ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

PROBLÉM ČTYŘ BAREV

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Alena Kovářová

Učitelství pro 1. stupeň ZŠ

Vedoucí práce: PhDr. Šárka Pěchoučková, Ph.D.

Plzeň, 2013

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň,1. června 2013

....
vlastnoruční podpis

Poděkování

Chtěla bych na tomto místě poděkovat vedoucí mé diplomové práce, PhDr. Šárce Pěchoučkové, Ph.D., za ochotu, trpělivost a cenné rady při psaní této práce.

Obsah

Úvod

S matematickými problémy se lidé potkávají denně v běžném životě a jsou nuceni je řešit. Přípravou jim je školská matematika, se kterou se setkávají od nejútlejšího věku a která má za cíl je do života vybavit vědomostmi a dovednostmi se v těchto problémech orientovat a najít způsob, jak tyto problémy vyřešit. V Rámcovém vzdělávacím programu je tento předmět začleněn do oboru Matematika a její aplikace. Je rozdělen na čtyři tématické okruhy, a to: Čísla a početní operace, Závislosti, vztahy a práce s daty, Geometrie v rovině a v prostoru a velmi důležitou částí jsou Nestandardní aplikační úlohy a problémy, u nichž je nutné uplatnit logické uvažování.

Většinou je samotná výuka postavena na předávání informací, které jistě dopomohou jedincům k rozvoji logického myšlení, k rozvoji samostatnosti a v neposlední řadě i k rozvoji schopností tyto problémy řešit. Efektivnější je dát žákům a studentům možnost hlouběji proniknout do problému a nechat je samotné aktivně se podílet na řešení problému. Řešení se stává trvalejším a oni sami mají pocit, že zadanému problému rozumějí a považují objevy za své, což je do jisté míry i další motivací řešit úlohy jiné. Ne vždy se však musí jednat o příklady, které souvisejí s běžným životem. Učitelé mohou využívat i takové problémy, které se pro žáky a studenty stanou relaxačními, umožňují si odpočinout od nejčastěji probírané aritmetiky, problémy, které jsou aktuální matematickým expertům, ne však laické veřejnosti, problémy, se kterými by se žáci nikde jinde nesetkali a jsou jistě zajímavé. Všechny tyto úlohy má význam řešit a využívat je v hodinách matematiky, jelikož napomáhají rozvoji logiky a tvůrčího myšlení. To byl i jeden z důvodů, proč jsem si právě toto téma zvolila. Jedná se o problém, se kterým by se žáci asi již nikdy nesetkali a zároveň splňuje zásady výše popsané. Jedná se o problém čtyř barev.

Hlavním cílem mé diplomové práce je žáky seznámit, na základě jejich vlastního objevování, s daným problémem a vysledovat jejich úspěšnost při jeho řešení, soustředit se na dětmi zvolené strategie a jejich popis. Dílčím cílem je sledovat žáky s poruchou učení a jejich samotné zapojení, zaznamenat jejich úspěšnost při řešení tohoto matematického problému.

V první kapitole teoretické části se zabývám teoretickými poznatky o tomto počítačově vyřešeném problému. Obsahem druhé kapitoly jsou teoretické informace o matematickém problému, popis možných strategií při řešení a teorie o možnosti návaznosti na původní, základní problém. Třetí kapitola se zabývá rozdělením základních metod a forem využívaných při vyučování. Jelikož jedním z cílů bude vysledovat zapojení žáků se specifickou poruchou učení, jsou teoretické informace tohoto tématu zpracovány ve čtvrté kapitole teoretické části.

V praktické části se pomocí pracovního listu žáci seznámí s daným tématem pomocí vlastního objevování. Na základě dětmi vypracovaných obrázků, které jsem navrhla, a mého vlastního pozorování, je zpracován a analyzován samotný výzkum (tj. úspěšnost při řešení tohoto problému, sledování strategií dětí při řešení tohoto problému a zapojení dětí se specifickými poruchami učení).

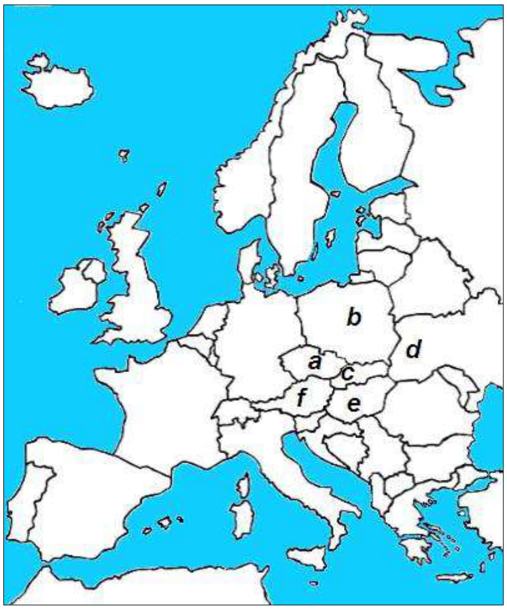
TEORETICKÁ ČÁST

1. Problém čtyř barev

Následující kapitola vysvětlí podstatu problému čtyř barev, jeho stručnou historii a stručně nastíní způsob řešení a význam pro matematiku.

1.1. Popis problému

Problém čtyř barev, jednoduše řečeno, je spojen s vybarvováním map. Na obr. 1 je znázorněna politická mapa a úkolem je vybarvit ji tak, aby sousední státy měly odlišnou barvu. Sousedními státy se rozumí dvě území, u nichž je společná hraniční čára, nikoli ty, které mají společný hraniční bod.



Obr. 1

Takto položené zadání úkolu nabízí řešení vybarvit každé území jinou barvou. Matematika by samozřejmě zajímalo, jaký nejmenší počet barev bude zapotřebí. Na první pohled to vypadá, že čím komplikovanější mapa, tím více barev je potřeba. Překvapivě tomu tak není. Bez problémů bychom mapu postupně vybarvili pouze pomocí sedmi, šesti, ale i s pomocí pěti barev. Při důkladnějším řešení dojdeme k závěru, že k vybarvení mapy nám postačí dokonce pouze čtyři barvy. Jednoduše zjistíme, že počet barev je již nemožné dále snižovat.

Mějme 1 barvu:	Úlohu bychom nemohli vyřešit. Mají-li mít sousední státy rozdílné barvy, pak bychom nemohli obarvit ani dva sousedy (např. *a* a *c*)
Mějme 2 barvy:	Nastane podobná situace – přiřadili bychom státu *a* jednu barvu, státu *c* barvu druhou. Stát *b* sousedí se státy *a* a *c*, proto bychom potřebovali ještě třetí barvu.
Mějme 3 barvy:	Stát *c* s jeho pěti sousedícími státy třemi barvami vybarvit nelze. Jestliže je *c* vybarvené první barvou, pak zbývající dvě barvy by se musely střídat podél jeho hranice, což je při počtu pěti sousedních států nemožné. (http://teorie-grafu.cz/vybrane-problemy/barveni-mapy.php)

Nabízí se tak otázka, zda existuje mapa, kde by na vybarvení 4 barvy nestačily.

„Stačí čtyři barvy na obarvení libovolné politické mapy tak, aby žádné dva sousedící státy nebyly obarveny stejnou barvou?“

(http://cs.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A9m_%C4%8Dty%C5%99_barev)

Tento problém nazýváme **problém čtyř barev**. Přestože se řada matematiků snažila o důkaz více než sto let, toto tvrzení bylo prokázáno až v roce 1976.

1.2. Formulace v teorii grafů

Uvedený problém obarvení mapy se dá převést na barvení grafů tak, že uvnitř každému státu přiřadíme libovolný bod. Tento bod bude vrchol grafu, jehož hrany dostaneme tak, že spojíme dva vrcholy v případě, kdy jsou dva odpovídající státy sousední. Barvení států pak odpovídá barvení vrcholů, přičemž dva vrcholy, které jsou spojeny hranou, nemají stejnou barvu. Ačkoli s historií rovinných grafů se můžeme setkat již v antice, problém čtyř barev byl jeden z impulsů, který posunul hranice v této oblasti matematiky.

K tomu, abychom zavedli problém čtyř barev, je důležité vysvětlení několika pojmů rovinných grafů. (Bosák, 1979)

Nejdříve si zavedeme několik symbolů:

G ….. rovinný graf (dále jenom graf)
V ….. vrcholy grafu G
H ….. hrany grafu G

Nyní přistoupíme k vysvětlení:

Mějme v rovině R dán graf G s uspořádanou dvojicí G = [V, H], kde V a H jsou konečné množiny splňující následující podmínky G_1 až G_5.

G_1 – Každý vrchol je bodem dané roviny.

G_2 – Každá hrana se skládá z bodů roviny a je čárou spojující buď dva různé vrcholy (nazývá se spojnice) nebo jeden vrchol sám se sebou (nazývá se smyčka).

G_3 – Každá spojnice grafu G je čárou homeomorfní[1] s úsečkou (např. úsečka, kružnicový oblouk, neuzavřená jednoduchá lomená čára).

G_4 – Každá smyčka grafu G je homeomorfní s kružnicí (např. kružnice, elipsa, neuzavřená jednoduchá lomená čára).

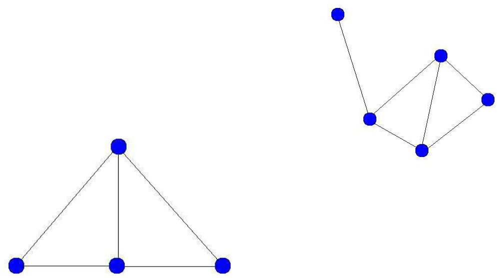
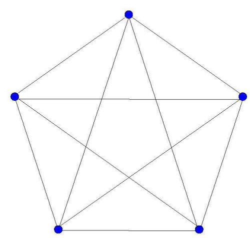
G_5 – Každý společný prvek dvou různých hran je vrcholem grafu G (dvě různé hrany nemají ani jeden společný prvek, anebo právě jeden, anebo právě dva).

---

[1] „Homeomorfní zobrazení topologického prostoru *P* na topologický prostor *Q*, vzájemně jednoznačné a oboustranně spojité zobrazení prostoru *P* na prostor *Q*. Prostor *Q* se nazývá homeomorfním obrazem prostoru *P*. Elipsa je homeomorfním zobrazením kružnice. Avšak také hranice čtverce, trojúhelníku ap. jsou homeomorfními zobrazeními kružnice.“ (http://www.cojeco.cz/index.php?id_desc=34376&s_lang=2&detail=1&title=homeomorfn%ED%20zobrazen%ED)

Z vlastností G_3 a G_4 vyplývá, že hrany nepřetínají samy sebe. Z vlastnosti G_5 vyplývá, že hrana nepřetíná jiné hrany.

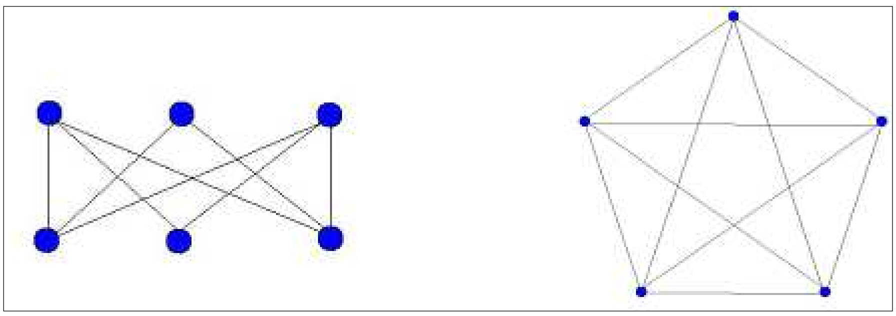
„Rovinný graf je graf, který můžeme znázornit v rovině takovým způsobem, že uzlům odpovídají body roviny a hranám oblouky (lomené čáry) takové, že žádné dva nemají společný vnitřní bod.“ (Šišma, 1997, str. 63) – obr. 2

Rovinný graf	Nerovinný graf
	

Obr. 2

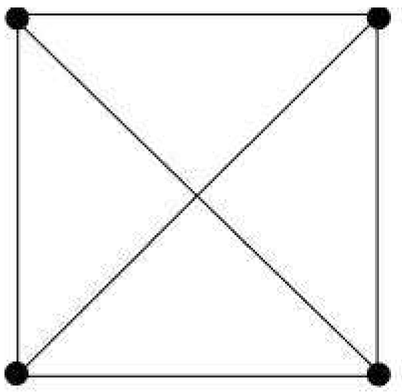
Pro rozpoznání rovinných grafů můžeme využít několika důkazů:

Pro jednodušší vysvětlení nám bude stačit, že graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje jako podgrafy rozdělení grafů $K_{3,3}$ a K_5 (obr. 3).

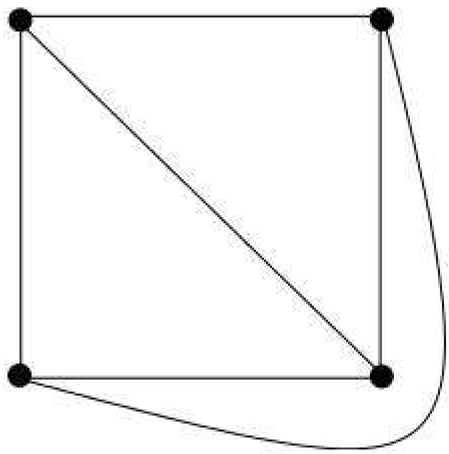


Obr. 3 ($K_{3,3}$ a K_5)

Dá se tak ukázat, že rovinné grafy je vždy možné zakreslit do roviny bez křížení hran. Graf na obrázku 4a) je rovinný, protože ho můžeme zakreslit do roviny, aniž by se hrany křížily (obr. 4b), což u grafů na obrázku 3 nelze.



Obr. 4a)



4b)

Pro rovinné grafy platí následující vzorec (Wilson, 2002):

$|V| + |F| = |H| + 2$

F …. Počet stěn

Pravdivost tohoto vzorce dokážeme u grafů obrázku 2

Rovinné grafy:

$V + F = H + 2$

$4 + 3 = 5 + 2$

$7 = 7$ ….. graf je rovinný

$5 + 3 = 6 + 2$

$8 = 8$ ….. graf je rovinný

Nerovinný graf:

$5 + 10 \neq 10 + 2$

$15 \neq 12$ …. graf není rovinný

Maximální počet hran

Je-li G = (V, H) rovinný graf, pak platí, že $|H| \leq 3|V| - 6$. Neobsahuje-li navíc tento graf jako podgraf trojúhelník (tj. K_3, úplný graf na 3 vrcholech), pak $|H| \leq 2|V| - 4$.

1.3. Barvení map a rovinných grafů

V každém rovinném grafu je vždy jedna vnější stěna (stěna neohraničená). Ostatní stěny se nazývají vnitřní.

Souvislý rovinný graf nazýváme *konfigurací*, pokud všechny jeho vnitřní stěny jsou trojúhelníkové. Konfiguraci nazýváme *triangulací*, jestliže je i vnější stěna trojúhelníková.

Výsledkem zkoumání tohoto grafu bylo po mnoha výpočtech dosaženo závěru, který říká:

„*Dvě stěny rovinného grafu se nazývají sousední, když jsou navzájem různé a když průnik jejich hranic obsahuje alespoň jednu hranu grafu G. Po vybarvení stěn grafu G čtyřmi barvami rozumíme zobrazení množiny F do dané čtyřprvkové množiny F (např. F = {1, 2, 3, 4}); prvky množiny F nazýváme barvy. Vybarvení stěn nazýváme regulérní, když sousední stěny mají vždy přiřazené různé barvy.*“ (Bosák, 1979, str. 188)

1.4. Historie

Hned na začátku je potřeba poznamenat, že historie problému čtyř barev je plná omylů historických i matematických. Formulace problému se zdá být jednoduchá, avšak potvrdit tuto teorii a podat důkaz o její správnosti bylo otázkou mnoha let. Samotný důkaz byl předložen po více než 100 letech práce mnoha matematiků zabývajících se tímto problémem.

1.4.1. Vznik problému, jeho vývoj

V minulosti se často tvrdilo, že první zmínka o tomto problému byla položena r. 1840 v Německu A.F. Möbiem. Zdá se však, že se jednalo o záměnu s podstatně lehčím problémem. Jak uvádí Wilson (2002) ve své publikaci, autorství tohoto problému připisuje anglickému matematikovi **Francisovi Guthriemu**, kterému při vybarvování anglické mapy stačily pouze čtyři barvy. Nenašel další případ, kdy by stejný počet barev nestačil, avšak dokázat, že stačí, se mu nepodařilo. Francisův bratr Frederick tento problém 23. října 1852 oznámil svému profesoru matematiky na univerzitě v Londýně **Augustu De Morganovi**, který ještě ten den o něm napsal siru Wiliamu Rowanu Hamiltonovi. Ten se však touto otázkou odmítl zabývat. Tento dopis je považován za první písemný dokument o tomto problému.

Ačkoli roku 1860 o důkazu, který měl potvrdit, že všechny rovinné grafy lze obarvit čtyřmi barvami, přednášel **C. S. Peirce** na Harwardu, svoji práci nepublikoval a nedochovalo se ani jeho autentické znění. Předpokládá se, že jeho důkaz nebyl správný.

Kromě několika výjimek, kdy se objevily zdánlivé důkazy o pravdivosti hypotézy o čtyřech barvách, ve kterých se postupem času našly chyby, zůstal tento problém na několik let téměř bez povšimnutí. Veliké nadšení vyvolal až důkaz, který podal roku 1879 londýnský advokát **Alfred Bray Kempe**. Svoji práci publikoval v American Journal of Mathematics (Šišma, 1997) a problém se zdál na dalších dlouhých 11 let vyřešen.

Důkaz A. B. Kempeho byl považován za správný do roku 1890, kdy **John Heawood** poukázal na chybu v Kempeho práci. Poukázal ale na to, že podle této metody lze ukázat, že na vybarvení každé mapy v rovině stačí pět barev. Ačkoli výsledek Heawoodovy práce oznámil samotný Kempe na zasedání London Mathematical Society, mnozí však Heawoodova tvrzení nedbali a pokládali důkazy Kempeho za správné. Heawoodovu práci lze však považovat za významnou z několika důvodů. Kromě úpravy Kempeho úvahy, že k obarvení každé mapy spolehlivě stačí pět barev, se dále J. Heawood zabýval zkoumáním barvení map na různých plochách. V počtu barev šlo dlouhou dobu o jediný definitivní výsledek, ale i nadále se pracovalo na důkazu hypotézy čtyř barev.

Další pokrok v barvení map udělal **Philip Franklin**, který v roce 1922 dokázal, že hypotéza o čtyřech barvách platí pro všechny mapy s počtem států menších než 26. Na jeho práci stavěli další matematici a postupně navýšili hranici na 95 států.

1.4.2. Vyřešení problému

Vyřešit problém se podařilo až v roce 1976. Důkaz zveřejnili **Kenneth Appel** a **Wolfgang Haken** z univerzity v Illinois. Hypotézu problému čtyř barev vyřešili pomocí počítače. Samotné řešení teorie, které bylo provedeno počítačem, trvalo 1200 hodin procesorového času. Důkazem se stal dokument o 56 stranách textu a 114 stranách obrazové přílohy. Jejich výsledky práce byly zpočátku přijímány s velkou nedůvěrou, protože odborná veřejnost měla stále v živé paměti selhání počítačového programu, který byl použit k řešení této teorie již v minulosti. Další výtkou se stala obsáhlost výsledků a byl požadován důkaz v té nejjednodušší podobě, který by bylo možno opakovaně podrobit kontrolním testům, jež měly potvrdit správnost zkoumané teorie. Současně s předchozím požadavkem se začaly objevovat spekulace o autorství důkazu. Někteří odborníci vyslovili názor, že k řešitelům teorie čtyř barev by měl být doplněn i **John Koch**, který vytvořil počítačový program.

