Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Diplomová práce

Modely s prekrývajícími se generacemi (OLG modely)

Overlapping Generations Models

Jiří Pešík

Plzeň 2013

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma
Modely s překrývajícími se generacemi (OLG modely)
vypracoval samostatně pod odborným dohledem vedoucího diplomové práce za použití pramenů uvedených v přiložené bibliografii.
V Plzni dne 13. 5. 2013 ....

Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval panu prof. Ing. Miloši Machovi, CSc. za odborné vedení této diplomové práce. Rovněž bych rád poděkoval panu JUDr. Ing. Davidu Martinčíkovi za možnost častých konzultací.

Abstrakt

Cílem této diplomové práce je vysvětlit problematiku modelů s překrývajícími se generacemi (OLG modelů). Nejprve jsou modely s překrývajícími se generacemi ukotveny v kontextu ekonomické růstové teorie. Následně je popsán první publikovaný OLG model: Diamondův model, protože princip dnešních modelů je stále realtivně blízký právě Diamondově modelu. Následně je v práci podrobně rozebrán Auerbachův-Kotlikoffův model. Na základě tohoto modelu je provedena simulace stavu České ekonomiky z pohledu financování penzí pro rok 2065 při použití prognózy demografického vývoje Českého statistického úřadu. Sledujeme vliv změny parametrů vývoje ekonomiky a vládní fiskální politiky na financování penzijního systému. Následně diskutujeme závěry a formulujeme doporučení.

Klíčková slova: modely s překrývajícími se generacemi, Diamondův model, Auerbachův-Kotlikoffovů model, ekonomický růst, penzijní systém

Abstract

The aim of this thesis is an explenation of overlapping generations models (OLG model). There is an description of development of economic growth theory with respect of OLG model in the beginnig of the thesis. Then we describe a Diamond model. The Diamond model was first OLG model and many of modern OLG models are still based on the common principle with the Diamond model. The we closely describe Auerbach-Kotlikoff OLG model. We make a simulation of Czech economy based on Auerbach-Kotlikoff model and a demographic prognosis of Czech Statistical Office. We focus on a financing of Czech pension system. We change some parameters of the economy and analyse the impact of this change on the pension system. Then we discuss outcomes and formulate encouragements.

Key words: overlapping generations model, Diamond model, Auerbach-Kotlikoff model, economic growth, pension systems

Obsah

Úvod

V roce 1928 publikoval geniální britský matematik a filosof Frank Plumpton Ramsey článek *A Mathematical Theory of Saving*, ve kterém položil základy moderní teorie ekonomického růstu. Naneštěstí Ramsey zemřel necelé dva roky po jeho vydání. Trvalo tak více než 20 let, než byla jeho práce znovu objevena. Ramseyův článek představoval oživení zájmu o ekonomický růst v rámci akademické sféry. Současně to byl ve své době jeden z nejpokročilejších modelů v oblasti matematické ekonomie.

V roce 1965 vydal Peter Diamond článek *National Debt in a Neoclassical Growth Model*, který do teorie ekonomického růstu přidal problematiku překrývajících se generací. Zatímco Ramsey uvažoval, že se v modelu nachází „nekonečně dlouho“ žijící populace, Diamond do modelu zapracoval nově narozené a umírající jedince. Jedinci v Diamondově modelu se rozhodují v časovém horizontu, který je dán délkou jejich života. Diamond jako první vytvořil teoretický fundament pro studium penzijních systémů a z jeho modelu je možné analyzovat rozdílné dopady zavedení průběžného a fondového systému financování penzí. Pro skupinu modelů, které umožňují řešit tento druh problémů, se časem vžila zkratka OLG modely podle anglického *Overlapping Generations Models*. V češtině se nejčastěji používá pojem *modely s překrývajícími se generacemi*.

Od té doby prošla ekonomická teorie další zásadní změnou, která začala v roce 1976 článkem Roberta Lucase *Econometric Policy Evaluation: A Critique*, v němž položil základy konceptu nazývaného jako Lucasova kritika. Lucas upozornil na fakt, že chování subjektů ovlivňuje i hospodářská politika vlády. Nelze tedy provádět analýzu dopadu hospodářské politiky na ekonomiku bez zahrnutí přizpůsobení subjektů této hospodářské politice.

V roce 1987 publikovali Auerbach a Kotlikoff v knize *Dynamic Fiscal Policy* nový OLG model, který byl od té doby mnohokrát použit a rozpracován. Model je často využíván k analýze dopadů vládní politiky na udržitelnost penzijního systému, protože díky své konstrukci je robustní vůči Lucasově kritice.

