúhelníků a čtverců. Navíc je proveden pouze pro pravoúhlý trojúhelník rovnoramenný.

Poznamenejme, že krása Eukleidova původního důkazu spočívá nejen v obecnosti trojúhelníku, pro který tvrzení platí, ale rovněž v metodě. Důkaz vychází od pravoúhlého trojúhelníku, jehož vlastnost (Pythagorova věta) se zde zkoumá, a konstrukce oněch čtverců nad odvěsnami. Dochází k tomu pomocí vlastností střídavých úhlů, rovnosti trojúhelníků o stejných základnách mezi týmiž rovnoběžkami a vztahu rovnoběžníku a trojúhelníku o stejné straně mezi týmiž rovnoběžkami. Užívá přitom metodu překrývání ploch.[42]

3.2.8 Geometrie rovinných útvarů

Al-Chvárizmí dále rozlišuje pět čtyřúhelníků – čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodélník a obecný čtyřúhelník. Pro ně uvádí na názorných příkladech vztahy pro výpočet jejich plochy. „Co se týče ostatních čtyřúhelníků, definování jejich plochy se převádí na pravidla výpočtu ploch trojúhelníků s pomocí úhlopříček."[43] Tomu rozumějme tak, že čtyřúhelník máme triangulovat a jeho plochu počítat přes plochu trojúhelníků.

Rozdělení trojúhelníků a výpočtu jejich plochy věnuje dosti pozornosti. Rozlišuje trojúhelníky pravoúhlé, ostroúhlé a tupoúhlé. Trojúhelníky mezi sebou porovnává podle jejich obsahu ve vztahu k Pythagorově větě (ostroúhlé trojúhelníky mají součet kvadrátů kratších stran větší než kvadrát nejdelší strany, u tupoúhlých trojúhelníků je to naopak). V souladu s Ladislavem Kvaszem můžeme spatřovat náznaky pro kosinovou větu, ale stejně jako v dřívějších poznámkách k takovémuto novodobému vyjádření není

40) Viz AL-CHVÁRIZMÍ, 2009, 182.
41) Viz SERVÍT, František, 1907, 24, příp. EUKLEIDES, 2008, 79.
42) Srv. HEATH, Thomas L., 1897, xl–xli.
43) Viz AL-CHVÁRIZMÍ, 2009, 185.

jazyk matematiky dostatečně vyvinutý. U ostroúhlých trojúhelníků uvádí i vlastnosti pro rovnoramenný a rovnostranný trojúhelník. Obsah tupoúhlého trojúhelníka máme provádět pomocí výšky spuštěné na nejdelší stranu (aby pata výšky nebyla vně trojúhelníku).

3.2.9 Aplikace algebry v geometrii

V posledních závěrečných příkladech al-Chvárizmí řeší výpočet objemu komolého jehlanu se čtvercovou podstavou (s poznámkou pro kruhovou podstavu) a výpočet délky čtverce vepsaného do rovnoramenného trojúhelníku (výpočet velikosti pozemku). Příklady jsou doprovodné, ukazují, za jakým účelem a proč jsme se zabývali algebrou (řešením kvadratických rovnic) a propojovali ji s geometrií.

3.3 Jazyk *Algebraického traktátu*

Podstatou algebraických manipulací není názor, vhled, ale cit pro kalkulaci. „Nejde o to výsledek vidět (jako v geometrii), ale spíše získat cit pro to, jak k němu dospět, získat cit pro různé úpravy, transformace a triky, získat cit pro možnosti, které nám jazyk nabízí. Tyto možnosti nejsou aktualizované, nejsou odkryté pohledu. V *jazyce algebry* je vždy vyzdvihnutý pouze jeden výraz, ten, který právě upravujeme."[44]

Oproti aritmetickému jazyku má jazyk algebry *explicitní symbol pro proměnnou*. Geometrie má proměnnou skrytou jakožto úsečku neurčité délky. Tato skrytost přesto stačí ke schopnosti jazyka geometrie dokázat *všeobecné tvrzení*. Na rozdíl od geometrie ale jazyk algebry má v sobě explicitně obsažený i *návod*, jak k výsledku dospět.

Dalším přínosem, který algebra má v sobě vnitřně, je schopnost dokázat modální situace – nemožnost řešení či násobnost řešení, jak jsme tomu byli svědky i u počtu řešení kvadratické rovnice. „Jazyk algebry je prvním jazykem, který je s to dokázat neřešitelnost konkrétní úlohy."[45] Jazykem geometrie nemáme jak *ukázat* nemožnost jako takovou, v algebraickém jazyce ji *vyjádříme*.

Co se týká expresivní síly jazyka algebry ve vztahu ke geometrickému jazyku, shledáváme algebru svobodnější – nemusí se omezovat pouze na mocniny dvou či tří jako prostorem omezená geometrie, která tím vyjadřuje plošných obsah či objem, může pracovat s libovolně velkými mocninnými řády.[46] Musíme si ale uvědomit, že pro mocniny vyšší než 3 již nemáme interpretaci a srovnání v geometrickém názoru. Přesto algebrou lze řešit to, co jazykem (syntetické, řecké) geometrie sotva zvládneme zformulovat. Na druhou stranu jazyk algebry uvízne na problému kvadratury kruhu, na