1.5. Význam pro matematiku

Teorie čtyř barev byla po mnoho roků považována za nejznámější matematický problém. Samotná teorie lákala jak experty, tak i laickou veřejnost, kteří se snažili tento problém vyřešit. Od roku 1976, kdy byla tato teorie vyřešena, se stala základním kamenem v oblasti teorie grafů a topologie. Je nutné vyslovit uznání autorům K. Appelovi, W. Hakenovi a J. Kochovi za jejich systematickou, čtyři roky trvající práci. Po celou dobu jejich usilovné činnosti zde existovala nepopíratelná možnost jejich neúspěchu. Tím by se stalo, že teorie čtyř barev by mohla být považována za neplatnou.

Velkým přínosem pro matematiku je i fakt, že na zdánlivě jednoduchou otázku muselo být použito nejmodernější počítačové vybavení. Důvodem je vysoká matematická náročnost výpočtů, které nebylo v lidských silách zvládnout. (Bosák, 1979)

2. Problémy ve školské matematice

S problémy ve školské matematice se můžeme setkávat už v historii, řeší se v současnosti a budou v ní jistě i v budoucnu. Slouží k procvičování probraného učiva a k jeho upevňování. Většinou přecházíme od jednodušších cvičení k zařazování složitějších problémů. Problémy využívané ve školské matematice jsou podávány v různých souvislostech. Jsou začleňovány za účelem rozvíjení myšlení žáků a jedním z nejdůležitějších cílů je rozvíjet schopnosti problémy řešit. To vše jistě napomáhá i s řešením problémů reálného života. Velice záleží na učiteli, aby vybral vhodné problémy. Jenom on odhadne, jaké problémy vybrat a popřípadě jakou pomoc poskytne při řešení těchto problémů.

Většina problémů a definicí je žákům podávána jako hotová věc a na základě definice následuje procvičování a dokazování naučeného. Určitě přínosnější a pro děti trvalejší, přirozenější cestou je samotné objevování a vytvoření hypotézy za pomoci vyučujícího. Žáci více vidí do problematiky a objevené pokládají za své. Nejedná se o objevování matematických hypotéz pouze ve středoškolské matematice a na vysokých školách, ale spoustu problémů je možno řešit s dětmi nejen na druhém stupni ZŠ, ale i na prvním stupni ZŠ.

2.1. Matematický problém

Současný didaktik matematiky Jeremy Kilpatrick uvádí *„…problém jako situaci, v níž máme dosáhnout nějaký cíl, ale přímá cesta k němu je zablokována. Aby byl problém matematický, pak bychom při hledání odpovědi měli užívat matematické pojmy a principy.“* (Kopka, 1999, str. 14)

Jak uvádí Kopka ve své knize Hrozny problémů ve školské matematice (1999), problém se skládá z hlavních tří složek:

1. Výchozí situace
2. Cíl
3. Cesta

Graficky můžeme problém znázornit takto (obr. 5):

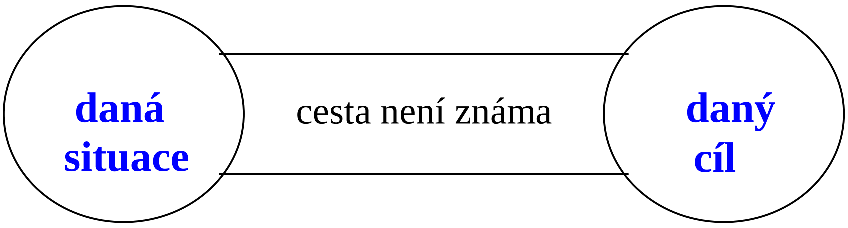
Obr. 5

Problémy můžeme rozdělit do 3 skupin podle známých složek problémů. Jsou to:

1. Cvičení či rutinní problémy (obr. 6)
   - výchozí situace (přesně popsána)
   - cíl (zadán)
   - cesta (známá)

Obr. 6

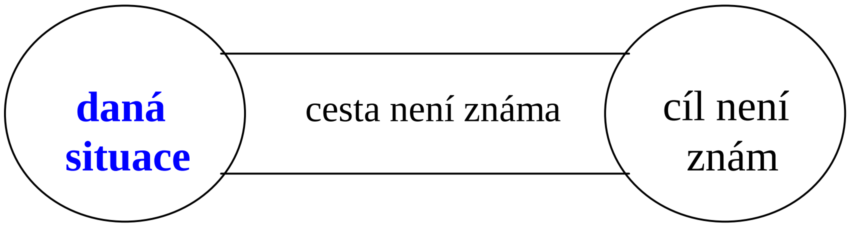
2. Úlohy či nerutinní problémy (obr. 7)
   - výchozí situace (přesně popsána)
   - cíl (zadán)
   - cesta (není známa)



Obr. 7

U těchto dvou skupin nemůžeme vždy s přesností určit typ problému, jelikož rutinní problém může pro některé žáky představovat nerutinní. Stejně jako se stane nerutinní problém dostatečným procvičováním problémem rutinním.

3. Zkoumání (obr. 8)
   - výchozí situace (přesně popsána)
   - cíl (není zadán)
   - cesta (nemůže být známa)



Obr. 8

O matematice se dá říci, že je to deduktivní[2] věda. S tímto tvrzením by určitě spousta matematiků souhlasila. Protože budeme-li chtít nějakou matematickou větu dokázat, využíváme při tom deduktivní metodu. Ovšem ještě dříve, než budeme jakoukoliv matematickou větu dokazovat, musíme ji nejdříve objevit. Dá se tedy říci, že samotná dedukce je poslední fází. Tomu předchází činnosti jako experimentování, pozorování, porovnávání a další, které můžeme nazvat heuristické[3] strategie.

---

[2] „Dedukce – je proces usuzování, ve kterém se od předpokladů dochází k závěru z těchto předpokladů vyplývajícího, přičemž odvozování je jisté, nikoliv jen pravděpodobné. Jde tedy o základní postup při dokazování.“ (http://cs.wikipedia.org/wiki/Dedukce)

[3] **„Heuristika** (z řečtiny *heuriskó*– nalézt, objevit) znamená zkusmé řešení problémů, pro něž neznáme algoritmus nebo přesnější metodu. Heuristické řešení je často jen přibližné, založené na poučeném odhadu, intuici, zkušenosti nebo prostě na zdravém rozumu. První odhad se může postupně zlepšovat, i když heuristika nikdy nezaručuje nejlepší řešení.“ (http://cs.wikipedia.org/wiki/Heuristika)

2.2. Heuristické strategie

Kopka (1999) ve své knize mezi **výchozí (základní) strategie** řadí:

Systematické experimentování

Pokus – omyl

Odhad – strategie – oprava

Systematické experimentování

Za pomoci náčrtku či algebraické cesty dojdeme k cíli problému. Velmi často se využívá tabulky, kdy zaznamenáváním údajů dojdeme k určité zákonitosti, kterou pak vyjádříme vzorcem.

Strategie Pokusu a omylu

Tato metoda je založena zcela na náhodné volbě žáka, při které se nesystematicky snaží dobrat k řešení. Můžeme ji nazvat nesystematickým experimentováním. Jedná se sice o nejjednodušší metodu, ale nemusí vyřešit problém nejrychleji či nemusí dovést problém k cíli vůbec. Více než v hodinách matematiky je využívána především v přírodních vědách.

Odhad – strategie – oprava

Získané poznatky řešitel často vkládá do tabulky, kde odhad řešení ověří, vypozoruje určité zákonitosti a další odhad určí podle toho, jak vyšel předchozí výsledek. Jedná se tedy o dokonalejší předchozí strategii.

Obecné strategie :

Přeformulování či transformace problému

Abychom mohli vyřešit daný problém, vytvoříme zcela jiný problém, pomocí kterého se dobereme k vyřešení původního problému. Jednoduše lze říci, že jiný problém, ale splňující podmínky zadaného úkolu, řeší původní problém.

Analogie

Problémy řešíme na základě podobnosti, pomocí podobných situací. Jedná se tedy spíše o odhad, nikoli rozbor problému.

Zobecnění

Jedná se o zobecnění již zavedených pojmů a získaných poznatků.

Specializace

Tato strategie nevede přímo k vyřešení daného problému. Ale díky ní řešíme speciální případy, které nám umožňují dostat se více do problematiky, a tím i vyřeší původní problém.

Cesta nazpět

Při této strategii se využívá cílového výrazu k vyřešení problému.

Systematické experimentování, hledání vzorce

Pomocí postupného experimentování dojdeme k vyslovení určité hypotézy. Pro vyslovení určité jistoty, zda je pravdivá, musí být dokázána.

Znázornění, konkretizace

K řešení problému dojdeme pomocí různých grafů, diagramů a obrázků, které nám usnadňují cestu k řešení.

Zavedení pomocných prvků

Zavedením pomocného prvku, který nám změní situaci, kterou jsme již dříve řešili a která je nám známá, dosáhneme vyřešení problému.

Opakování určitého postupu

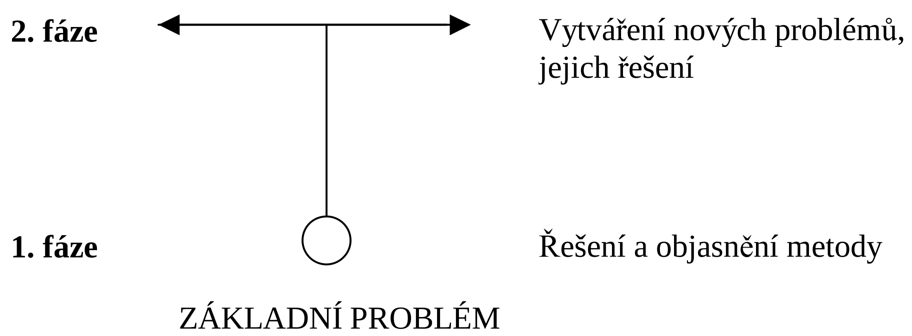
Nejpoužívanější strategie, kterou využívá většina matematiků. Tato strategie je spojena s aritmetikou. Hlavně se týká oblasti počítání (sčítání, odčítání, násobení a dělení víceciferných čísel).

Autor knihy Jan Kopka (1999) současně uvádí vedle základních strategií řešení problému i další možné metody, které lze využít. Jedná se o nesystematické metody pro řešení zadaného úkolu.

2.3. Hrozny problémů

Metoda vytváření hroznu problémů je jednoduše řečeno souhrn navzájem příbuzných problémů. Jak je už popsáno v předchozích kapitolách, při řešení základního problému využíváme heuristické strategie. Dříve, než vytvoříme nové problémy, je důležité, aby žáci měli dostatek prostoru základní problém vyřešit a pochopit metodu při řešení. Poskytnout nezbytnou pomoc jim do jisté míry může i sám vyučující. Je velice důležité, aby nové problémy se v začátku nepříliš lišily a postupovaly tak od jednodušších k těm složitějším, které se více vzdalují původnímu problému.

Na následujícím obrázku (obr. 9) je patrné, že celý proces řešení problému můžeme rozdělit do dvou fází. (Kopka, 1999)



Obr. 9

Fáze:

První fáze – spočívá ve vyřešení základního problému a pochopení metody; při řešení využíváme heuristických strategií

Druhá fáze – fáze, kdy začneme vytvářet na základě výchozího problému problémy nové; od jednodušších ke složitějším

3. Formy a metody ve výuce

3.1. Vyučovací formy

Jedním ze základních prvků vyučovacího procesu je vedle cílů, učiva, metod a pomůcek organizační forma výuky.

Jedná se o konkrétní způsob, ve kterém probíhá samotné vyučování. Je ovlivňována počtem účastníků, prostředím a vymezeným časem. Proto mluvíme o dvou základních hlediscích používaných ve vyučovacím procesu. Jedná se o hledisko způsobu řízení činnosti žáků a hledisko časové.

a) **hledisko způsobu řízení žáků ve výuce (sociální hledisko)**

- Frontální (hromadné) vyučování

Je založeno na principu řízení velké skupiny žáků. Tato forma je velice efektivní z hlediska časové a organizační nenáročnosti. Právě proto je zde uplatněna minimální možnost spolupráce a součinnosti žáků. Po mnoho století je to nejčastější používaná forma výuky.

- Kooperativní (skupinová) výuka

Učitel pracuje s menší skupinou nebo dokonce s jednotlivými žáky. Výhodou této formy je osobní přístup učitele a vede ke větší spolupráci žáků.

b) **hledisko podle charakteru, vyučování a prostředí (normativní hledisko)**

- vyučovací hodina – základní vyučovací jednotka
- vycházka
- exkurze
- beseda
- mimotřídní a mimoškolní činnosti

3.2. Vyučovací metody

Základem vyučovacích metod je způsob, jak dosáhnout výchovných a vzdělávacích cílů. Dříve převládaly nejčastěji metody slovní. Postupně se do výuky začleňovaly další metody, které rozvíjely psychické potřeby žáka. V odborné literatuře se můžeme setkat s různým dělením vyučovacích metod. Např. Maňák a Švec ve své publikaci Vyučovací metody (2003) uvádí následující dělení:

- **Metody z hlediska pramene poznání a typu poznatků**

1. Metody slovní
    - monologické metody
    - dialogické metody
    - metody písemných prací
    - metody práce s textem

2. Metody názorně demonstrační
    - pozorování
    - předvádění
    - demonstrace statických obrazů
    - projekce statická a dynamická

3. Metody praktické
    - nácvik pohybových a praktických dovedností
    - pokusy a laboratorní činnost
    - pracovní činnosti
    - grafické a výtvarné práce

- **Metody z hlediska aktivity a samostatnosti žáků**

Metody sdělovací (U→Ž)
Metody problémové (U+Ž)
Metody badatelské, výzkumné (Ž…. + U)

- **Metody z hlediska myšlenkových operací**

Postup srovnávací

Postup induktivní

Postup deduktivní

Postup analyticko – syntetický

- **Metody z hlediska fází vyučovacího procesu**

Metody motivační

Metody expoziční

Metody fixační

Metody diagnostické

Metody aplikační

- **Metody z hlediska výukových forem a prostředků**

Kombinace metod s vyučovacími formami

Kombinace metod s vyučovacími pomůckami

4. Speciální pedagogika osob s poruchami učení

Pro většinu dětí je i vstup do mateřské školy velice obtížný. Musí se vyrovnat s novým prostředím, se změnou režimu ve vícečetné skupině dětí, musí se i samo zaměstnat a naučit se komunikovat se svými vrstevníky a učitelkami. Některým dětem tyto změny nedělají potíže, u některých potíže časem vymizí. Jsou děti, které ať z důvodu kulturního či sociálního, nejsou schopny se v novém prostředí integrovat a problémy přetrvávají či se zhoršují. I špatné pedagogické postupy mohou být jedním z důvodů neúspěchu dítěte.

Před vstupem dítěte do školy si většinou rodiče kladou otázku, do jaké školy přihlásí své dítě a zda je vůbec dítě zralé nastoupit do základní školy. Po předškolním zařízení, kde se děti všeobecně vzdělávají, nastupují na základní školu, kde vývoj pokračuje především zdokonalováním ve psaní, čtení, počítání a v dalších oblastech. Dostatečná zralost nervové soustavy žáka je podmínkou k úspěšnému zvládnutí těchto cílů.

Dnes se velice často můžeme setkat s žáky, kteří nejsou na úkoly spojené se vzděláním dostatečně připraveni a zaostávají. Tyto jedince, kteří mají problémy s chováním a učením můžeme rozdělit do dvou skupin. Jsou to jednak děti s problémy způsobenými vnějším prostředím, které by měly být řešeny s klinickým psychologem nebo dětským psychiatrem. Druhou skupinu tvoří děti s poruchami učení způsobenou nedostatečnou vyzrálostí kognitivních center mozku. Jedná se o tzv. vývojové poruchy. Tato skupina poruch je hlavním tématem následujících kapitol.

4.1. Historie

Už v historii se objevovaly osoby s problémy se čtením a psaním, které nazýváme dnes specifickými poruchami učení. Tyto poruchy byly označovány jako slovní slepota, vrozená slovní slepota či děti koktavé v pravopise. Až v 80. letech 19. století přišel s pojmenováním dyslexie německý oční lékař **Rudolf Berlin**. Podrobnějším zkoumáním, popisem příčin a řešením problematiky se začal zabývat **J. Hinshelwood** (Matějček, 1993), a tím položil základy pro další výzkum.
Touto problematikou se zabýval i jeden z českých lékařů. Byl jím lékař **A. Heveroch**, který na příkladu jedenáctileté dívky popisoval a rozebíral vzdělávací problémy, jenž

v současnosti nazýváme vývojovou dyslexií. Své závěry publikoval v odborném článku *„O jednostranné neschopnosti naučiti se čísti při znamenité paměti"*.

Další významnou osobou, která se zabývala tímto tématem, byl **S. A. Orten**, ředitel psychiatrické nemocnice v Iowě (USA). Orten a jeho tým spolupracovníků sbírali podklady a na základě zjištěných informací vydali několik publikací. Mezi nejznámější bývá uváděna pasáž pod názvem **Ortenovo krédo**: *„Stanovisko, že opoždění a poruchy ve vývoji řečové funkce mohou vznikat z poruch v procesu vytváření jednostranné mozkové dominance v jednotlivých oblastech, přičemž bereme v úvahu hereditární vztahy, přináší s sebou přesvědčení, že takové poruchy by měly reagovat na speciální nácvik, budeme-li dostatečně přesní v diagnóze a budeme-li dost důvtipní, abychom zavedli vhodné nápravné metody odpovídající potřebám každého jednotlivého případu."* (Matějček, 1993, str. 34)

Na tuto problematiku navázali **Josef Langmeier** a **Otakar Kučera**. Jejich jména jsou spojována s diagnostickou a terapeutickou prací v oblasti specifických poruch učení. V té době byly zakládány první třídy pro děti s poruchou učení při psychiatrické léčebně v Dolních Počernicích. Na výzkumu se podíleli i **J. Jirásek**, **Z. Matějček** a **Z. Žlab,** kteří r. 1966 vydali knihu *„Poruchy čtení a psaní"*. Na začátku 70. let je otevřen první stupeň ZŠ pro dyslektické děti v Karlových Varech.

4.2. Definice a klasifikace

Jak uvádí Swierkoszová (2007) definic specifických poruch učení existuje několik. Jsou brány spíše jako hypotézy, ve kterých jsou zdůrazněny obtíže při osvojování řeči, čtení, psaní, matematiky, které jsou v rozporu s výkony žáka v jiných předmětech či dovednostech.

Např. Z. Matějček (1993, str. 24) definuje SPU jako: *„Poruchy učení jsou souhrnným označením různorodé skupiny poruch, které se projevují zřetelnými obtížemi při nabývání a užívání takových dovedností, jako je mluvení, porozumění mluvené řeči, čtení, psaní, matematické usuzování nebo počítání. Tyto poruchy jsou vlastní postiženému jedinci a předpokládají dysfunkci centrálního nervového systému. I když se porucha učení může vyskytnout souběžně s jinými formami postižení (jako jsou např. smyslové vady, mentální retardace, sociální či emociální poruchy) nebo souběžně s jinými vlivy prostředí (např.*

kulturní zvláštnosti, nedostatečná nebo nevhodná výuka, psychogenní činitelé), není přímým následkem takových vlivů."

Neexistuje tak ani jednotná terminologie tohoto problému, a tak se můžeme setkat i s různými názvy. Dle Pokorné (2000) jsou to např. *specifické poruchy učení*, *specifické vývojové poruchy učení a chování*, *vývojové poruchy učení* či *poruchy učení*. Všem těmto označení jsou podřazené pojmy jako dyslexie, dysgrafie, dysortografie, dyspraxie, dyspinxie či dysmúzie.