V důsledku stárnutí populace se stává otázka financování penzí pro osoby v postproduktivním věku stále aktuálnější. S tím roste i zájem o OLG modely, jejichž úkolem by mělo být především řešit dopady vládních politik na další vývoj a udržitelnost penzijních systémů. Naneštěstí je společenský a mediální obraz této problematiky výrazně zkreslený a často se redukuje pouze na interpretaci predikce demografického vývoje, který není zdaleka jedinou proměnnou tohoto problému. Tím spíše je potřeba prezentovat teoretické poznatky a hájit je oproti zjednodušujícím a často zavádějícím tvrzením.

Cíle práce

Tato práce si klade následující cíle:

1. začlenit OLG modely do kontextu teorie ekonomického růstu,
2. charakterizovat OLG modely a zdůvodnit potřebu jejich využití, popsat Diamondův přístup v modelování překrývajících se generací,
3. podrobně popsat Auerbachův-Kotlikoffův model,
4. získat zdrojová data o ekonomice České republiky pro aplikaci v Auerbachově-Kotlikoffově modelu včetně provedení kritiky dat,
5. a provést aplikaci dat na model, věcně a kriticky interpretovat výsledky.

Čtenář by měl z práce pochopit hlavní myšlenky a konstrukci OLG modelů a porozumět možnostem jejich praktické aplikace, a to včetně jejích úzkých míst a omezení.

1 OLG modely v kontextu ekonomické růstové teorie

Moderní teorie ekonomického růstu je spjatá se jménem britského matematika a filosofa Franka Plumptona Ramseye. Již předtím však problém ekonomického růstu zajímal řadu ekonomů. Ač mohou tyto teorie působit zastarale, řada z nich zažila svou renesanci i v moderní době. Proto si ty hlavní z nich stručně shrňme.

1.1 Teorie ekonomického růstu před Ramseyovým modelem

Od vzniku neoklasické ekonomie nebyla teorie ekonomického růstu předmětem teoretického bádání. Náznaky teorie ekonomického růstu však lze najít už v merkantilismu. Merkantilismus nelze považovat za snahu o vybudování obecné a konzistentní ekonomické teorie, jednalo se spíš o reakci různých autorů na aktuální problémy vládnoucí vrstvy. Ekonomický růst přirozeně patřil mezi panovníky často řešené problémy. Merkantilisté prosazovali zvyšování bohatství země pomocí zvyšování peněžní zásoby. V době zlatého standardu probíhalo zvyšování peněžní zásoby především prostřednictvím aktivního salda běžného účtu platební bilance, případně (především v případě Španělska) importem zlata z kolonií v Americe. Import zboží byl blokován prostřednictvím cel a dalších obchodních překážek.

Mezi pozdější kritiky tohoto přístupu patřili David Hume a Adam Smith. Hume argumentoval, že zvýšení peněžní zásoby povede ke zvýšení cen zboží, které se stane méně konkurenceschopným na zahraničních trzích. Smith připojil argument, že země s výrazně protekcionistickou obchodní politickou ztratí své obchodní partnery. [20], [35]

Po nahrazení merkantilismu klasickou školou se teorií ekonomického růstu zabýval především britský ekonom a teolog Thomas Malthus. Ačkoli relativní dopad jeho myšlenek do teoretické oblasti byl malý, v moderní době došlo k jejich relativnímu oživení. Malthus založil svou teorii na zákonu klesajících mezních výnosů z půdy. Protože množství půdy určité populace je konstantní, v případě růstu populace bude klesat množství půdy připadající na jednu osobu. Malthus, obdobně jako například Karl Marx, si nebyl vědom růstu produktivity práce díky akumulaci kapitálu. Malthus tedy chybně předpovídal pokles životní úrovně. Velikost populace byla podle něj limitována množstvím dostupné půdy. [29]

Za rehabilitaci Malthusových myšlenek lze považovat Římský klub, což je think thank založený v roce 1968 v Římě. Římský klub v době souvislé řady strukturálních krizích na počátku 70. let (ropná krize, potravinová krize apod.) otevřel diskusi o limitech růstu celosvětové populace, především v souvislosti s omezeným množstvím neobnovitelných

přírodních zdrojů. [33], [36]
Později se neoklasická ekonomie zaměřila především na zkoumání problému ekonomické rovnováhy. Považovali (a mnozí ekonomové dodnes považují) rovnováhu za ideální stav, jehož dosažení zajistí mimo jiné i optimální tempo ekonomického růstu. To byl zřejmě jeden z hlavních důvodů, proč nebyla teorie ekonomického růstu studována samostatně. Tuto otázku znovu otevřel právě až Frank Plumpton Ramsey v roce 1928.