44) Viz KVASZ, Ladislav, 2008, 30.
45) Viz KVASZ, Ladislav, 2008, 32.
46) Srv. expresivitu jazyka aritmetiky a algebry v potencialitě libovolně velkých řádů desítkové (příp. šedesátkové) poziční soustavy u Aritmetického traktátu *a libovolně velkých řádů mocnin u* Algebraického traktátu*.*

pojmu transcendentního čísla. Ačkoli se al-Chvárizmího algebra vypořádává s obsahem kruhu a obvodem kružnice, činí tak pouze aproximativně. Nicméně můžeme zde poukázat na to, že se jedná o podobný ontologický problém jako s nulou v případě *Aritmetického traktátu* – číslo představuje veličinu, o které nelze v jazyce algebry nic říci, je to číslo, které nesplňuje žádný algebraický vztah. [47]

Přesah algebry do nezávislosti na interpretaci nese sebou i *explanatorickou* sílu jazyka algebry. Fakt, že eukleidovskou konstrukcí nelze provést trisekci úhlu či zdvojení krychle, ale algebrou ano, dokládá podle Ladislava Kvasze právě tuto sílu.[48]

Poslední schopností jazyka algebry je vytvořit vlastní *univerzální analytickou metodu*. U al-Chvárizmího tato schopnost jazyka teprve začíná, plně se však rozvíjí hlavně od dob Reného Descarta.

3.4 Metodologická poznámka a povaha spisu

Stejně jako Aritmetický traktát i Algebraický traktát má části obecné platnosti s doprovodnými příklady. Je však mnohem praktičtější a méně zacílený. Spis zůstává na úrovni učebnice algebry s prolnutím prvků aritmetiky a aplikacemi v geometrii.

4. Závěr

Al-Chvárizmího traktáty dokázaly přivést do Evropy novou aritmetiku, založenou na indické matematice kalkulací s velkými čísly, a algebru okořeněnou řeckou matematikou geometrického názoru. Jsou velmi důležitým svědectvím vývoje matematiky a přichází s naprosto novým přelomovým způsobem uvažováním, ve kterém názor je nahrazen odvozením, manipulací s čísly či symboly. Nová arabská aritmetika představuje znalost indického aritmetického kalkulu, který dokáže velmi rychle předpovědět výsledek počítání s velkými čísly. Při znalosti algebraického kalkulu bylo možné pouhou kalkulací se znaky předpovědět řešení složité úlohy. K jejich vzájemnému plnohodnotnému propojení s geometrií, o kterou se algebraický kalkul opíral, dochází až s nástupem doby René Descarta.[49] Díky proniknutí algebry do geometrie tak můžeme *navrhnout* (geometrickou) konstrukci a dále otevřít geometrii (algebraických) objektů, které nemohla syntetická řecká geometrie uchopit.

47) Srv. KVASZ, Ladislav, 2008, 37.
48) Viz KVASZ, Ladislav, 2008, 33–34.
49) „Všechny úlohy geometrie lze snadno převést na takové termy, k jejichž sestrojení stačí znát pouze délky některých úseček." – René Descartés: La Géométrie, Paris 1637. Citováno dle VOPĚNKA, 2009, 77.

Literatura

Al-CHOREZMI, Muchammad ibn Musa (1983): Matematičeskje traktaty. Taškent: Izdavatel'stvo „FAN" Uzbeckoj SSR.
AL-CHVÁRIZMÍ (2009): Aritmetický a algebraický traktát. Nymburk: OPS. 2. vydání.
AL CHVÁRIZMÍ (2008): Aritmetický a algebraický traktát. Nymburk: OPS. 1. vydání.
ARISTOTELÉS (2003): Metafyzika. Praha: Nakladatelství Petr Rezek. Překlad A. Kříž.
BEČVÁŘ, Jindřich, BEČVÁŘOVÁ, Martina, VYMAZALOVÁ, Hana (2003): Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie. Praha: Prometheus.
BEČVÁŘ, Jindřich et al. (2001): Matematika ve středověké Evropě. Praha: Prometheus.
BEČVÁŘOVÁ, Martina (2002): Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady. Praha: Prometheus.
BENEDIKTOVÁ VĚTROVCOVÁ, Marie (2009): Pokus o rekonstrukci obsahu původního arabského Aritmetického traktátu, in: al-Chvárizmí: Aritmetický a algebraický traktát, s. 85–109. Nymburk: OPS.
CRIASTANNUS DE PRACHATICZ (1999): Algorismus prosaycus. Základy aritmetiky. Praha: OIKOYMENH.
EUKLEIDES (2008): Základy I-IV. Nymburk: OPS.
HEATH, Thomas L. (1897): Works of Archimedes. Cambridge: C. J. Clay and sons, Cambridge University Press Warehouse.
ISIDOR ZE SEVILLY (2000): Etymologiae I-III. Etymologie I-III. Praha: OIKOYMENH.
KARPINSKI, Louis C. (1921): Two Twelfth Century Algorisms. Isis 3, 396–413.
KNUTH, Donald E. (1980): Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science. Report No. STAN-CS-80-786. Department of Computer Science. Stanford, CA: Stanford University.
KVASZ, Ladislav (2008): Patterns of Change. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser.
PATOČKA, Jan (1994): Aristotelés. Přednášky z antické filosofie. Praha: Vyšehrad.
POPPER, Karl R. (2002): Conjectures and Refutations. London-New York: Routledge.
SERVÍT, František (1907): Eukleidovy Základy. Praha: Jednota českých matematiků a fysiků.
ŠIŠMA, Pavel (2001): Arabská matematika, in: Bečvář, J. et al. kol.: Matematika ve středověké Evropě. Praha: Prometheus.
VOPĚNKA, Petr (2009): Pojednání o prvních krocích matematiky kalkulací, in: al-Chvárizmí: Aritmetický a algebraický traktát, s. 7–83. Nymburk: OPS.

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 Prameny evropské matematiky.