Pro úplnost je zapotřebí zmínit pojmy 10. revize Mezinárodní klasifikace nemocí, jejichž znalost je nutná a důležitá při týmové práci s dítětem:

F 80 – F 89	*Poruchy psychického vývoje*
F 81.0	*Specifická porucha čtení*
F 81.1	*Specifická porucha psaní*
F 81.2	*Specifická porucha počítání*
F 81.3	*Smíšená porucha školních dovedností*
F 81.8	*Jiné poruchy školních dovedností*
F 81.9	*Vývojové poruchy školních dovedností nespecifikované*

(Zelinková, 2000, str. 13)

4.3. Druhy specifických poruch učení

4.3.1. Dyslexie

Je to nejznámější pojem této skupiny poruch, o kterém se začalo mluvit nejdříve, jelikož se nejnápadněji projevovala. Je popisována jako porucha osvojování čtenářských dovedností. Podle Zelinkové (2000) starší definice uváděly, že při této poruše je úroveň čtení výrazně nižší než všeobecná inteligence. Velice výstižně a popisně uvedla definici této poruchy dvanáctičlenná komise IDA, která se i nadále touto definicí zabývá a upravuje. *„Dyslexie je specifická vývojová porucha učení neurobiologického původu. Projevuje se obtížemi při přesnosti a plynulosti v procesu rozpoznávání a čtení slov, neschopnosti rozkládat slova v hlásky a neschopnosti diferenciace slov ve větě. Tyto obtíže* *jsou typickým projevem deficitu ve fonologické složce řeči, která je jedinečným neočekávaným deficitem ve vztahu k obecným poznávacím schopnostem dítěte, za předpokladu efektivního vzdělávacího procesu ve třídě. Mezi sekundární následky pak můžeme zahrnout problémy se čtením, s porozuměním textu, nižší zkušenosti se čtením, což může bránit rozvoji slovní zásoby a rozvoji všech dalších dovedností dítěte.“* (Zelinková, 2000).

Všechny definice se shodují v tom, že se jedná o jednu ze specifických poruch učení, je to problém jazykový, je organického původu a projevuje se problémy při dekódování slova, což je důsledkem nepochopení zvukové stránky daného slova.

Projevy

- Rychlost čtení
  - pomalé, namáhavé, neplynulé, s menším výskytem chyb
  - rychlé, překotné a se zvýšenou chybovostí
- Záměny tvarově podobných, zrcadlových písmen jako je např. b-d-p, a-o-e, m-n, l-k
- Vynechávky - vynechává písmena, slabiky, celá slova; přídavky
- Chyby jsou lokalizovány do určité části slova
- Výskyt pomocných mechanismů při čtení – dvojí čtení, čte zpěvavě, trhaně, vrací se, opakuje
- Přesmykování slabik - slovo lokomotiva – kolomotiva
- Selhává v porozumění čtenému

4.3.2. Dysgrafie

Pojem vychází z řeckého slova grafien (psáti) a dys (špatný, porušený). Jedná se o poruchu psaní, tedy grafického projevu jako takového. Písmo dítěte často bývá nečitelné, jedinec si obtížně pamatuje písmena a obtížně je napodobuje. Příčinou této poruchy často bývá porucha jemné motoriky, v některých případech i s kombinací s hrubou motorikou.

Projevy

- Písmo je obecně nečitelné
- Nedodržování sklonu, směru písma
- Nejistota tahu písma, tlak na podložku
- Tvarové záměny, vynechávání délky, zrcadlové psaní
- Obtížné zapamatování si tvarů písma a následně jeho nápodoba
- Často atypický úchop psacího náčiní

(Swierkoszová, 2007)

4.3.3. Dysortografie

Dysortografie je specifická porucha pravopisu. Často se vyskytuje ve spojení s dyslexií a dysgrafií. Tato porucha nepostihuje celou oblast gramatiky, ale projevuje se tzv. specifickými dysortografickými chybami, které vyplývají z nezvládnutého osvojování gramatických pravidel. Problematiku dysortografie lze shrnout do typických znaků dle Žlaba. Ten rozlišuje dysortografii:

a) *auditivní* – oslabení bezprostřední sluchové paměti; žákům dělá problémy zachytit pořadí jednotlivých hlásek, význam slova však chápou
b) *vizuální* – snížená kvalita zrakové paměti; žák stěží vyhledá chyby v textu, při poskytnutí delšího času je obtížně vyhledá a opraví jejich malé množství
c) *motorickou* – spojena s námahou a pomalostí vlastního psaní; veškerá koncentrace pozornosti žáka na grafický projev je na úkor uvědomělého aplikování gramatických pravidel

(Žlaba In Michalová, 2001)

Projevy

- Grafické záměny zvukově podobných hlásek (b-d, z-s, h-ch)
- Obtížná výbavnost naučeného tvaru písmene v písemné podobě, snížená schopnost spojení psané a slyšené podoby hlásky
- Záměny tvarově podobných písmen v písemné podobě
- Chyby z artikulační neobratnosti
- Chyby v měkčení na akustickém podkladě v důsledku sykavkových asimilací

- Nedodržování pořadí písmen, slabik ve slově
- Přidávání písmen a slabik do slov
- Nedodržování délky samohlásek
- Neschopnost dodržovat hranice slov ve větě
- Problémy se slabikotvorným r,l,

4.3.4. Dyskalkulie

Dyskalkulii můžeme popsat jako poruchu matematických dovedností. Projevuje se obtížným chápáním číselných pojmů, chybným prováděním matematických operací, postihuje prostorové představy při práci s čísly i v geometrii. Podle příznaků můžeme dyskalkulii dělit do dalších typů:

a) *praktognostickou* – narušená schopnost manipulace s předměty – jejich přiřazování k symbolu čísla; neschopnost řadit předměty podle velikosti
b) *verbální* – vázne schopnost slovně označovat operační znaky, matematické úkony, množství a počet prvků
c) *lexická* – obdoba dyslexie v oblasti čtení číslic a čísel; typická neschopnost číst matematické znaky, vícemístná čísla s nulami, tvarově podobná čísla
d) *grafická* – obdoba dysgrafie, pouze v oblasti matematiky; narušená schopnost psát číselné znaky, problémy v geometrii
e) *operacionální* – žák zaměňuje matematické operace, nahrazuje složitější jednoduššími
f) *ideognostická* – porucha v chápání čísla jako pojmu; žák nedovede zpaměti spočítat příklady, které by vzhledem ke svému věku a inteligenci měl zvládnout

(Michalová, 2001)

PRAKTICKÁ ČÁST

V praktické části diplomové práce jsem zpracovala úvodní pracovní list určený pro žáky 5. ročníku ZŠ, ve kterém se žáci seznámili s problematikou řešení úkolu podle podmínek základní věty o čtyřech barvách a na základě vlastního objevování měli přijít s vlastní hypotézou a následným ověřením této základní věty. Dále jsem sledovala strategie při řešení tohoto problému. Na základě získaných dat jsem výsledky zaznamenala do tabulky a grafů, ze kterých je zřetelná celková úspěšnost žáků při řešení daného problému. Cílem bylo i vysledovat práci žáků se specifickými poruchami učení, proto jsou v tabulkách a grafech údaje dále rozděleny na úspěšnost žáků bez a s poruchou učení.

5. Příprava výzkumu

Původním záměrem bylo testování a provádění výzkumu určeného žákům 3. a 4. ročníku základní školy. Jelikož sama učím na základní škole malotřídního typu a vyučuji 3. až 5. ročník, před samotným vypracováním a jakýmkoliv zjišťováním údajů a dat potřebných pro diplomovou práci, jsem do hodiny matematiky zařadila vypracování netradičních úloh a zadala úlohu všem žákům.
Měli za úkol vybarvit obrázek pomocí čtyř barev za zadaných podmínek základní věty o čtyřech barvách. Pro žáky 3. a 4. ročníku byl tento úkol velice obtížný a pro neúspěch i nezajímavý. Po vybarvení již prvního obrázku porušili zadané podmínky a následná oprava je unavovala. I přes ukázku správného postupu a opakované vysvětlení nedocházelo ke zlepšení. Proto jsem práci u těchto dětí ukončila. Využívali spíše náhodné vybarvování bez snahy naleznutí jakékoli strategie. Bylo na nich zjevné neuvědomění a nepochopení úkolu, který jsem zadala. Tyto pocity převládaly u většiny z nich. Žáci 5. ročníku však byli úkolem nadšeni, práce je bavila a mnohem více se nad problémem zamýšleli a snažili se nalézt určitou cestu k dokončení práce za zadaných pravidel. Sami se chtěli aktivně zapojit a při hodině informatiky vybarvovali jimi navržený obrázek. Zadaný úkol žáky bavil, dokázali i vhodněji a srozumitelněji popsat jimi zvolenou strategii.

Nebylo by efektivní volit stejný typ práce u žáků 3. a 4. ročníku na jiné škole, udržet jejich pozornost a motivaci v několika vyučovacích hodinách, proto jsem se rozhodla zadat práci jen žákům 5. ročníku. Právě i problém, který je obsahově zajímavý, je pro žáky velkou výzvou a motivací. Touží ho vyřešit a bylo tomu tak i u žáků Základní školy Žlutice, kde jsem svůj výzkum vykonala.

5.1. Cíl průzkumného řešení

Pro průzkum této problematiky jsem si stanovila následující cíle:

- Porovnat dosažené výsledky žáků, popřípadě jejich postupné zlepšování v řešení tohoto problému, jejich úspěšnost
- Analyzovat strategii žáků řešení tohoto problému
- Sledovat žáky s poruchou učení při řešení problému a jejich úspěšnost

5.2. Plánované metody a organizační formy

Plánované metody

Dle rozdělení Maňáka (2003) jsem využila následující metody:

- ❑ Metody z hlediska pramene poznání a typu poznatků

1) Metody slovní
    - Monologické - vysvětlení zadaného úkolu
    - Dialogické - diskuze - o jednotlivých strategiích, postupu vybarvování, plnění zadaného úkolu, hodnocení

2) Metody názorně demonstrační
    - Projekce statická – práce s interaktivní tabulí
    - Demonstrace statických obrazů – ukázka obrázku při zadání úkolu, mnou vybarvené obrázky (ukázky)

3) Metody praktické
    - Grafické a výtvarné činnosti

Organizační formy

a) Sociální hledisko

FRONTÁLNÍ VÝUKA – hromadná výuka se všemi žáky, přímý kontakt učitele se třídou

Cílem bylo vysledovat v obecné rovině úspěšnost jednotlivých žáků, zvolila jsem právě proto tuto organizační formu, jiná by byla nevhodná.

SKUPINOVÁ VÝUKA – zpracování teoretických poznatků tohoto matematického problému

b) Normativní hledisko

- pro tuto práci jediná možná je vyučovací hodina

5.3. Charakteristika vzorku

Průzkumné šetření jsem zaměřila na žáky 5. ročníku ZŠ Žlutice, která se nachází v Karlovarském kraji. Škola má devět ročníků a člení se na první a druhý stupeň. Je to škola spádová, proto ji navštěvují i žáci z okolních vesnic. Jednotlivé ročníky jsou zde po jedné nebo dvou třídách. Průzkumného šetření se zúčastnilo celkem 32 žáků, z toho 20 dívek a 12 chlapců. Z tohoto celkového počtu je 6 žáků se specifickou poruchou učení. U dvou z šesti žáků byla diagnostikovaná jedna specifická porucha učení. U zbývajících shledaly pracovnice pedagogicko-psychologické poradny souběžně více poruch. Stupně poruch všech žáků odpovídají zdravotnímu postižení dle §16, odst. 2 Školského zákona č. 561/2004 a opravňují zařadit žáky do systému speciálního vzdělávání v rámci ZŠ. U všech žáků se specifickou poruchou učení probíhá individuální integrace a reedukace na ZŠ. Na doporučení poradny a následné žádosti zákonných zástupců žáka jim byl školou vypracován individuální vzdělávací plán, podle kterého probíhá vzdělávání těchto žáků.

Podle slov vyučujících se žáci v obou třídách jeví jako snaživí a průměrově není mezi třídami velký prospěchový rozdíl. Na základě vyhodnocených společných testů a písemných prací nejenom v matematice, ale i v ostatních předmětech, neshledávají mezi třídami veliké rozdíly a hodnotí celkově třídy jako nadprůměrné. Samozřejmě se v každé skupině objevují žáci, kteří mají v různých předmětech prospěchové problémy a potřebují na vysvětlení a pochopení učiva více času. To se týká i matematiky. Přesto se většina žáků obou tříd zúčastnila školního kola matematické olympiády a ti nejlepší postoupili do dalšího okresního kola, kde dosáhli dobrého umístění. Matematické soutěže konají od druhého ročníku.

Z psychologického a diagnostického vyšetření žáků (jména byla pozměněna):

Pavel (rok nar. 2002)
U Pavla byla shledána **SPU dysortografie**. Chlapec má oslabení v oblasti jemné motoriky a vizuomorické koordinace. Čtení stále není zautomatizované, přetrvává technika dvojího čtení, která způsobuje jeho nízkou kvantitativní úroveň. Rychlost písma je v normě, avšak písemný projev se projevuje se značnou specifickou chybovostí. Objevují se četné specifické chyby (délky, měkčení). Podle slov vyučujícího tento žák nemá problémy v oblasti matematiky.

Tomáš (rok nar. 2002)
U chlapce byla diagnostikovaná **SPU dyskalkulie**. V oblasti matematických dovedností vázne představa číselné řady 1-100 a orientace na číselné ose. Dále nezvládá rozklad čísla, chybuje u zápisu čísel – např. místo čísla 21 čte nebo napíše 12. Problémy se výrazně projevují v numeraci, kdy přepočítává na prstech při sčítání a odčítání s výraznou latencí. Jeho pracovní tempo je velice pomalé.

Ladislav (rok nar. 2002)
Žák se **SPU dyslexie, dysgrafie, dyskalkulie**. Problémy se projevují ve čtení, kde je častá latence mezi slovy a kvantitativní výkon je v pásmu defektu. U chlapce přetrvává technika dvojího čtení. V oblasti psaní se objevují četné specifické chyby a jeho písmo je nejisté, méně úhledné. V matematických dovednostech chybuje v zápisu čísel, má problémy se čtením vícemístných čísel s nulami, zaměňuje tvarově podobná čísla. U tohoto chlapce se problémy projevují ve většině předmětů včetně matematiky. Potřebuje více času na vypracování zadaného úkolu a probírané učivo je zapotřebí několikrát opakovat. Všechny tyto problémy, které jsou spojeny s poruchou učení, se odrážejí na jeho postoji k samotným předmětům. V matematice je prospěchově slabý a chybí mu motivace k plnění dalších úkolů.

Petr (rok nar. 2002)

Chlapci byla diagnostikovaná **SPU dyslexie a dysortografie**. Ve čtení přetrvává nesprávná technika čtení s návykem tichého dvojího čtení, kvantitativní úroveň čtení je v pásmu defektu. Čte po slovech s výraznými zarážkami mezi slovy. Porozumění textu je u chlapce v normě. Při psaném projevu má korektní úchop, avšak rychlost psaní je zpomalena. Obtíže při psaní se projevují v grafomotorice. Ve psaném projevu se objevují velmi četně specifické chyby (délky, výpustky, záměny). U tohoto chlapce se porucha výrazně neprojevuje v hodinách matematiky. Početní úlohy plní bez obtíží. Jediný problém se vyskytuje u slovních úloh, kdy často chybuje z důvodu nepochopení textu. Vyučující řeší tento problém předčítáním slovní úlohy jím samotným či ostatními žáky.

Matěj (rok nar. 2001)

Po kontrolním vyšetření žáka s **SPU dyslexie, dysortografie** přetrvávají obtíže při čtení a psaní. Přes určité zlepšení, kdy bylo odbouráno tiché dvojí čtení, se však aktuální kvantitativní úroveň čtení pohybuje stále v pásmu defektu. Rychlost psaní je výrazně zpomalena a vázne převod sluchových vjemů do grafické podoby, který se projevuje nejistotou a dlouhými časovými latencemi. Všechny uvedené obtíže se projevují velmi pomalým tempem čtení, výrazně zpomalenou rychlostí psaní, zvýšenou specifickou a gramatickou chybovostí. Z důvodu značných problémů v českém jazyce považuje matematiku za oblíbený předmět. Podle slov vyučujícího se u tohoto chlapce vyskytuje malá chybovost v početních úkonech. Problémy se objevují u delších slovních úloh a písemném zadání jakéhokoli úkolu z důvodu neporozumění textu. Zde je nutné vysvětlení či pomoc vyučujícího, popřípadě spolužáků.

Jiří (rok nar. 2001)

U chlapce přetrvávají **SPU dyslexie, dysortografie**. Čtenářské dovednosti chlapce se nalézají v pásmu hlubokého podprůměru, čtení je těžkopádné a pomalé. Z vyšetření písemného projevu je patrná specifická a gramatická chybovost, jejíž zpětné zdůvodnění je problematické. Žák se v matematice jeví jako slabší, podprůměrný. Jeho neúspěch se odráží i k postoji předmětu.

5.4. Organizace sběru dat

Před samotným výzkumem jsem si postupně sepsala jednotlivé body, připravila pracovní listy a potřebné materiály, abych v každé třídě zadala úkol stejným způsobem, a tím dopomohla k větší objektivitě nasbíraných dat a dodržela tak jednotný styl zadávané práce. Pracovní listy a následně obrázky pro sběr dat byly vypracovány na základě cíle výzkumu. K dosažení potřebných dat jsem zvolila i metody a formy výuky, aby se mi dostalo takových výsledků, které bych později použila při analýze získaných dat a dospěla k závěru výzkumu.

Všechny zadané úkoly jsem žákům vysvětlovala ústně, nevyužila jsem písemného zadání v pracovních listech. Činila jsem tak proto, že pro žáky to byl nově zadaný úkol a mohli by mít další případné dotazy k vypracování. Dalším důvodem byl i fakt, že na zadaném úkolu pracovali i žáci se specifickými poruchami učení, pro které je jistě jednodušší slovní zadání, nežli zadání písemnou formou.

Po domluvě s vyučujícími jsem postupně v každé ze dvou tříd strávila celkově čtyři vyučovací hodiny. Většinou jsem ve třídě pracovala sama, bez přítomnosti vyučujícího. Jednotlivé úkoly jsem si rozdělila do tří etap.

1. etapa – vyřešení a ověření problému

Při úvodním setkání s žáky jsem po představení se a stručném popisu, proč se vlastně na výzkumu podílejí, zadala požadovaný úkol pro dané setkání. Žáci byli ujištěni, že pracují anonymně a jejich práce je zcela dobrovolná. Zdůraznila jsem, že se nejedná o testování jejich znalostí a vědomostí. Dá se říci, že pracovali svědomitě a to, že jsou vybráni do výzkumu je i motivovalo ke větší snaze úkol splnit.

Cílem první hodiny našeho setkání bylo zadat výchozí situaci. Samotní žáci měli pomocí vlastního experimentování dojít ke své hypotéze. Svou vyřčenou hypotézu měli následně ověřit na jimi navrženém obrázku a přesvědčit se, zda toto tvrzení platí i u jiného obrázku.

2. etapa – řešení problému, využité strategie a úspěšnost řešení

Při druhém setkání, které trvalo dvě vyučovací hodiny, se na základě předchozích činností společně dobereme k vyslovení hypotézy, která platí pro všechny obrázky. Na základě vyslovené věty měli žáci vybarvit již složitější obrázek. Následovala debata o strategii plnění tohoto úkolu, jejich zkušenosti a postup při řešení úkolu. Na základě zkušeností a popisu strategie úspěšných žáků měli možnost vyzkoušet a být úspěšnými při vybarvování dalšího obrázku i žáci, kteří byli v předchozích úkolech méně úspěšní. Mým cílem bylo sledovat úspěšnost žáků při řešení problému, zapojení žáků se specifickými poruchami učení a popis jednotlivých strategií, kterých žáci využívali.