1.2 Ramseyův model

Nyní se již dostáváme k popisu Ramseyova modelu. Ramseyův model neznamenal pouze změnu v teorii ekonomického růstu, ale znamenal i přelom pro metodologii ekonomické teorie. Ramsey ve svém modelu použil zcela novou koncepci ekonomického modelování. Předpoklady původní verze Ramseyova modelu lze shrnout v následujícím seznamu. [31]

- V ekonomice je vyráběn jeden druh spotřebního zboží.
- Užitek celé populace lze měřit pomocí jedné užitkové funkce, která je funkcí spotřeby a volného času.
- Všechny subjekty jsou racionální ve tvorbě svých očekávání.
- Velikost populace se v čase nemění.
- Současná i všechny budoucí generace optimalizují užitek v nekonečném časovém horizontu.
- Model je zcela deterministický a subjekty mají k dispozici veškeré dostupné informace.

Populace optimalizuje užitek stanovením poměru mezi investicemi a spotřebou. Optimálního poměru může být dosaženo na základě svobodné volby jednotlivých členů populace nebo prostřednictvím altruistického centrálního plánovače s dokonalými informacemi.

Problém tempa růstu populace V moderních verzích Ramseyova modelu je odstraněn předpoklad nulového růstu populace. Množství osob v ekonomice v novějších verzích roste exogenně daným a konstantním tempem. Tato modifikace je relativně jednoduchá a vychází především z faktu, že Solowův model[1], který byl publikován v roce

[1] Solowův model je stručně popsán na straně 14

1955 a bývá často s Ramseyovým modelem porovnáván, předpoklad exogenního a konstantního tempa růstu populace obsahuje. Protože tempo růstu populace je důležitým determinantem růstu kapitálové vybavenosti ekonomiky ve steady-state[2], umožní tento předpoklad porovnání obou steady-state mezi modely.

Problém spojitosti času V literatuře lze nalézt verze Ramseyova modelu s diskrétním i se spojitým časem. V učebnici [11] je dokázáno, že závěry plynoucími z Ramseyova modelu se spojitým i diskrétním časem jsou relativně obdobné a neexistuje mezi nimi významný rozdíl. Ramsey původně formuloval svůj model se spojitým časem. Při provádění kalibrace modelu na základě empirických dat je výhodnější použití verze s diskrétním časem, pro teoretický popis modelu je názornější verze se spojitým časem. Protože u Ramseyova modelu nebudeme provádět kalibraci na základě empirických dat, použijeme k výkladu verzi se spojitým časem. Pro Diamondův a Auerbachův-Kotlikoffův model využijeme diskrétní čas.

Reálné veličiny a neoklasická ekonomie Ačkoli Ramsey se ekonomií nikdy primárně nezabýval, konstrukce jeho modelu naznačuje, že měl poměrně hluboké znalosti tehdejší ekonomie (srov. [14]). V souladu s neoklasickou ekonomií je konstrukce modelu založena na čistě reálných veličinách a neexistuje v něm peněžní měna ve smyslu kvantitativní rovnice směny. Na stejném principu je postavena většina dnes používaných růstových modelů. Modelování ekonomik s běžnými „papírovými“ penězi výrazně zvyšuje formální i logickou složitost ekonomických modelů.
Tento problém je úzce spojen s problematikou tzv. neoklasické dichotomie. Ve skutečnosti jsou všechny ceny v neoklasické ekonomii poměrové[3]. Neoklasická ekonomie v zásadě předpokládá přenositelnost závěrů z modelů bez peněžních agregátů do ekonomiky s peněžními agregáty. [22] Tento přístup bývá některými ekonomy kritizován[4]. Tato diskuse je však čistě metodologická a je mimo rozsah této práce.

Úroková míra Ramseův model pracuje s endogenně danou úrokovou mírou, která je determinována interakcí mezi spotřebiteli a výrobci a je funkcí kapitálu na hlavu

[2]Vzhledem k tomu, že pro pojem steady-state jsou používány různé termíny a dochází v některých případech i k záměně obdobných termínů, budeme využívat původní anglický pojem.

[3]Je velice zarážející, že tato skutečnost ve většině učebnic základního i středního kurzu mikroekonomie neuvádí.

[4]Příklad kritiky tohoto přístupu lze nalézt v knize [32].

k. Tendence míry úspor k růstu nebo poklesu ovlivňuje přechodovou dynamiku – tedy především rychlost konvergence do steady-state.
V popisu Ramseyova modelu budeme vycházet z knihy [5].