3. etapa – hrozny problémů

Při třetím a závěrečném setkání jsem pro žáky připravila obrázky a zadání, které byly příbuznými problémy k základnímu problému. Zde jsem sledovala opět jejich úspěšnost při plnění úkolu, zda využívali stejné strategie, bylo-li to možné, či změnili strategii, aby úkol splnili. V zájmu bylo opět sledování a zaměření se na úspěšnost u žáků se specifickými poruchami učení.

6. Výzkum

6.1. 1. etapa

Časová dotace: 1 vyučovací hodina

Na základě rozdaných pracovních listů a seznámení s úkolem měli žáci samostatně řešit problém a svoji úvahu následně ověřit.

Podle výše popsaných problémů dle Kupky (1999) se jedná o problém, kdy je přesně popsána výchozí situace. Pro žáky není známa cesta a cíl samotný, jedná se tedy o tzv. zkoumání problému. Cestu si zvolí žáci sami a využívají při tom různé strategie. Ze základního Kupkova rozdělení strategií lze vyloučit obecné strategie jako je např. analogie (žáci se s podobným problémem setkávají poprvé), zobecnění (neznají žádné pojmy či prostředky týkající se tohoto problému). Takto bychom mohli pokračovat dále. Použití obecných strategií využívají vyučující více na vyšších stupních nebo je použijí u mladších žáků, kteří již mají dostatek známých vědomostí a dovedností. Předpokládá se, že žáci využijí strategie jako je pokus-omyl či odhad-strategie-oprava.

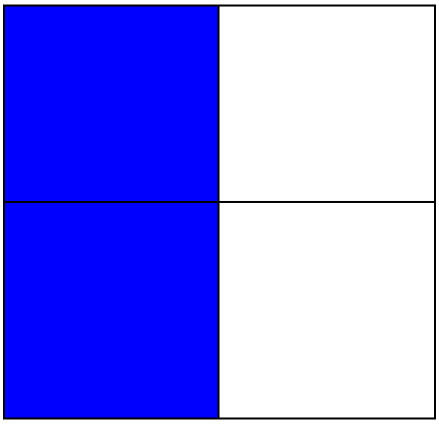
Zadání úkolu žákům:

Žákům byly rozdány pracovní listy (viz. příloha č. 1) na vypracování a pomocí obr. 1 a obr. 2 jim bylo podáno vysvětlení k jeho vypracování:

Kolik barev nejméně potřebuješ k vybarvení celého obrázku, aby žádné dvě sousedící plochy nebyly vybarveny stejnou barvou?

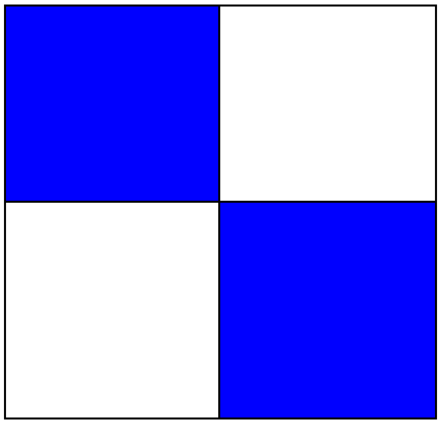
Sousedícími se rozumí ty, které mají společnou čáru (obr. 1), nikoli ty, které mají společný bod (obr. 2).

Obr. 1



NEMOHU VYBARVIT

Obr. 2



MOHU VYBARVIT

1. Společně si na obrázku 2 ukážeme, že nelze použít pouze jedna pastelka, jelikož bychom nemohli vybarvit žádné dvě sousedící plochy. Vybarvíme-li jednu plochu, pak sousedící plocha musí být vybarvena jinou barvu. Na obrázku 2 jsme použily jednu barvu (modrou), ale další volná pole již nemůžeme vybarvit, jelikož nemáme k dispozici další barvu. Zaškrtneme *nelze* vybarvit .

2. Žáci samostatně (jednotlivci) začínají zadaný obrázek vybarvovat s pomocí dvou barev. V případě, že obrázek dále vybarvit nelze, práci na obrázku ukončí a zaškrtnou variantu *nelze* vybarvit.

3. Pokračují u dalšího, stejného obrázku s použitím tří barev, čtyř barev,…

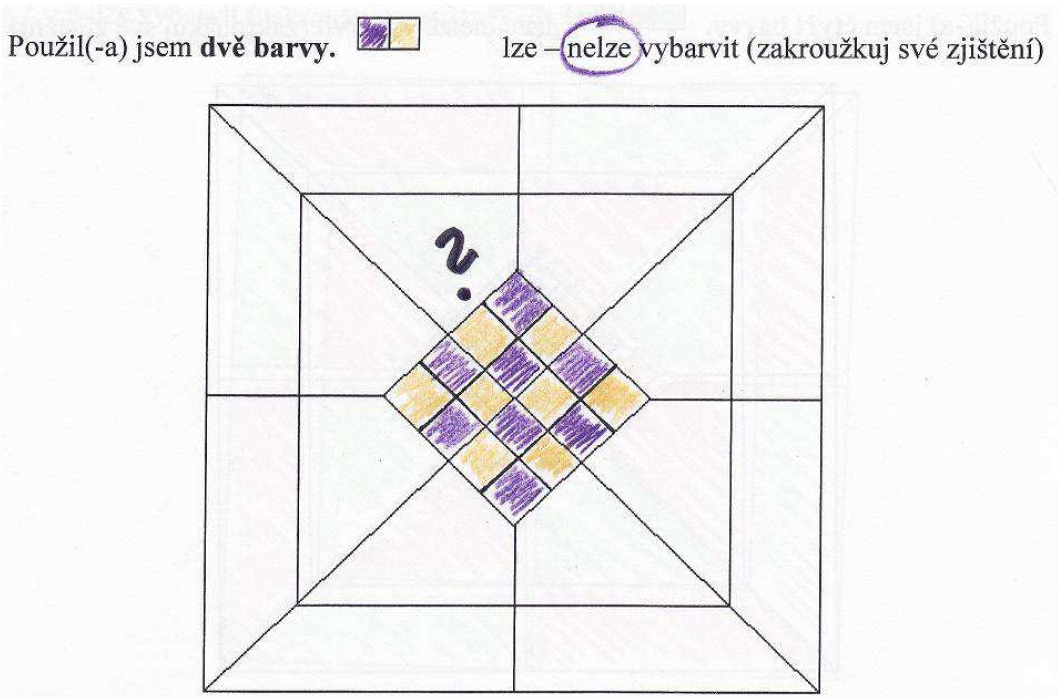
4. Práci končí ve chvíli, kdy mají vybarven celý obrázek s použitím co nejméně barev. Označí *lze* vybarvit a již nepokračují ve vybarvování dalšího obrázku.

5. Přesvědčení o svém tvrzení na vlastním obrázku. Žáci si navrhnou svůj vlastní obrázek a na něm si ověří, zda jim k vybarvení stačí stejný počet barev jako na mnou navrženém obrázku. Použili popřípadě i méně barev?

Zpracování zadaného úkolu:

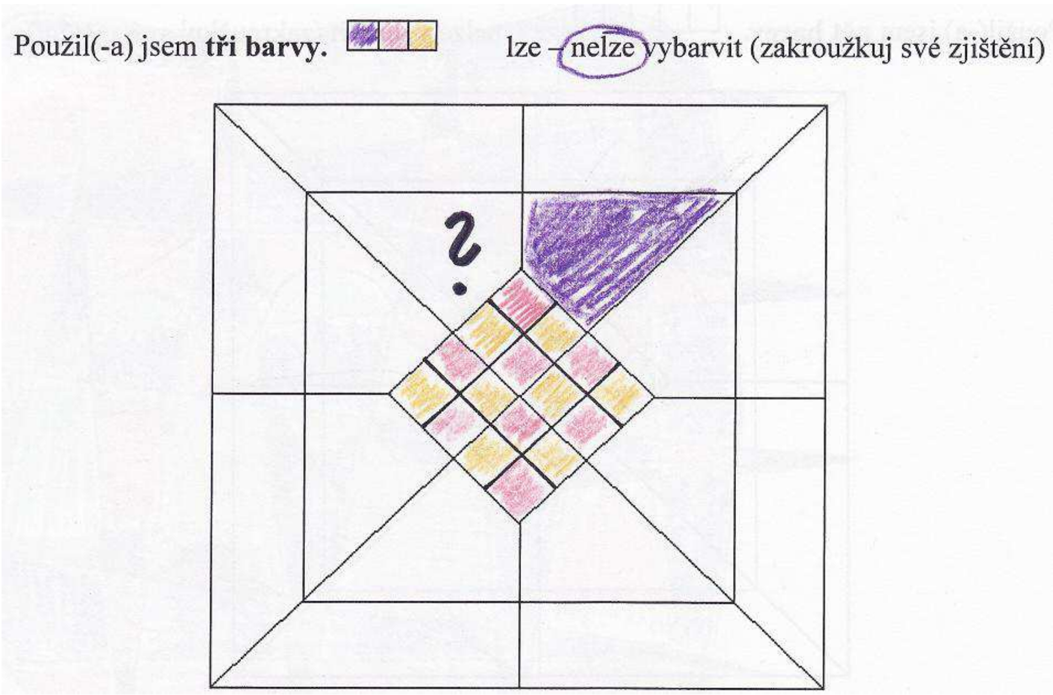
Žákům byl zadán obrázek, který lze vybarvit s minimálním počtem čtyř barev, aby dodrželi zadání úkolu. Zadání úkolu pochopili, žádné jiné dotazy k vypracování neměli.

Jak je z následujícího obrázku (obr. 3) patrné, žáci nemohli vybarvit obrázek za použití pouze dvou barev. Všichni u tohoto obrázku zvolili variantu, že nelze vybarvit.



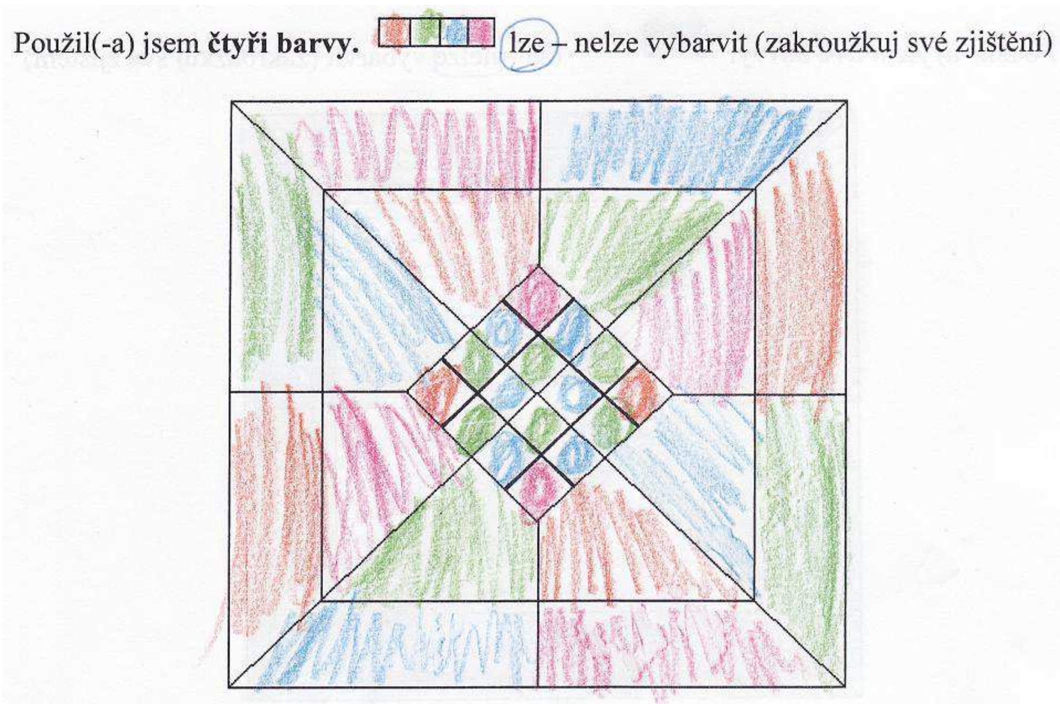
Obr. 3

Na dalším obrázku žáci vybarvovali maximálně se třemi barvami. Z následující ukázky žáka (obr.4) je otazníkem označené místo, kde dále nemohl pokračovat a práci na tomto obrázku ukončil. Ostatním žákům též nedělalo problémy zjistit, že daný obrázek nelze vybarvit. Správné řešení označili všichni žáci.



Obr. 4

Obrázek a zároveň i správné tvrzení, že obrázek lze vybarvit za použití čtyř barev označilo celkem 24 žáků z celkového počtu 32 žáků. Další obrázek (obr. 5) je ukázkou jedné z mnoha variant, která byla správná.



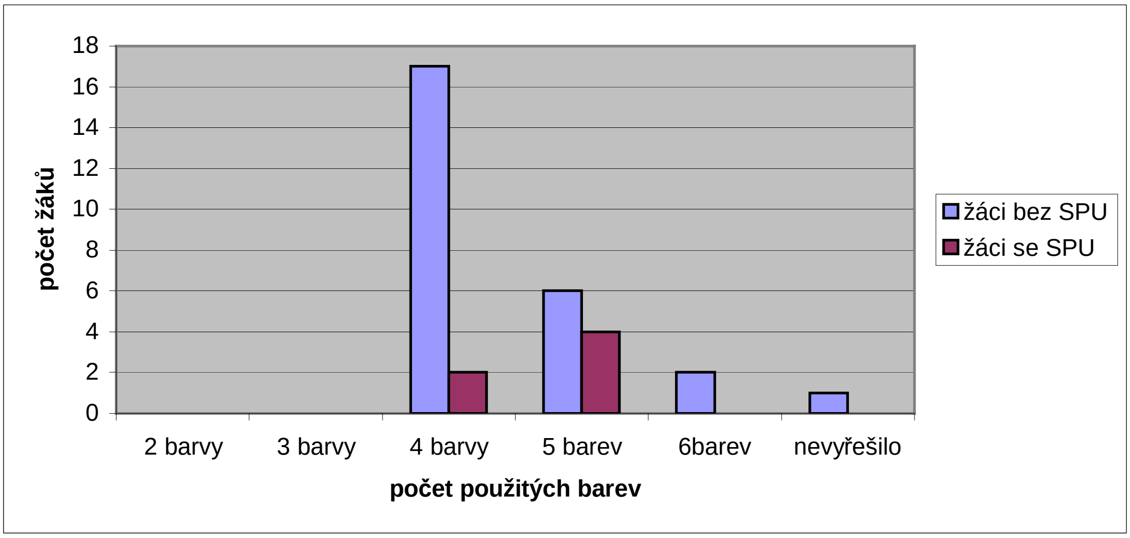
Obr. 5

Z následujících souhrnných údajů v tabulce a grafu vyplývá, kolik žáků potřebovalo k vyřešení úkolu daný počet barev.

Tabulka č. 1: Počet barev při určení hypotézy

	2 barvy	3 barvy	4 barvy	5 barev	6 barev	nevyřešilo
žáci bez SPU			17	6	2	1
žáci se SPU			2	4	0	0
celkem			19	10	2	1

Graf č. 1: Přehled počtu použitých barev

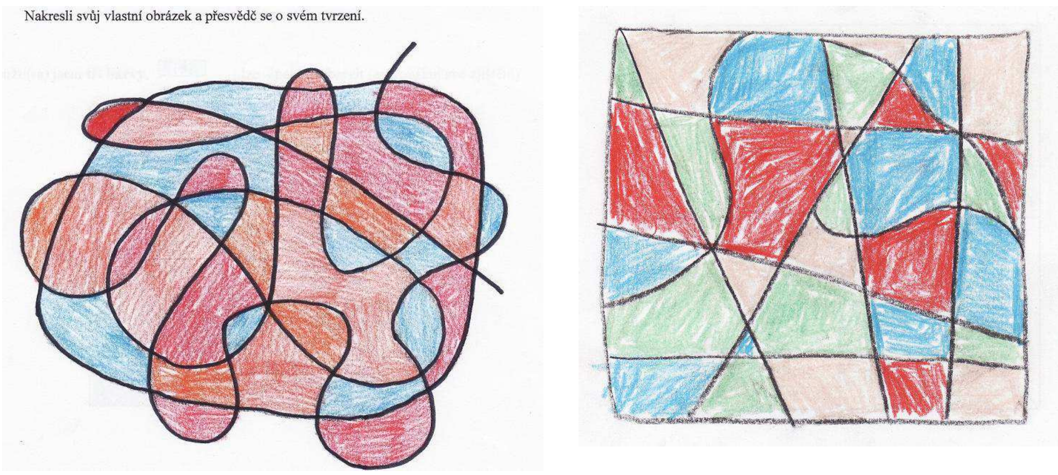


Jak je z předchozí tabulky č. 1 a grafu č. 1 viditelné, celkem 19 z 32 žáků zjistilo, že k vybarvení obrázku jim stačí pouhé 4 barvy. K vybarvení obrázku použilo 5 barev 10 žáků, 2 žáci potřebovali 6 barev a jeden žák úkol nevyřešil. U tohoto žáka, ačkoli označil tvrzení, že stačí 5 barev, došlo k chybnému řešení úkolu, protože nedodržel zadané podmínky, kdy nesměly být vybarveny dvě plochy vedle sebe stejnou barvou. Jednalo se spíše o neúmyslnou chybu, kdy si to dotyčný možná ani neuvědomil a pokračoval dále ve vybarvování obrázku.

Z celkového počtu žáků ke správnému určení hypotézy čtyř barev dospělo 61,3%. Ke správné hypotéze čtyř barev došlo ze žáků bez SPU 68%, pouze 32% z těchto žáků došlo k závěru, že ke splnění úkolu je potřeba více barev.

Při plnění úkolu žáci, kteří neoznačili, že jim k vybarvení stačí pouze 4 barvy, většinou nesprávně pochopili či si neuvědomili zadání úkolu. Zadání znělo, kolik nejméně barev je zapotřebí ke splnění úkolu. Při vybarvování se nesnažili s barvami šetřit a postupně přidávat, jak tomu dělali úspěšní žáci, ale od samého počátku chtěli využít hned všechny barvy za sebou a bez jakéhokoliv uvážení a myšlení vybarvovali zadaný obrázek tak, aby využili všechny barvy. To bylo příčinou jejich neúspěchu.

Žáci si následně měli svoji hypotézu ověřit na jimi navrženém obrázku, zda i pro jiný obrázek platí stejný počet barev, popřípadě použili-li barev méně. (obr. 5, 6)

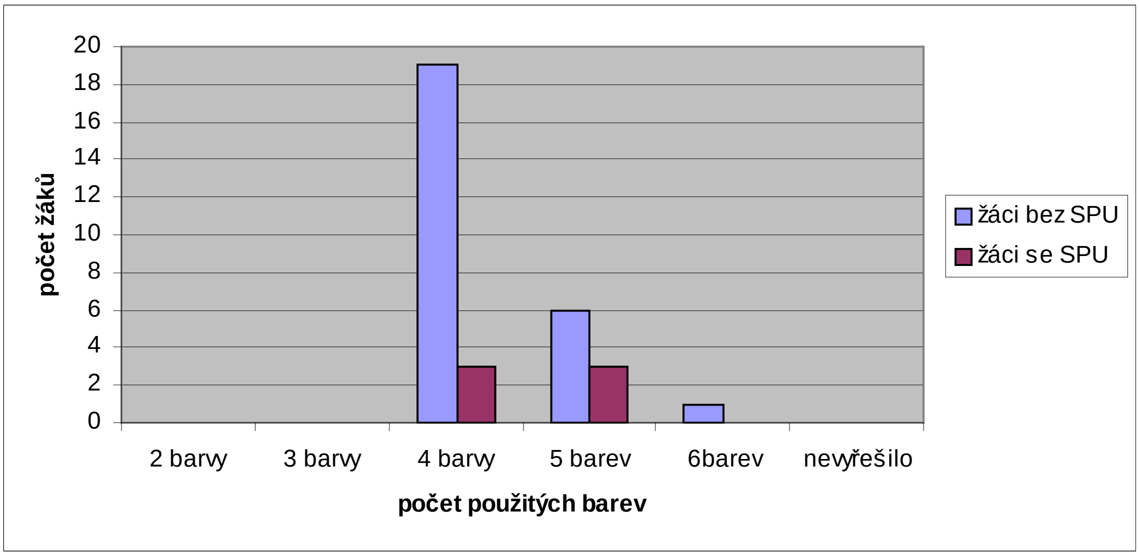


Obr. 5, 6 (žáky navržené obrázky)

Tabulka č. 2: Počet barev při ověření hypotézy

	2 barvy	3 barvy	4 barvy	5 barev	6 barev	nevyřešilo
žáci bez SPU			19	6	1	0
žáci se SPU			3	3	0	0
celkem			22	9	1	0

Graf č. 2: Přehled počtu použitých barev



Tento úkol splnili všichni žáci. Jejich obrázky byly jednodušší, avšak dostačovaly k potvrzení hypotézy. Na základě jimi ověřených informací dostal tento problém smysl. Z tabulky č. 2 a grafu č. 2 lze vyčíst, že došlo ke zlepšení u tří žáků, kdy jim stačilo použít méně barev než při úvodním řešení problému. Příčinou zlepšení mohl být i typ obrázku, který si žáci navrhli. Jelikož nebyly zadány žádné podmínky (počet ploch, tvary křivek ,..) obrázek se mohl jevit jednodušší a ověření jejich hypotézy tak zkreslené. Údaje v tabulce i grafu dokazují, že tentokrát nikdo neporušil pravidlo, kdy nesmějí být obarveny dvě sousedící plochy (hraniční čarou) stejnou barvou.

Práce žáků s SPU

Žáci se specifickými poruchami učení neměli problém porozumět úkolu. Po zadání úkolu neměli žádné dotazy a stejně jako ostatní žáci i oni se hned pustili do řešení problému. Všichni žáci úkol vyřešili za daných podmínek pouze různým počtem potřebných barev. Jak lze z předchozím tabulek a grafů vyčíst, byli někteří z nich úspěšní při řešení tohoto problému. Z 6 žáků, kteří mají diagnostikovanou některou ze specifických poruch učení a zúčastnili se průzkumného šetření, se dva dobrali ke správnému řešení a zjistili, že k obarvení jim stačí pouhé 4 barvy. Ti samí žáci byli úspěšní i v dalším úkolu a svoji hypotézu si ověřili na jimi navrženém obrázku. Dalším čtyřem žákům vyšlo, že je zapotřebí 5 barev. Svoji původní hypotézu, že k vybarvení je potřeba 5 barev, vyvrátil 1 žák, který u jím navrženého obrázku potřeboval pouze 4 barvy.

Při vyjádření hypotézy spočívající ve vyřešení tohoto problému bylo úspěšných žáků bez specifické poruchy učení 68% a pouze 32% z nich potřebovalo k vybarvení více než čtyři barvy, u žáků se SPU byl trend opačný. Ke správnému určení počtu čtyř barev dospělo pouze 33,3% žáků a 66,7% vyřešilo úkol s přesvědčením, že je třeba barev více. Při potvrzení jejich hypotézy na jimi navrženém obrázku již došlo k nárůstu a z celkového počtu žáků s SPU již čtyři barvy potřebovalo 50% z nich.

Závěry z hodiny

Žáci přistupovali zodpovědně k řešení zadaného problému, práce je zaujala a pracovali svědomitě a samostatně. K tomuto závěru jsem došla při pozorování práce žáků při řešení problému. Dalším ukazatelem mi byly i ohlasy jednotlivých žáků, kteří se zapojili do debaty na konci hodiny při hodnocení hodiny. Z vybraných dětí, které se hlásily o slovo, všichni měly pozitivní pocity jak z jejich práce, tak i z výběru problému. Zdál se jim zajímavý a nevšední. Vedle vlastního sebehodnocení dětí mě zaujaly i dotazy, které následovaly. Děti si všimly, že při hodnocení většině z nich stačily pouhé čtyři barvy jak při úvodním obrázku, tak při jimi navrženém obrázku. Zajímalo je, zda by stejný počet barev použily i u dalších obrázků, které by nakreslily. Dále se ptaly, kdo na tento objev přišel. Ačkoli sami si byli téměř jisti počtem barev, který by jim měl stačit, toto tvrzení jsem jim potvrdila až já na úplném konci hodiny. Zjištění, že práce žáky bavila a že se o daný problém zajímali, bylo i zpětnou vazbou pro mě, že zadané téma má cenu dál řešit a že i další úkoly, které jsem měla připravené, budou plnit s chutí a se zájmem. Dalším námětem, který jsem si uvědomila na základě závěrečného hodnocení a dotazů, bylo zařadit do úvodu dalšího setkání trochu teorie o tomto problému úměrně jejich věku.

6.2. 2. etapa

Časová dotace: 2 vyučovací hodiny

Cílem našeho dalšího setkání bylo na základě dvou rozdílných obrázků vysledovat úspěšnost a chybovost při řešení tohoto problému, porovnání výsledků před a po diskuzi se žáky o strategii a jejich způsobu řešení, popis jednotlivých způsobů řešení. V neposlední řadě i pozorování žáků s případnou poruchou učení, jejich zapojení a jejich úspěšnost při řešení tohoto úkolu.

Při tomto setkání měli žáci vyřešit dva obrázky. U prvního obrázku byla opět popsána výchozí situace (podmínky, za kterých budou obrázek vybarvovat) a byl daný i cíl (vybarvit obrázek za pomocí čtyř barev), avšak cestu ke zvládnutí cíle měli nalézt sami. Jedná se tedy o úlohu či nerutinní problém. Předpokládalo se, že žáci, kterým se podařilo vybarvit obrázek za pomocí čtyř barev v úvodní hodině, použijí stejnou strategii i nyní.

Vybarvování druhého obrázku, který vypracovali až po debatě o možných strategiích při řešení, můžeme považovat za cvičení či rutinní problém. Žáci znali výchozí situaci, cíl a seznámili jsme se možnými strategiemi, jak vyřešit problém, a upozornila jsem na možné chyby, kterých se dopouštěli při předchozím vypracování z důvodu předcházení těchto chyb u dalšího obrázku. Ačkoli obrázek byl složitější, žáci jistě budou využívat jimi ověřenou cestu k vyplnění úkolu a méně úspěšní žáci si mohou zvolit strategii svých úspěšnějších spolužáků. Předpokládá se tedy, že žáci, ačkoli vybarvují složitější obrázek, budou úspěšnější.

Toto setkání již neprobíhala v kmenové třídě žáků, ale v počítačové učebně. Žáci pracovali jednotlivě na počítačích v programu malování. Tento způsob jsem zvolila z důvodu časové úspory, kdy je rozhodně rychlejší použití tohoto programu při řešení. Dalším důvodem bylo i to, že si žáci mohou jednoduše a rychle opravit i jimi zjištěnou chybu a nedochází k překreslování, gumování a následnému přebarvení, kdy tím práce ztrácí na přehlednosti. Jelikož je doba, kdy žáci pracují téměř denně s počítačem, je to i jeden z důvodů, který je pro ně snazší a více je zaujme.

Už od konce hodiny úvodního setkání žáci znali správnou odpověď na moji úvodní otázku kolik nejméně barev potřebují k vybarvení obrázku při daných pravidlech. V úvodu hodiny jim bylo opět sděleno správné řešení, které platí u jakéhokoli obrázku, tzn. že k vybarvení jakéhokoli obrázku mám stačí maximálně čtyři barvy tak, aby žádné dvě sousedící plochy nebyly obarveny stejnou barvou. Sousedícími plochami se rozumí ty, u nichž je společná hraniční čára, nikoli ty, které mají společný hraniční bod. Zároveň jsem si na základě dotazů vznesených na předchozím sezení připravila na samý úvod pracovní list (viz příloha č. 2) pro čtyřčlennou skupinu a prezentaci na interaktivní tabuli o teorii daného problému a správné řešení pracovního listu.

Žákům byl dán do čtyřčlenné skupiny pracovní list, který jim umožnil se seznámit ve stručnosti se základy teorie tohoto problému. Nebyly jim podány hotové informace, ale na správnou odpověď měli přijít opakováním probraného učiva daného ročníku. Byla to aktivita na začátku hodiny, která trvala krátce a správné odpovědi jsme si společně zkontrolovali. Žáci byli asi nejvíce překvapeni posledním komentářem, že dokument o řešení tohoto problému se skládá z 56 stran textu a 114 stran obrázkových příloh.

Po úvodní instruktáži začali pracovat. Na ploše obrazovky již měli připravený obrázek (viz. příloha č. 3), který měli vybarvit za použití maximálně čtyř barev.

Zadání úkolu žákům:

Vybarvi obrázek tak, abys použil maximálně 4 barvy. Žádné dvě sousedící plochy nesmí být obarveny stejnou barvou. Sousedícími plochami se rozumí ty, u nichž je společná hraniční čára, nikoli ty, které mají společný hraniční bod.

Zpracování zadaného úkolu:

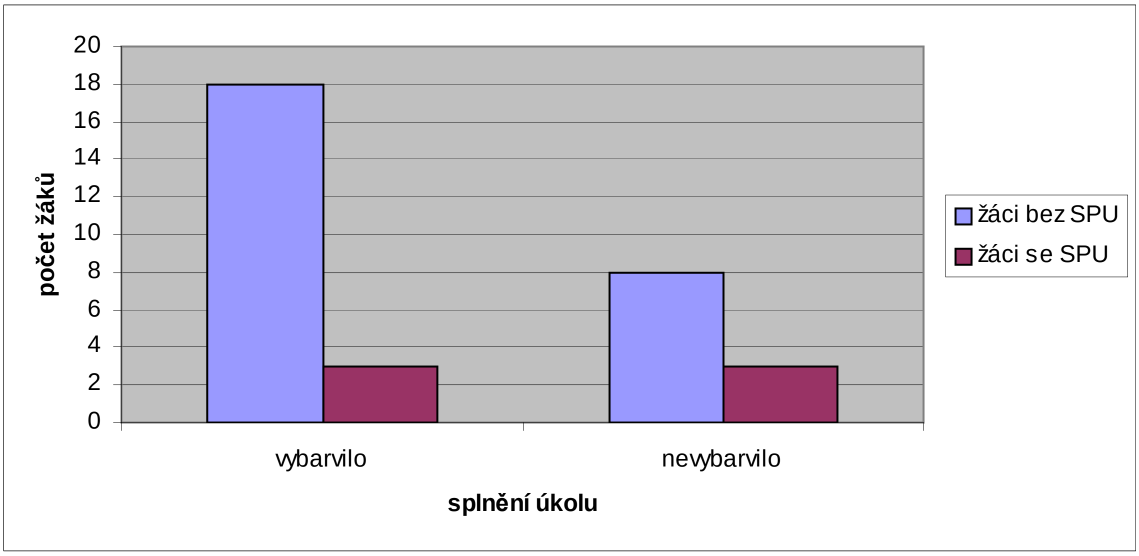
1. obrázek (žáci znají výchozí situaci, znají cíl, neznají cestu)

Se zpracováním úkolu neměli žáci žádný problém. Zadání znali a práce na počítači umožnila i rychlejší zvládnutí úkolu.

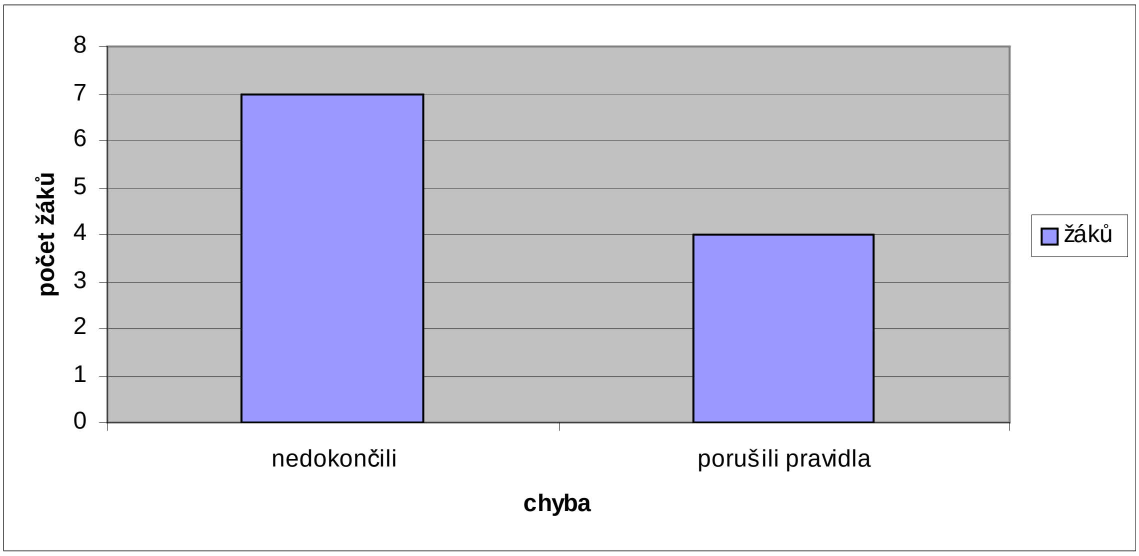
Tabulka č. 3 : Přehled úspěšnosti při zpracování obrázku 1

	vybarvilo	nevybarvilo
žáci bez SPU	18	8
žáci se SPU	3	3
celkem	21	11

Graf č. 3 :Úspěšnost žáků při vybarvování obrázku 1



Graf č. 4: Důvod chybovosti



Jak lze vyčíst z výsledků řešení (tabulka č. 3, graf č. 3), obrázek, který byl zadán, vyřešilo celkem 21 z 32 žáků. Zbývajícím jedenácti žákům se zadaný problém nepovedlo vyřešit a důvodem chyby (graf č. 4) nebyl pouze odevzdaný nedobarvený obrázek, ale u tří žáků, kteří sice obrázek vybarvili celý, bylo porušeno zadání úkolu, kdy nemohou být stejnou barvou obarveny dvě sousedící plochy, které mají společnou hraniční čáru. V tomto případě mohlo jít o neúmyslnou chybu, kterou si dotyční nemuseli uvědomit. Důvodem však mohl být i neúspěch, uvědomění si chyby a práci odevzdali jako hotovou.

Práce žáků s SPU

Z tabulky a grafu je zřejmý i úspěch žáků se specifickou poruchou učení. S porovnáním se žáky bez poruchy učení dopadly procentuálně hůře, nicméně z šesti z nich přesně polovina úspěšně splnila zadání úkolu. Jednalo se o žáky, kteří byli úspěšnějšími i při úvodní hodině. Z mého pozorování méně úspěšných žáků vyplynulo, že obrázek se snažili vybarvit bez vytvoření jakéhokoli plánu a naleznutí strategie, která by jim dopomohla vyřešit problém. Využívali daný počet barev a snažili se postupně vystřídat barvy bez uvážení. Z původního zadání ale vyplynulo, že pochopili, které plochy nesmějí být obarveny stejnou barvou. Lehce možnou opravou v počítačovém programu by se ale i tito žáci pravděpodobně dobrali ke správnému vyřešení, jelikož obrázek nebyl tak složitý a členitý. Namísto volby pomalého a uvážlivého řešení volili metodu pokus – oprava – pokus – oprava. Většina mnou testovaných žáků byla s poruchou dyslexie, dysortografie a u dvou žáků byla diagnostikována dyskalkulie. Mezi úspěšnými byl i žák se SPU dyskalkulie, který jinak bývá podle slov třídního učitele v hodinách matematiky přes veškerou snahu často neúspěšný, a odráží se to i v jeho postoji právě k tomuto předmětu.

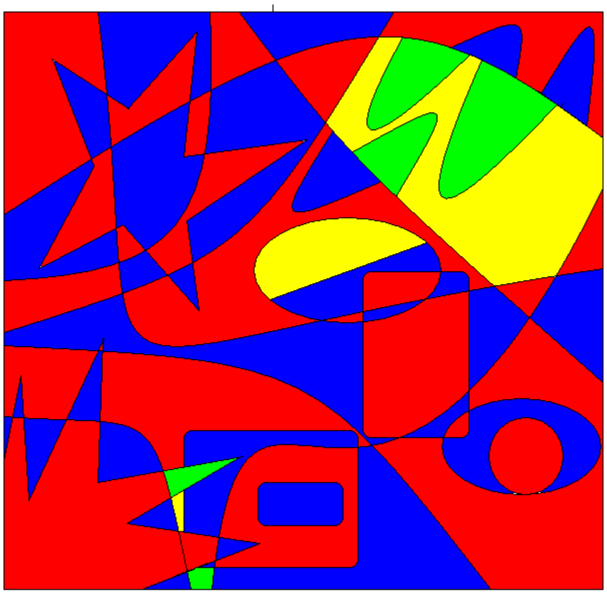
Strategie řešení úkolu

Po dokončení prvního obrázku následovala debata s žáky o tom, zda jim úkol připadal obtížný, jakou zvolili strategii a jak pracují na vybarvování obrázku. K vysvětlení a ukázce způsobu řešení jsme využili interaktivní tabuli, kde jsem měla připravené i jiné obrázky k vybarvování, než se kterými se setkali při samotném plnění úkolu. Někteří využili shodný obrázek pro vybarvování jako při zadání. Velice mě překvapilo, že se do debaty zapojila většina žáků a téměř každý chtěl vyjádřit svůj názor a ukázat postup. Ti, kteří nemluvili přímo o postupu řešení, vyjadřovali také svými gesty, že zvolili stejnou nebo obdobnou strategii.

Stejně jako žáci, i já jsem během jejich práce sledovala, jak pracovali jednotlivci a všímala si jejich způsobu řešení problému. Práci jsem pozorovala nejen při práci na počítači, ale hned při úvodní hodině, kdy měli žáci za úkol vyřešit tento problém za použití co nejméně barev a neznali správnou odpověď.

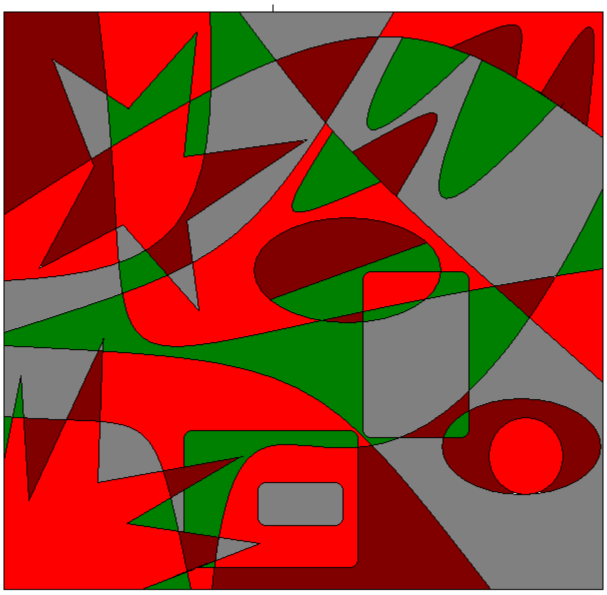
V následujících bodech jsou shrnuty jednotlivé způsoby řešení žáků. K některým způsobům je přiložen i obrázek, který dotyčný žák vybarvoval a ze kterého je i patrný postup práce.