Spotřebitelé[5]

Spotřebitelé poskytují práci výměnou za mzdu, získávají úroky z vlastněných aktiv, nakupují spotřební zboží a spoří mzdu nákupem dodatečných aktiv. Jak již bylo popsáno výše, spotřebitelé ve svých výpočtech kalkulují s užitkem vlastní generace i užitkem všech budoucích generací. Budoucí užitek je však diskontován diskontní mírou ρ. Užitek vzdálenějších generací tedy má pro rozhodování menší váhu než užitek vlastní generace a bezprostředně následujících generací.
Ramsey ve svém článku diskontní faktor v užitkové funkci nepoužil. [31] Uvažoval však určitou maximální a konečnou úroveň dosažitelného užitku – *Bliss point*. Jedná se o maximální úroveň štěstí, která je dosažitelná pomocí spotřeby a volného času. Diskontní faktor se však objevil už v prvních zpracováních modelu, postupně byl *Bliss point* zcela nahrazen diskontním faktorem. [6] Diskontní faktor je nutný především pro vyřešení optimalizační úlohy – bez něj není zajištěna existence řešení úlohy spotřebitele.

Reprezentativní spotřebitel V modelu sledujeme individuální chování *reprezentativního spotřebitele*. Agregátní veličiny získáme agregací rozhodování reprezentativních subjektů. Model má tedy pevný mikroekonomický fundament, protože je odvozen z chování jednoho konkrétního subjektu. Uvažujeme, že chování a rozhodování všech subjektů v ekonomice je stejné, jako chování reprezentativního jedince. Modely s heterogenními agenty byly vyvinuty podstatně později a jsou výpočetně náročnější. Reprezentativní spotřebitel bývá často považován za průměrného jedince, tudíž agregací chování průměrných jedinců bychom měli získat aproximaci vývoje ekonomiky.
Modelování rozhodování spotřebitele v nekonečném časovém horizontu lze popsat jako model s „nesmrtelnou rodinou“. Rodiče pak předávají veškerý svůj majetek potomkům, neuvažujeme žádnou formu dědické daně. Tempo růstu populace je exogenní a konstantní a je dáno hodnotou n. Uvažujme normovanou velikost pracovní síly L, ve

[5] V definici ekonomických modelů bývají často alternativně používány pojmy *jedinec*, *domácnost* nebo *spotřebitel*. Formálně se však tyto pojmy neliší, protože popisují subjekty, které poptávají spotřební zboží na trzích spotřebního zboží a nabízejí práci na trzích výrobních faktorů. Současně jsou v řadě modelů tyto subjekty vlastníky finančních aktiv a získávají úroky.

výchozím čase platí $L(0) = 1$ a velikost pracovní síly v čase t získáme vztahem

$$L(t) = e^{nt}\,. \tag{1.2.1}$$

Označme dále celkovou spotřebu v čase t jako $C(t)$. Pak spotřeba na hlavu v čase t je dána vztahem

$$c(t) = \frac{C(t)}{L(t)} \tag{1.2.2}$$

a musí být vždy nezáporná, tj. $c(t) \geq 0$. Uvažujme, že užitek domácnosti U závisí jen na spotřebě a nikoli na volném čase. Pak lze maximalizační problém domácnosti Ramseova modelu zapsat

$$U = \int_0^\infty u[c(t)] \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t}\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.2.3}$$

Činitel e^{nt} určuje, že počítáme s růstem užitku celé domácnosti. V čase totiž dochází k nestálému růstu velikosti populace. Činitel $e^{-\rho t}$ je dán mírou časové preference. Konvergenci integrálu zajistí podmínka $\rho > n$.

Endogenní a exogenní nabídka práce Různé verze Ramseyova modelu se liší i proměnnými užitkové funkce. Ramsey původně uvažoval, že do užitkové funkce vstupuje spotřeba a volný čas spotřebitelů. V takovém případě by nabídka práce byla endogenní proměnnou systému. V našem popisuje uvažujeme, že volný čas do užitkové funkce spotřebitelé nevstupuje a nabídka práce je tak exogenní a je daná velikostí populace $L(t)$. Předpoklad endogenní nabídky práce zavedeme v popisu Auerbachova-Kotlikoffova modelu v kapitole 3 na straně 28.