- Většina žáků se shodla na tom, že když jim bylo zadáno, kolik barev nejméně potřebují k vybarvení obrázku, snažili se vždy střídat dvě barvy a v případě, že došli k místu, kde plocha hraničila s dvěma vybarvenými políčky, použili barvu třetí. Pak se zase vrátili zpět ke dvěma původním barvám a postupovali dále. Vždy si další dvě barvy schovávali jako jakousi zálohu. Z následujícího obrázku vybarveného jedním z žáků (obr. 7) je zřejmý tento postup. Na obrázku převládají dvě barvy, jen málo bylo použito barvy třetí a v případě, že bylo nutné, objevila se i barva čtvrtá.



Obr. 7

- Dalším popsaným způsobem bylo, že jedinci použili jednu barvu a snažili se ji použít tak, aby nevybarvili další sousedící plochu s hraniční čárou, ale pouze tu, která by se dotýkala. Postupně pokračovali s další barvou, třetí, čtvrtou. Na obrázku (obr. 8) je ukázka řešení touto cestou.



Obr. 8

- Mnou sledovaní žáci, kteří nevyužili ani jednu z výše popisovaných strategií při řešení tohoto problému, se snažili využít vždy určený počet barev. V případě, že jim hned bylo umožněno použít 3 barvy, snažili se je všechny využít a v místech, kde bylo v okolí jedné plochy více kolonek, jim většinou barvy nestačily, a docházelo tak k neúspěšnému ukončení práce.

- Dalším, ne vhodným postupem, bylo vybarvování obrázku z několika stran. Žák nepostupoval navazováním barev, ale vybarvoval obrázek postupně z několika rohů či stran a uprostřed obrázku došel k názoru, že jej nelze vybarvit, jelikož by porušil daná pravidla.

Po ukázkách na interaktivní tabuli a seznámení s jednotlivými postupy při řešení byl žákům zadán ještě jeden mnou navržený obrázek (viz příloha č. 4), který měli vybarvit za předpokladů stejného zadání jako v úvodu. Dříve než začali pracovat, jsem ještě jednou poukázala na chyby, kterých se někteří dopouštěli a které vedly k jejich neúspěchu. Nejčastější chybou bylo bezmyšlenkovité vybarvování a hádání. Dále jsme si připomněli, že většině pomohlo barvami šetřit a střídat co nejméně barev, v případě nutnosti přidat další. Zadaný obrázek byl obtížnější, kdy nebylo tak zřejmé ukončení jednotlivých ploch a obrázek byl více členitý. Úspěšní žáci, kterým se práce v předešlých úkolech dařila, měli pocit jistoty a během vypracování neměli žádné problémy, popřípadě své chybičky opravovali. U méně úspěšných žáků jsem nepocítila jakoukoli demotivaci jejich předchozím neúspěchem a nechuť pracovat, naopak při vybarvování jsem si všimla, že se snažili nalézt cestu, jak obrázek vybarvit a uvědomili si, že chtějí-li vybarvit obrázek, nemohou pouze využít strategii pokus - omyl a bezmyšlenkovité vybarvování, ale vybarvovat s co nejmenším počtem barev, dokud je to možné. Snažili se využít rad a zkušeností jejich úspěšnějších spolužáků. Pracovali pomaleji, ale s rozvahou.

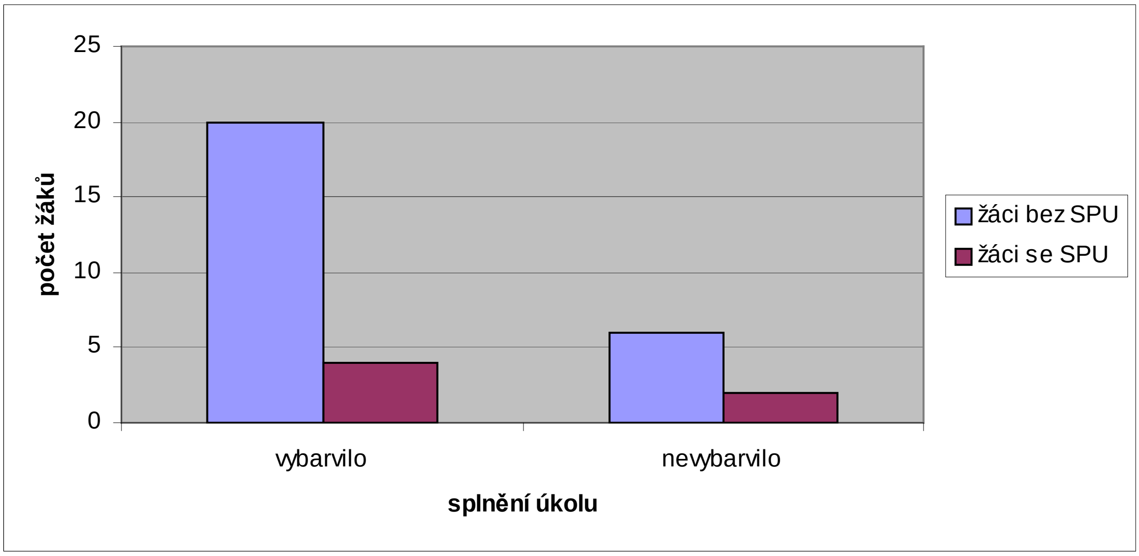
2. obrázek (žáci znají výchozí situaci, znají cestu, znají cíl)

Výsledky úspěšnosti řešení jsou zpracovány do následující tabulky a grafu (tabulka č. 4, graf č. 5).

Tabulka č. 4: Přehled úspěšnosti při zpracování obrázku 2

	vybarvilo	nevybarvilo
žáci bez SPU	20	6
žáci se SPU	4	2
celkem	24	8

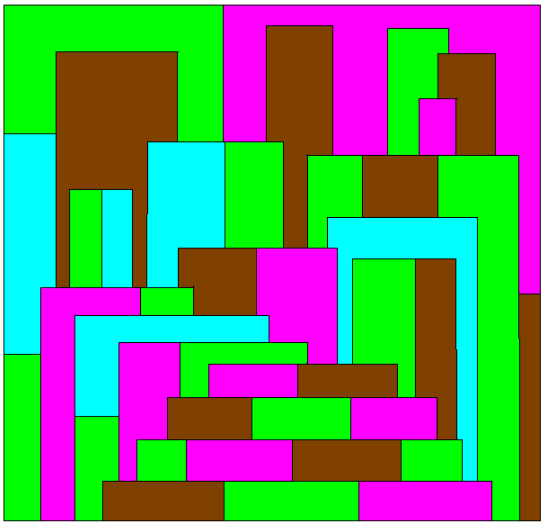
Graf č. 5: Úspěšnost žáků při vybarvování obrázku 2

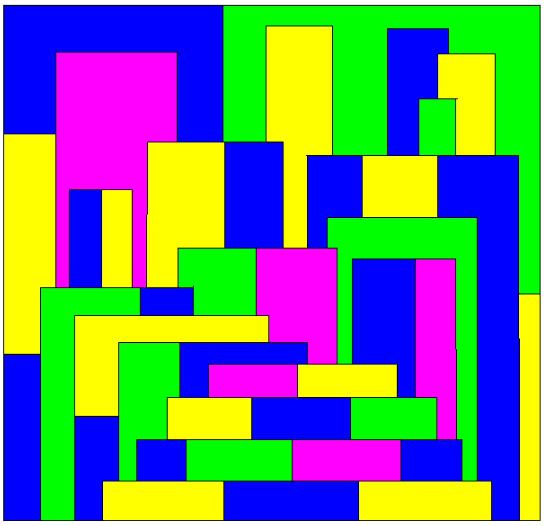


Jak je z předchozí tabulky a grafu zřejmé, byli žáci při plnění tohoto úkolu úspěšnější. Z celkového počtu 32 žáků vybarvilo obrázek 24 z nich. Žáci, kteří byli opakovaně úspěšnými, využívají strategii opakování určitého postupu, který si osvojili. Důvodem zlepšení dalších žáků může být i známá cesta, která dopomohla k vyřešení úkolu. Lze vidět, že ne všichni žáci dojdou sami ke správnému způsobu řešení a sami cestu nenajdou.

Je tedy důležité, aby vyučující a v mnoha případech i s dalšími žáky těmto dětem ukázal cestu a způsob řešení.

Na následujících obrázcích (obr. 9 a obr. 10) jsou ukázky správně vyřešeného problému.

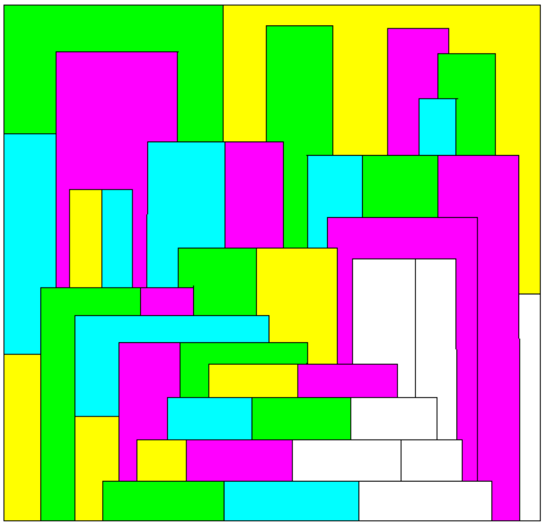


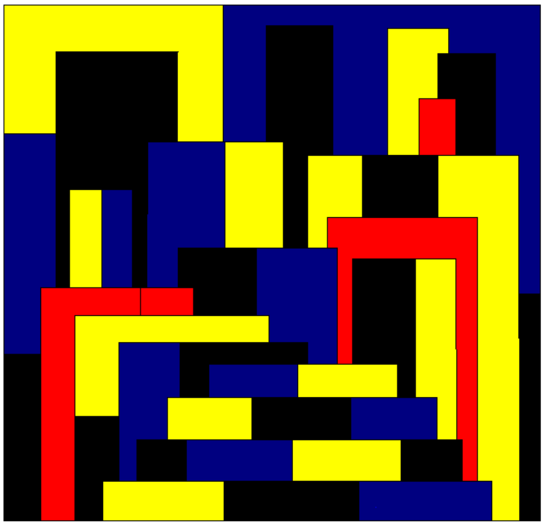


Obr. 9

Obr.10

Následující ukázka je ukázka nedokončeného obrázku (obr. 11), kdy si žák uvědomil, že nemůže dále pokračovat ve vybarvování a nedokázal zvolit jiný plán pro dokončení obrázku. Další chybný příklad je na obr. 12, kdy jsou sice všechna pole vybarvená, ale řešení nemohlo být uznáno, jelikož dotyčný nedodržel zadané téma a vybarvil dvě sousedící plochy s hraniční čárou stejnou barvou (barva červená).



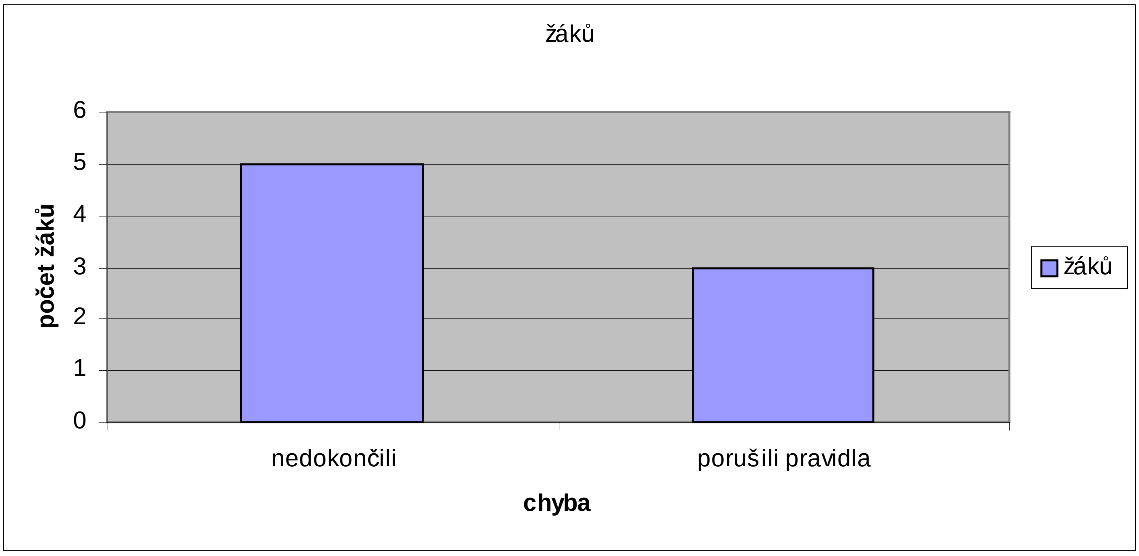


Obr.11

Obr. 12

Důvod chybovosti je patrný z následující grafu (graf č.6). Osm žáků odevzdalo obrázek vyplněný pouze zčásti nebo vybarvený obrázek tak, že porušili některé z pravidel. Pět žáků z osmi obrázek nedokončilo, další tři porušili zadané instrukce.

Graf č. 6: Důvod chybovosti



Práce žáků s SPU

Stejně jako u žáků bez poruchy učení došlo po diskusi o možných postupech ke zlepšení v úspěšnosti i u žáků se specifickou poruchou učení. Jak z tabulky č. 4 a grafu č. 5 vyplývá, správně vyřešili problém čtyři žáci z šesti, což je o jednoho žáka více než u předchozího obrázku. Je důležité také zmínit, že i ti dva méně úspěšní žáci se snažili při řešení již využít metodu, která by jim dopomohla úkol vyřešit. Z odevzdaných prací bylo vidět, že postupovali pomalu a odevzdané obrázky sice odpovídaly zadání, ale nebyly dobarvené, ačkoli žáci měli na vypracování dostatek času. Neporušovali sice pravidla, ale úkol nedokončili. Využívali doporučených postupů, ale pracovali velice pomalu a o svých krocích museli dlouze přemýšlet a své počínání a vybarvení každé plochy déle zvažovali. Bylo to dáno i tím, že se jednalo o složitější obrázek. V případě, že by jim byl zadán znovu obrázek, který měli řešit na začátku hodiny, dá se předpokládat, že by byli úspěšnější.

6.3. 3. etapa

Časová dotace: 1 vyučovací hodina

Při posledním setkání žáci opět pracovali v programu malování a zadala jsem jim obrázky s jiným zadáním. V předchozích setkání žáci problém řešili a měli dostatek času, aby metodu řešení skutečně pochopili. Pokusila jsem se pro ně připravit nové problémy, které by byly podobné původnímu problému. Měla jsem připraveny dva obrázky, které se postupně vzdalovaly od základního problému.

Na základě dvou obrázků si vyzkoušeli, zda metodu, kterou používali v předchozím plnění úkolů, lze využít u dalšího problému, který s ním zdánlivě souvisí. Zdá se tedy, že problém můžeme označit jako rutinní. Žáci se přesvědčí, zda jimi zvolená strategie je správná a platí i pro tyto nové problémy (opakování určitého postupu) či budou muset zvolit jinou metodu k vyřešení problému.

<u>První variace základního problému – změna počtu barev</u>

Žáci měli na ploše obrazovky připravený obrázek (příloha č. 5). Obrázek lze vybarvit za použití maximálně tří barev, aby byla dodržená daná pravidla.

Zadání úkolu žákům:

Vybarvi obrázek tak, abys použil maximálně 3 barvy. Žádné dvě sousedící plochy nesmí být obarveny stejnou barvou. Sousedícími plochami se rozumí ty, u nichž je společná hraniční čára, nikoli ty, které mají společný hraniční bod.

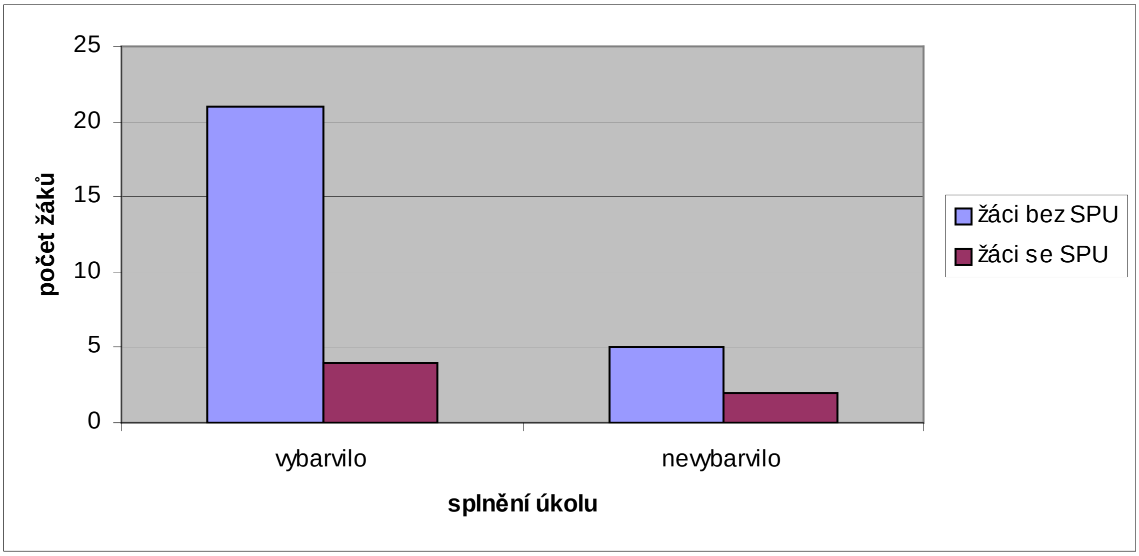
Zpracování zadaného úkolu:

Žáci celkem rychle vybarvili obrázek a využívali stejné strategie jako při řešení předchozích obrázků. Sami si ověřili, že jimi zvolené strategie platí i u jiného zadání a obrázek bylo možné vybarvit. Jednalo se o opakování určitého postupu a většina žáků tento postup použila při vybarvování tohoto obrázku.
V následující tabulce (tabulka č. 5) a grafu (graf č. 7) jsou výsledky zpracování problému.

Tabulka č. 5: Přehled úspěšnosti při zpracování obrázku 3

	vybarvilo	nevybarvilo
žáci bez SPU	21	5
žáci se SPU	4	2
celkem	25	7

Graf č.7: Úspěšnost žáků při vybarvování obrázku 3



Práce žáků s SPU

Tento problém byl velice podobný základnímu problému, obrázek byl jednodušší a žáci mohli využít stejný postup jako při předchozí hodině, pouze s jiným počtem barev. Čtyři žáci z šesti úkol vyřešili. U zbývajících dvou byla práce shledána jako nevyřešená, jelikož jeden žák využil jiný počet barev (použil čtyři barvy) a druhý porušil zadání (dvě sousedící plochy vybarvil stejnou barvou)

<u>Druhá variace základního problému – 4 barvy, změna podmínky</u>

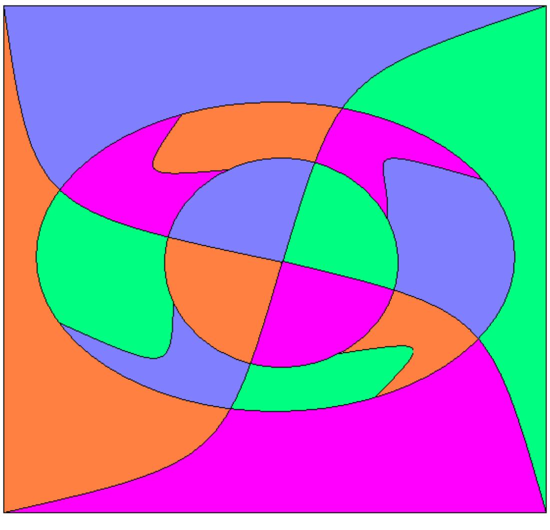
Žáci měli na ploše obrazovky připravený obrázek (viz příloha č. 6). Obrázek lze vybarvit za pomocí čtyř barev tak, aby nebyly dvě sousedící plochy (tj. společná hraniční čára, společný hraniční bod) vybarveny stejnou barvou. Narozdíl od předchozích obrázků se nesmí stejnou barvou dotýkat **ani v rohu**.

Zadání úkolu žákům:

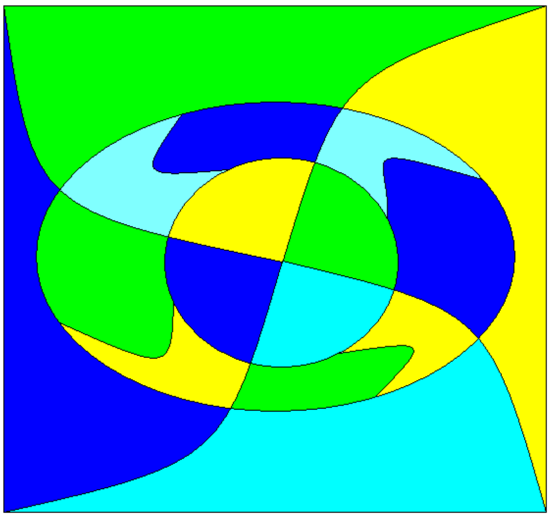
Vybarvi obrázek tak, abys použil maximálně 4 barvy. Žádné dvě sousedící plochy nesmí být obarveny stejnou barvou. Sousedícími plochami se rozumí ty, u nichž je společná hraniční čára, a ty, které mají společný hraniční bod.

Zpracování zadaného úkolu:

Vyřešení tohoto úkolu se zdálo být obtížnější. Ačkoli žáci využívali stejný způsob řešení, museli o obrázku více přemýšlet, jelikož jim byla zadána další podmínka. U plnění toho problému byli žáci o něco málo úspěšnější než u předchozích úkolů, ale tento úkol řešili svědomitě. Všechny obrázky byly vybarvené. Důvod nesplnění nebyl ten, že by žáci nedokončili práci, ale chybovost byla pouze v nedodržení zadaných podmínek. Jednalo se o chyby, kde obrázek sice vybarvili, ale sousedící barvy byly obarveny stejnou barvou (většinou u společného hraničního bodu). Někteří žáci se nedokázali odpoutat od původního zadání základního problému a nevšimli si chybovosti. Ale lze říci, že byli i tak úspěšní, že většina úkol splnila. Na vypracování potřebovali více času, ačkoli obrázek obsahoval méně ploch než obrázky předchozí. Tento čas samozřejmě měli a obrázky odevzdávali až ve chvíli, kdy si mysleli, že mají splněno. Na obr. 13 je ukázka práce žáka, který splnil úlohu za daných podmínek.



Obr. 13



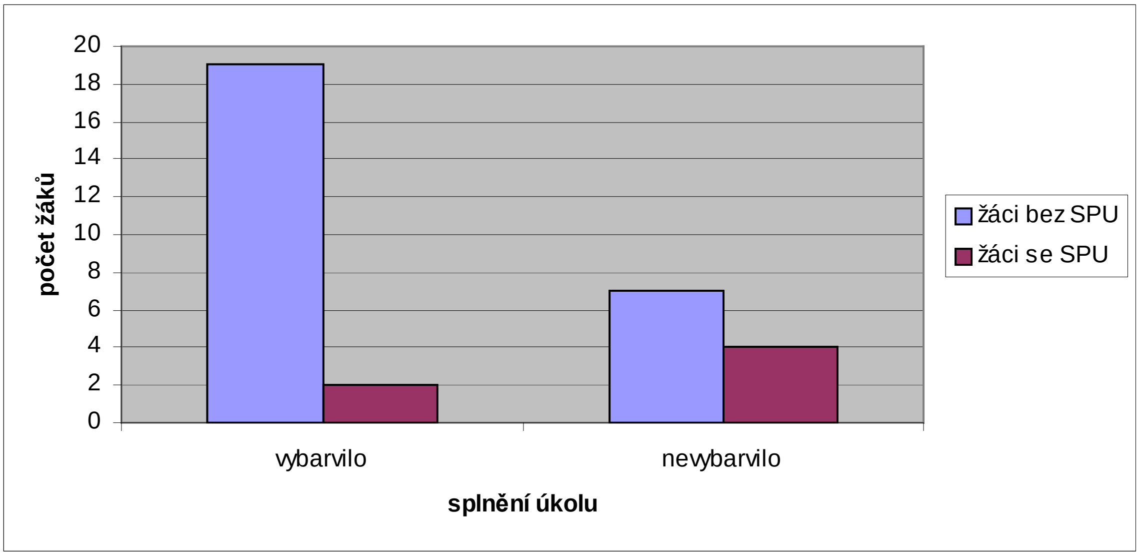
Obr. 14

Úspěšnost při řešení tohoto problému je zaznamenána v následující tabulce (tabulka č. 6) a grafu (graf č. 8).

Tabulka č. 6: Přehled úspěšnosti při zpracování obrázku 4

	vybarvilo	nevybarvilo
žáci bez SPU	19	7
žáci se SPU	2	4
celkem	21	11

Graf č. 8: Úspěšnost žáků při vybarvování obrázku 4



Na poslední obrázek potřebovali žáci více času. Všechny obrázky byly vybarvené a dokončené. Z celkového počtu bylo úspěšných celkem 21 žáků. Obrázek nevyřešilo celkem 9 žáků. Nejvíce žáci chybovali ve vybarvování, kdy se stejnou barvou dotýkali v bodě (obr. 14). Celkem osmi žákům jsem nemohla uznat řešení, jelikož se stejnou barvou dotýkaly v bodě a pouze u 1 žáka byly 2 plochy vybarveny stejnou barvou a měly společnou hraniční čáru.

Práce žáků s SPU

U posledního obrázku došlo k mírnému zhoršení úspěšnosti, stejně jako u žáků bez SPU. Zadání úspěšně vyřešili 2 žáci. Stejně jako u žáků bez SPU se žáci dopouštěli chyby, kdy vybarvili dvě sousedící plochy v bodě stejnou barvou (obr. 14).

6.4. Celkové hodnocení

Zadaný úkol a práce v hodinách byly pro žáky zajímavé. Byla to netradiční úloha, se kterou se doposud při hodině matematiky nesetkali a kterou nebudou jistě řešit ani v běžném životě. Nicméně žákům se z jejich ohlasů zdála práce zajímavá a motivující. Ačkoli se jedná zdánlivě o jednoduchý problém, samotná matematická definice a výpočty byly řešeny několik desítek let a dodnes je tento problém vyřešen pouze s pomocí počítače. Můžeme říci, že doposud nebyl nikým vyvrácen.

Žáci postupně svým zkoumáním vyslovili svoji hypotézu a své poznatky. Úspěšnými byli i jedinci, kteří jsou v matematice jinak průměrnými či slabšími a nedosahují takových výsledků jako jejich ostatní spolužáci. Přesto se přesvědčili, že mohou být úspěšnými a sami vyřešit problém, dojít k jeho vyřešení. Do jisté míry je to i zpětná vazba pro učitele, aby své žáky motivoval i úkoly a problémy, které nejsou určené osnovami a rozvíjel myšlení dětí i schopnost řešit problémy.

Souhrnný přehled úspěšnosti řešení problému je zaznamenaný v následující tabulce (tabulka č. 7). Jak je patrné na grafu (graf č. 9), u žáků docházelo k postupnému zvyšování úspěšnosti při řešení problému. Počet úspěšných narůstal nejen u žáků bez SPU, ale i u žáků s nějakou specifickou poruchou učení.

U prvního obrázku žáci neznali postup řešení a sami si zvolili jejich strategii. Úkol splnilo celkem 21 žáků. Potvrdilo se pravidlo, že ne vždy musí učitel předat žákům hotový problém, ale že i žáci jsou schopni přijít na řešení. Stejně i v tomto případě, kdy téměř 2/3 žáků vyřešily problém bez pomoci vyučujícího. Učitel a ostatní žáci pomohli najít cestu dalším žákům k vyřešení problému.

U následujícího obrázku, který vybarvovali po vysvětlení možné strategie, úspěšnost vzrostla a obrázek správně vyřešilo 24 žáků. Některým velice pomohlo získat informace o způsobu řešení a poté úkol splnili.

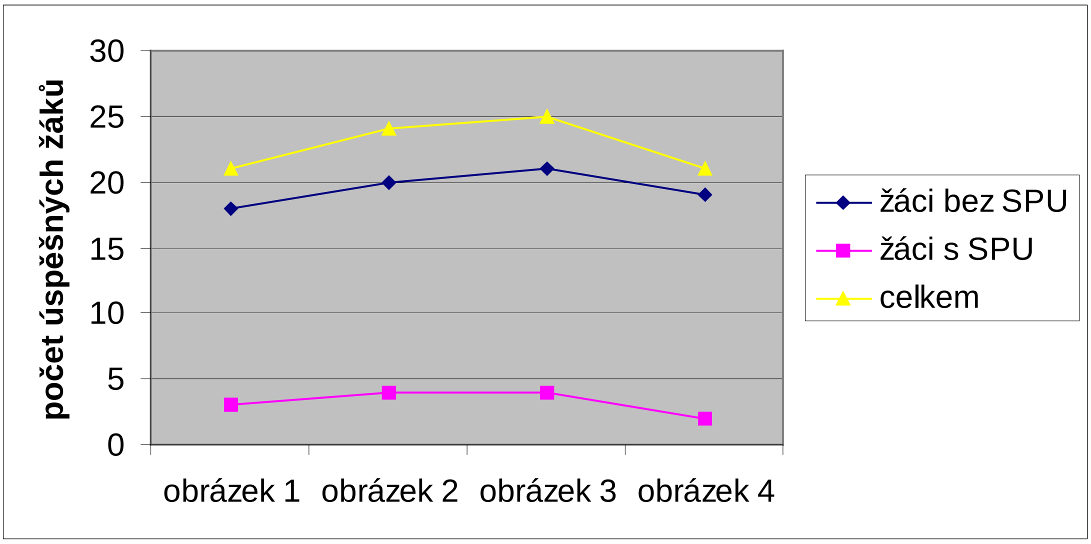
Třetí obrázek, ačkoli byl variací základního problému, vyřešilo nejvíce žáků a to 25 z celkového počtu 32 žáků. Obrázek nebyl natolik vzdálen od základního problému a žáci využívali stále stejného postupu.

U posledního obrázku došlo k mírnému poklesu úspěšnosti a úspěšných žáků bylo celkem 21. K mírnému poklesu došlo z důvodu, že daný problém se více vzdaloval od problému základního a bylo potřeba více myslet, odpoutat se od původního řešení a pozměnit strategii. Ačkoli došlo k poklesu, dá se říci, že i tak byli žáci úspěšnými, počtem byli stejně úspěšní jako u prvního obrázku. Dá se předpokládat, že procvičováním a následným rozborem postupu řešení a zvolené strategie by žáci své výsledky i nadále zlepšovali.

Tabulka č. 7: Přehled celkové úspěšnosti

	obrázek 1		obrázek 2		obrázek 3		obrázek 4	
	vybarvilo	nevybarvilo	vybarvilo	nevybarvilo	vybarvilo	nevybarvilo	vybarvilo	nevybarvilo
žáci bez SPU	18	8	20	6	21	5	19	7
žáci se SPU	3	3	4	2	4	2	2	4
celkem	21	11	24	8	25	7	21	11

Graf č.9: Přehled úspěšných žáků



V neposlední řadě je velice důležité si povšimnout i celkové úspěšnosti žáků se specifickými poruchami učení. Většina těchto žáků se vyznačuje stejně dobrým logickým uvažováním jako jejich spolužáci. I na základě tohoto šetření lze usoudit, že žáci nemají problémy ve všech oblastech vzdělání, ale vyznačující se konkrétními problémy. Těchto problémů si učitel všímá a snaží se o jejich postupnou reedukaci. Volí takovou metodu, o které je přesvědčen, že je správná.

Závěr

Ve své diplomové práci jsem se zabývala pouze několik desítek let vyřešeným matematickým problémem, problémem čtyř barev.

Cílem mé diplomové práce bylo shrnout dosavadní teoretické poznatky o tomto problému, sledovat úspěšnost řešení žáků, analyzovat jejich strategie řešení a v neposlední řadě vysledovat i zapojení žáků se specifickými poruchami učení při řešení tohoto matematického problému. Tuto problematiku jsem rozčlenila do celků, které s tématem souvisí.

V teoretické části jsem se zabývala obecným řešením matematických problémů, popsala jsem možné strategie, které se používají pří jejich řešení. Avšak největší část jsem věnovala právě problému čtyř barev. Jelikož není doposud vydána v českém jazyce žádná publikace, která by se věnovala pouze informacím o tomto problému, využila jsem různých zdrojů informací a pomocí nich zpracovala ucelené základní informace tohoto tématu. Zaměřila jsem se na tento problém jako součást teorie grafů, nastínila historii jeho zkoumání a snažila jsem se rozšířit téma o informace významné pro matematiku a využitelné v ní. Jelikož jsem ve své práci sledovala zapojení žáků se specifickými poruchami učení, je součástí teoretické části i popis tohoto tématu.
Vyhodnocení práce žáků 5. ročníku, kterým byly zadány úlohy spojené s tímto typem úlohy, jsem se věnovala v praktické části. Zadané úkoly byly různého typu a byly rozděleny do 3 částí. Úvodní část byla spojená s vlastním objevováním a ověřováním jejich zjištění. Dospěla jsem k názoru, že žákům není vždy nutné podávat veškeré informace spojené s daným tématem. Jsou schopni, a je to i potřeba, aby měli možnost na cestu ke správnému řešení přijít sami a tím u nich daleko více podporovat logické uvažování a samostatné řešení problémů.

Ve druhé části byly dětem předloženy dva odlišné obrázky a cílem bylo vysledovat strategie řešení a zaznamenat úspěšnost žáků před a po vyřčení cesty, jak tuto úlohu řešit. Dále jsem zjistila, že stejně jako u dětí bez poruchy, tak i u těch se specifickou poruchou učení docházelo k postupnému zvyšování úspěšných žáků. Nejdříve strategii neznali, a přesto téměř 2/3 žáků daný úkol vyřešily. Počet úspěšných žáků narůstal i v případě, když jim bylo podáno vysvětlení, jak úkol vyřešit. V poslední části mého výzkumu žáci řešili podobné úlohy spojené s problémem čtyř barev.

V neposlední řadě bylo zajímavé sledovat úspěšnost žáků s jakoukoliv specifickou poruchou učení. Tito žáci byli úspěšnými bez ohledu na jejich poruchu učení. Problém s vyřešením neměli ani žáci s poruchou v matematických dovednostech, a ať už samostatně nebo s dopomocí, kdy jim byla ukázána cesta, zadaný úkol vyřešila více jak polovina testovaných. Lze poukázat na to, že tito žáci jsou schopni řešit úlohy, pouze potřebují více času nebo podpory a důkladné, opakované vysvětlení. Jakýkoli úspěch je pro ně další motivací řešit další úlohy s chutí.

Všechny cíle, které jsem si stanovila před napsáním této diplomové práce, se mi podařilo naplnit. Zadané téma bylo přínosné nejen pro žáky, ale i pro mě. Více než studování a pročítání odborné literatury je přínosnější si vše ověřit z vlastní zkušenosti. I díky této práci jsem si ověřila, že ne vždy je nutné žákům předat hotové informace, ale vyučující by měl často využít jejich schopností a dovedností. Důležité je také zařadit do hodin nevšední, avšak zajímavé téma. Jelikož se téměř v každé třídě vyskytují žáci s poruchou učení, bylo dobré si více uvědomit, že někteří potřebují málo k tomu, abychom jim jejich práci zjednodušili a tím jim dopomohli k úspěchu, který je pro ně tak důležitý. V neposlední řadě jsem se seznámila s velice zajímavým matematickým problémem, který zdánlivě vypadá jednoduše. Tento problém se stal i námětem pro některé z mých přátel, které stejně jako mě zaujal a někteří se snažili o vyvrácení důkazu.

Resumé

Diplomová práce „Problém čtyř barev“ je rozdělena do dvou částí. V první části jsou popsány především teoretické poznatky o matematickém problému, obzvláště pak o problému čtyř barev. Dále jsem se věnovala teoretickým poznatkům o specifických poruchách učení.

V praktické části se žáci seznámili s problémem na základě vlastního objevování. Na základě mnou navržených a dětmi zpracovaných obrázků a pozorování je zde analyzována úspěšnost při řešení tohoto problému, popis strategií dětí při řešení této problematiky a zapojení dětí se specifickými poruchami učení..

Summary

This diploma work "Four color problem" is divided into two parts. In the first part are mainly described the theoretical findings of a mathematical problem, especially The four color problem. Furthermore , I paid attention to the theoretical knowledge about specific learning disorders.

In the practical part, the students met with a problem based on their own discoveries. After the images and observation proposed by me were proccessed by children analitical method is used here to measure success rate of solving this problem. Moreover a description of how the childern coped with the problem and also involvement of the childern with specific learning difficulties is analyzed.

Použitá literatura a prameny

BOSÁK, J. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1979, ISBN 0032-2423

KOCUROVÁ, M. *Specifické poruchy učení a chování*. Plzeň : Západočeská univerzita, 2000, ISBN 80-7082-705-X

KOPKA, J. *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad Labem: Univerzita J.E. Purkyně, 1999, ISBN 80-7044-247-6

KOPKA, J. *Zkoumání ve školské matematice*. Ružomberok: Katolická Univerzita, 2005, ISBN 978-80-8084-390-8

MAŇÁK, J.; ŠVEC, V. *Výukové metody*. Brno : Paido, 2003, ISBN 80-7315-039-5

MATĚJČEK, Z. *Dyslexie – Specifické poruchy čtení*. Jinočany : H&H, 1993, ISBN 80-85467-56-9

MICHALOVÁ, Z. *Specifické poruch učení na druhém stupni ZŠ a na školách středních*. Havlíčkův Brod: Tobiaš Havlíčkův Brod, 2001, ISBN 807311000-8

MOJŽÍŠEK, L. *Vyučovací metody*. Praha: SPN, 1988

PETTY, G. *Moderní vyučování*. Praha: Portál, 1996, ISBN 80-7178-070-7

POKORNÁ, V. *Teorie, diagnostika a náprava specifických poruch učení*. Praha: Portál, 2000, ISBN 80-7178-151-7

SWIERKOSZOVÁ, J. *Specifické poruchy učení*. Ostrava: Repronis Ostrava, 2007, ISBN 80-7368-042-4

ŠIŠMA, P. *Teorie grafů 1736-1963*. Brno : Prometheus, 1997, ISBN 80-7196-065-9

WILSON, R. *Four Colours Suffice: : How the map problem was solved*. London: Penguin, 2002, ISBN 0-141-00908-X

ZELINKOVÁ, O. *Poruchy učení* Praha: Portál, 2000, ISBN 80-7178-481-4

http://teorie-grafu.cz/vybrane-problemy/barveni-mapy.php

http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf

http://teorie-grafu.cz/vybrane-problemy/barveni-mapy.php

http://www.cojeco.cz/index.php?id_desc=34376&s_lang=2&detail=1&title=homeomorfn%ED%20zobrazen%ED

http://cs.wikipedia.org/wiki/Dedukce

http://cs.wikipedia.org/wiki/Heuristika

http://gossipy.co/kenneth-appel-dies-mathematician-who-proved-century-old-theorem-passes-away-at-80

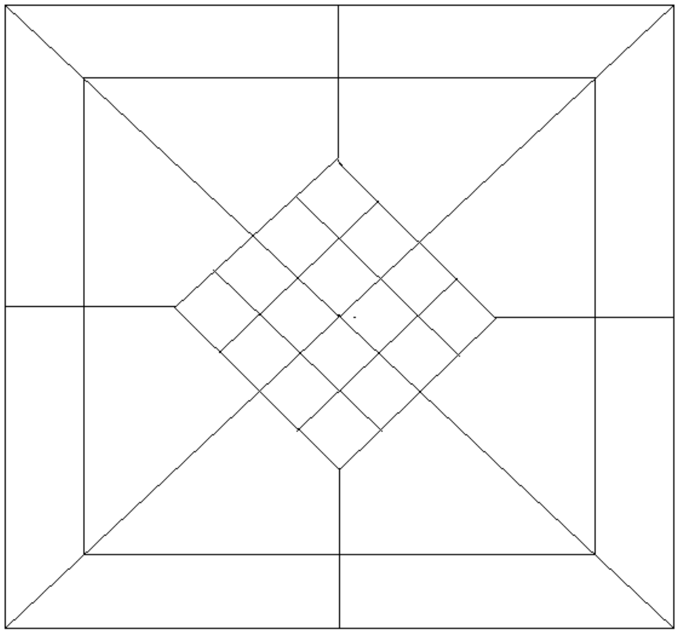
Seznam příloh

Přílohy

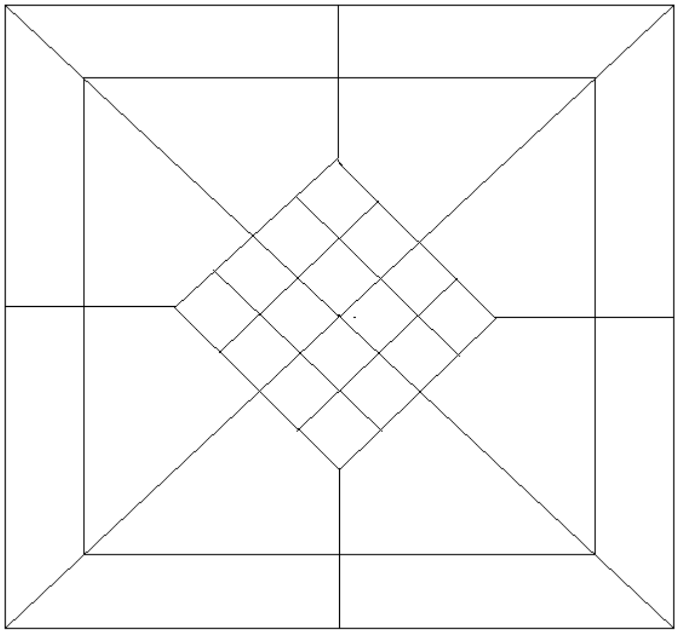
Příloha č.1

JMÉNO: …………………………..

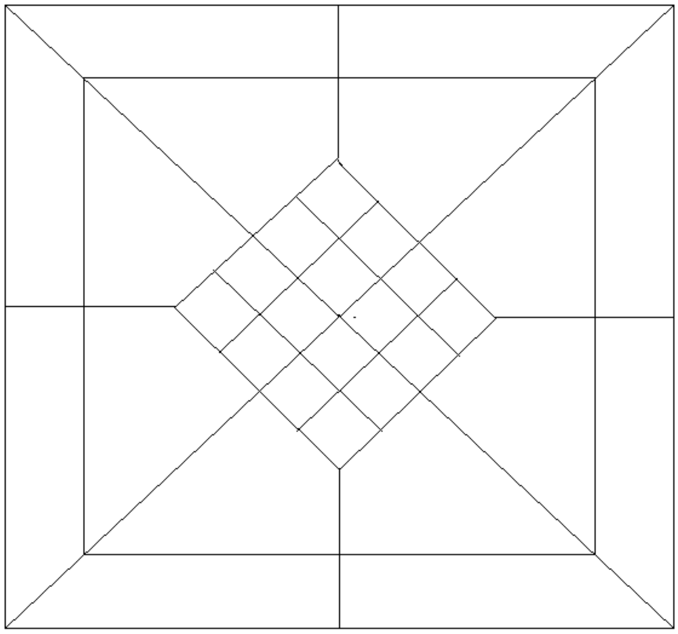
Použil(-a) jsem **dvě barvy.** lze – nelze vybarvit (zakroužkuj své zjištění)



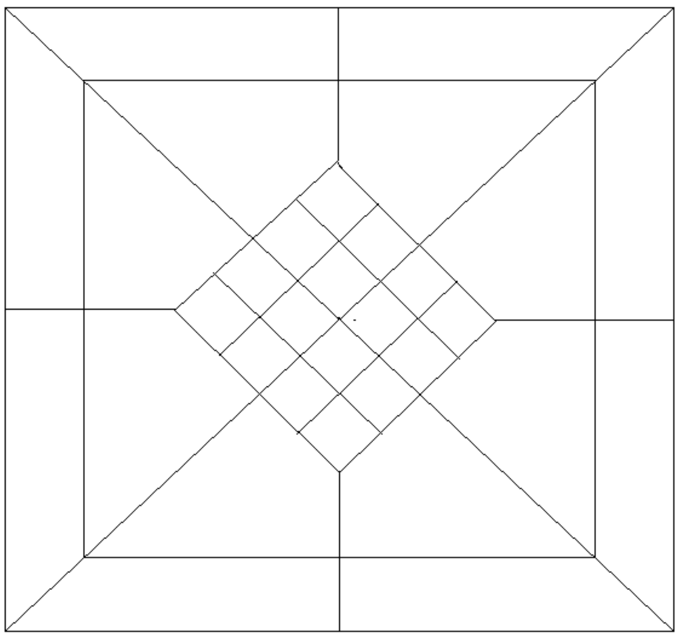
Použil(-a) jsem **tři barvy.** lze – nelze vybarvit (zakroužkuj své zjištění)



Použil(-a) jsem **čtyři barvy.** lze – nelze vybarvit (zakroužkuj své zjištění)

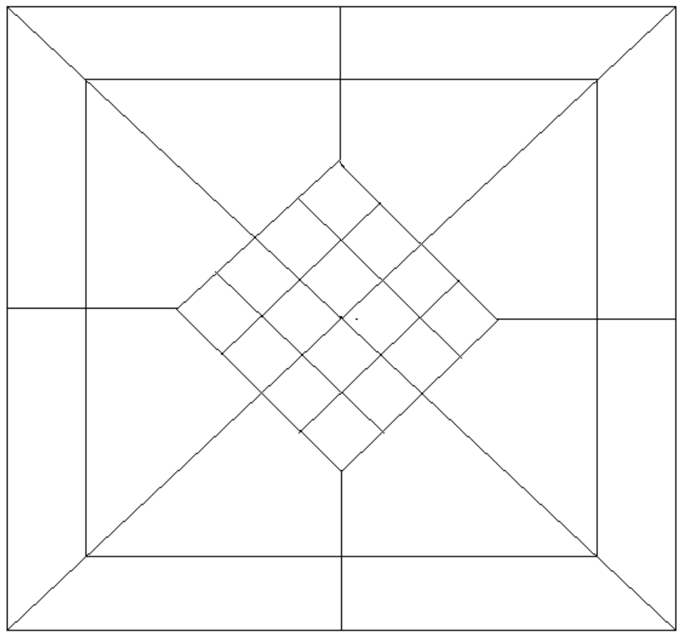


Použil(-a) jsem **pět barev.** lze – nelze vybarvit (zakroužkuj své zjištění)



Použil(-a) jsem **šest barev.**

lze – nelze vybarvit (zakroužkuj své zjištění)



Nakresli svůj vlastní obrázek a přesvědči se o svém tvrzení.

Příloha č.2

PRACOVNÍ LIST – PROBLÉM ČTYŘ BAREV

1. První zmínka o tomto problému je z roku (69 920:38)
    a) 1860
    b) 1840
    c) 1880

2. Problém se řešil více než (230 000:2 300)
    a) 10 let
    b) 50 let
    c) 100 let

3. Problém byl prokázán v roce (od trojnásobku čísla 2 350 odečti číslo 5 074)
    a) 1856
    b) 1976
    c) 1906

4. Na důkazu se podíleli:

	A	B	C	D	E
1	A	B	Q	E	V
2	M	R	H	L	C
3	D	F	J	X	I
4	S	P	O	G	K
5	W	U	N	T	Z

E4	D1	D1	C5	D1	D5	C2

A1	B4	B4	D1	D2

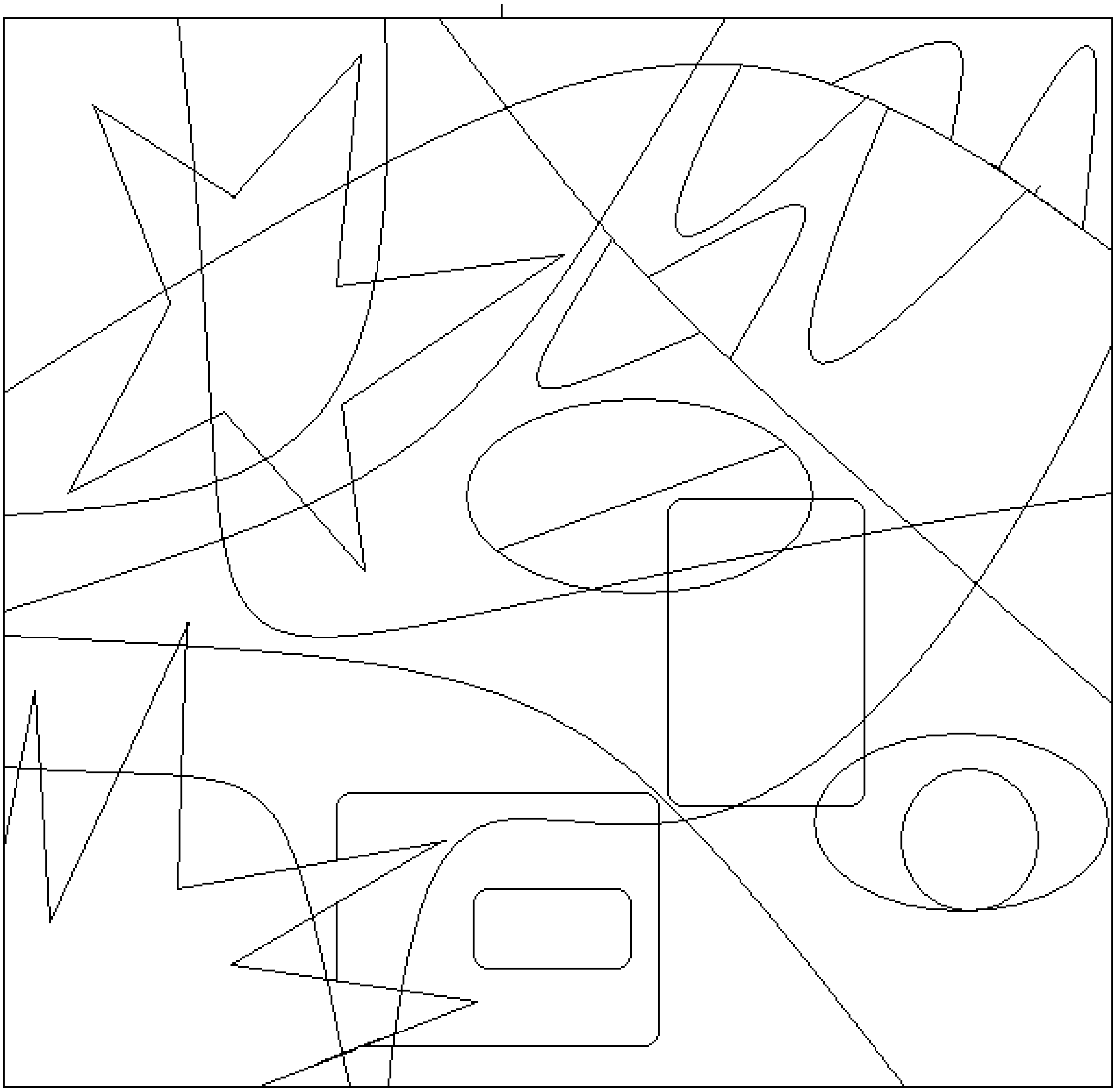
A5	C4	D2	B3	D4	A1	C5	D4

C2	A1	E4	D1	C5

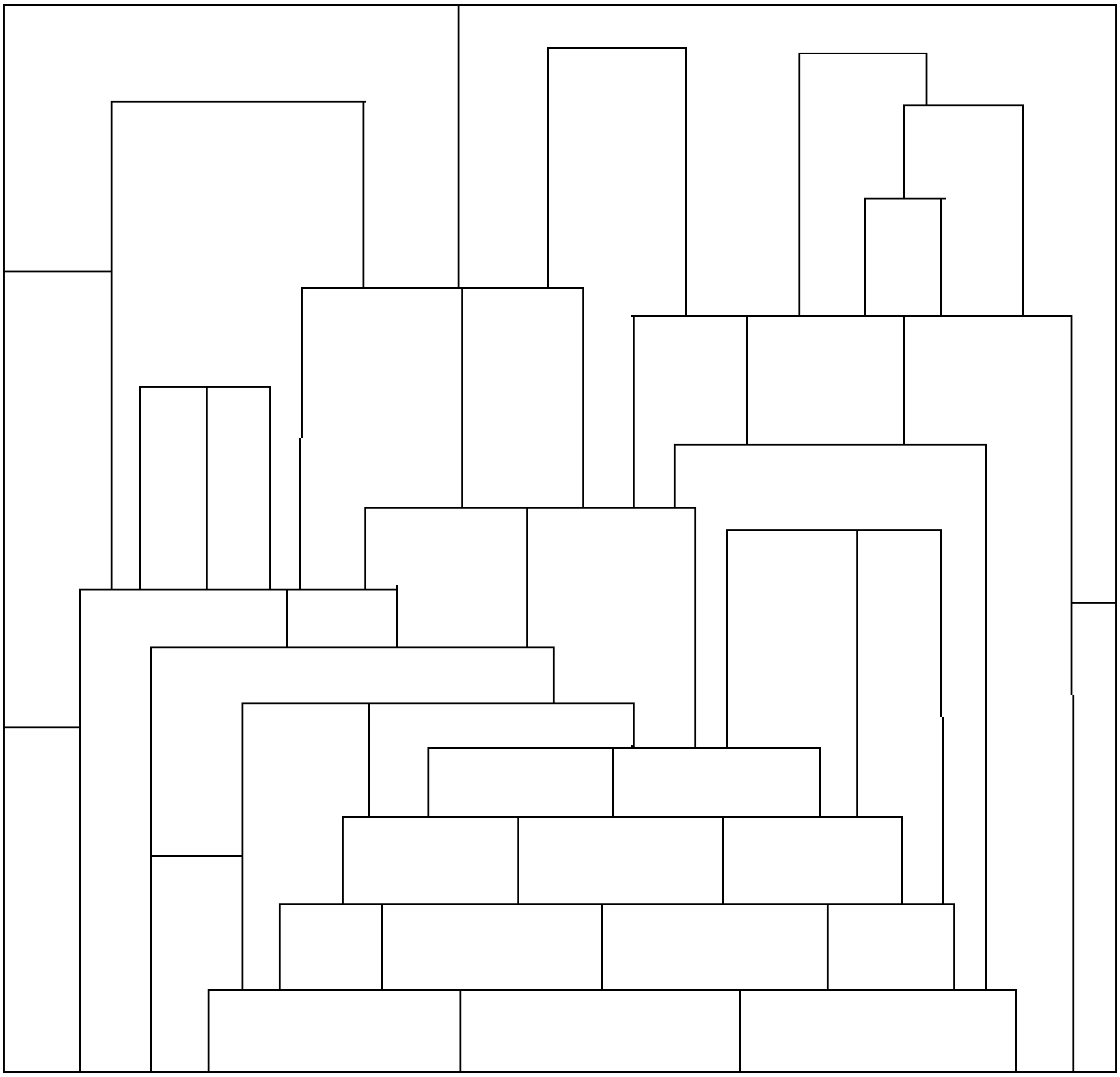
5. Hypotézu vyřešili pomocí (B4, C4, E2, E3, D5, A1, E2, D1)
    a) počítače
    b) kružítka
    c) pravítka

..... tento dokument obsahuje 56 stran psaného textu a 114 stran obrázkových příloh

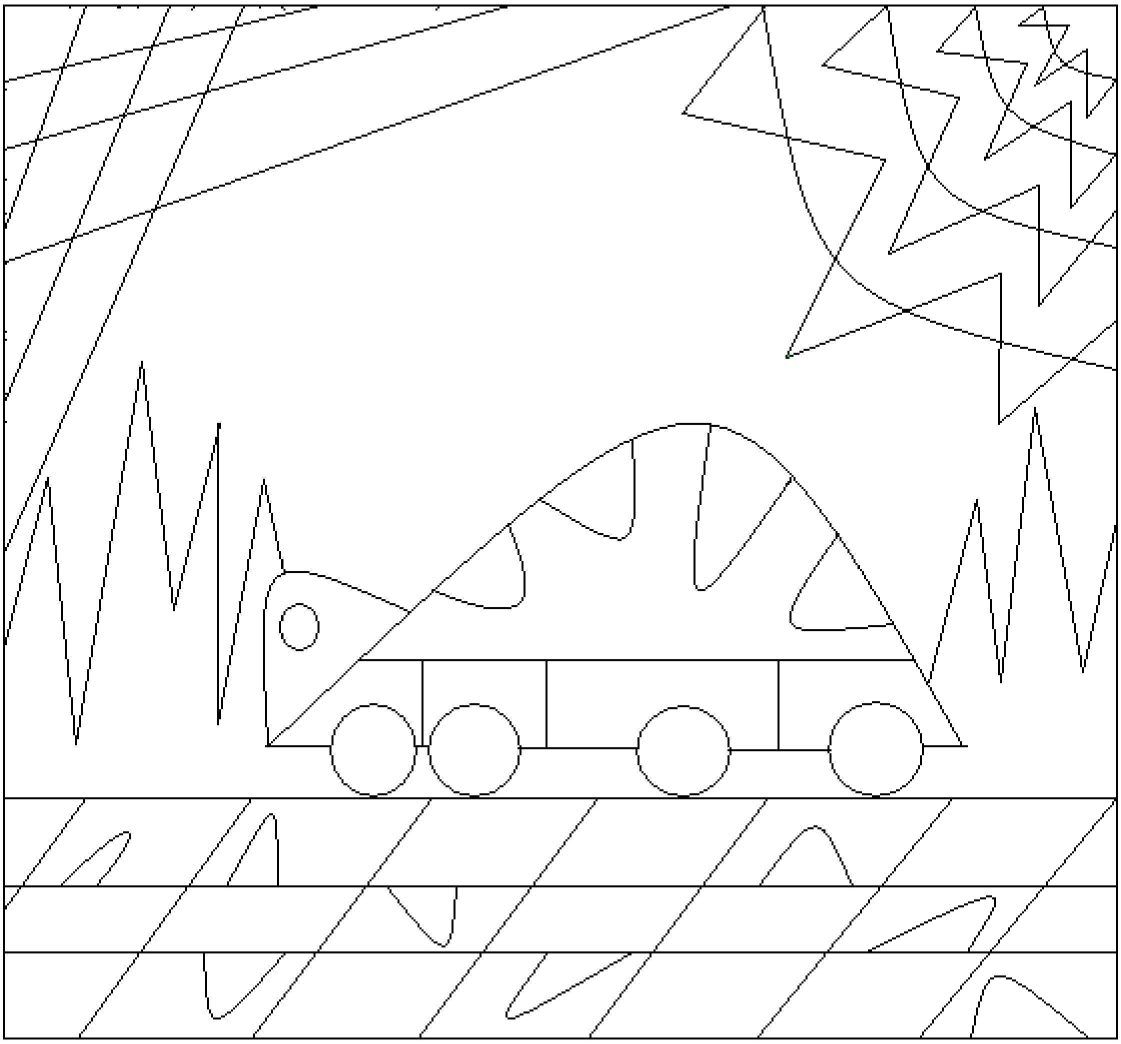
Příloha č.3



Příloha č.4



Příloha č.5



Příloha č.6