Finanční aktiva Spotřebitelé mohou vlastnit finanční aktiva nebo výrobní kapitál. Hodnota finančních aktiv spotřebitelů může být i záporná, což značí zadlužení domácností. Není však povoleno nekonečné zadlužování spotřebitelů. Kapitál a finanční aktiva jsou dokonalými substituty – mají stejnou úrokovou míru $r(t)$. Reálná hodnota aktiv na hlavu je $a(t)$, mzdová sazba je dána funkcí $w(t)$. Trh práce je dokonale konkurenční a práce je homogenní, neuvažujeme existenci nedobrovolné nezaměstnanosti v ekonomice. Změna hodnoty aktiv na hlavu v čase je dána

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \dot{a} = w + r \cdot a - c - n \cdot a\,. \tag{1.2.4}$$

Současná hodnota aktiv domácnosti musí být asymptoticky nezáporná, tj.

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ a(t) \cdot e^{-\int_0^t r(v) - n\,\mathrm{d}t} \right\} \geq 0\,. \tag{1.2.5}$$

Domácnosti tedy maximalizují užitkovou funkci (1.2.3) vzhledem k rozpočtovému omezení (1.2.4), počáteční hodnotě aktiv a omezení velikosti úvěrů (1.2.5).

Řešení problému domácností K řešení problému lze použít metodu pro řešení problémů vázané dynamické optimalizace. Současná hodnota Hamiltoniánu je

$$J = u(c)e^{-(\rho-n)t} + v[w + (r-n)\cdot a - c]\,, \tag{1.2.6}$$

kde $[w+(r-n)\cdot a-c] = \dot{a}$ představuje rozpočtové omezení domácností a v je současná hodnota stínové ceny příjmu. Platí

$$\frac{\partial J}{\partial c} = 0 \Rightarrow v = u'(c)\cdot e^{-(\rho-n)t} \tag{1.2.7}$$

a

$$\dot{v} = -\frac{\partial J}{\partial a} \Rightarrow \dot{v} = -(r-n)\cdot v\,. \tag{1.2.8}$$

Rovnice $\dot{v} = -(r-n)\cdot v$ bývá označována jako Ramseyovo pravidlo optimálních úspor. Podmínku transverzality lze zapsat jako

$$\lim_{t\to\infty}[v(t)\cdot a(t)] = 0\,. \tag{1.2.9}$$

Derivací výrazu (1.2.7) podle t a dosazením v výrazu (1.2.8) dostaneme

$$r = \rho - \left(\frac{\frac{\partial u'}{\partial t}}{u'}\right) = \rho - \left[\frac{u''(c)\cdot c}{u'(c)}\right]\cdot\frac{\dot{c}}{c}\,. \tag{1.2.10}$$

Domácnosti volí spotřebu vzhledem k úrokové míře, diskontní míře, míře poklesu mezního užitku ze spotřeby v důsledku rostoucí spotřeby na hlavu. Upřednostnění současné spotřeby má dva důvody: budoucí užitek je diskontován diskontní mírou ρ a dnešní spotřeba je relativně malá oproti budoucí ($\frac{\dot{c}}{c} > 0$).

Domácnosti při optimalizaci vyrovnávají přínos ze spotřeby a z finančních aktiv. Výraz $\frac{u''(c)\cdot c}{u'(c)}$ určuje velikost elasticity funkce mezního užitku $u'(c)$ vzhledem k c a je mírou „konkávnosti“ funkce $u(c)$. Elasticita udává, o kolik musí být spotřeba vyšší než ρ. Elasticita mezního užitku je reciprokou hodnotou k elasticitě intertemporální substituce. Elasticita intertemporální substituce σ mezi okamžiky t_1 a t_2 je definována jako tempo růstu poměru spotřeby v časech t_1 a t_1 vzhledem k tempu růstu poměru mezních užitků v časech t_1 a t_2, tj. vztahem

$$\sigma = \left[\frac{\frac{c(t_1)}{c(t_2)}}{\frac{-u'[c(t_1)]}{-u'[c(t_2)]}}\cdot\frac{\mathrm{d}\frac{u'[c(t_1)]}{u'[c(t_2)]}}{\mathrm{d}\frac{c(t_1)}{c(t_2)}}\right]^{-1}\,. \tag{1.2.11}$$

Elasticita intertemporální substituce je mírou možnosti substituce spotřeby v různých dvou časových okamžicích. Definujme si proměnnou θ jako reciprokou hodnotu k elasticitě intertempolární substituce, tedy

$$\theta = \frac{1}{\sigma} \tag{1.2.12}$$

Konkrétní tvar užitkové funkce Uvažujme nyní konkrétní tvar užitkové funkce, který splňuje výše uvedené předpoklady. Takovým tvarem užitkové funkce je

$$u(c) = \frac{c^{(1-\theta)} - 1}{1-\theta}\,. \tag{1.2.13}$$

Čím je hodnota θ vyšší, tím vyšší je pokles $u'(c)$ v důsledku zvýšení c v čase. Vztah (1.2.10) lze s využitím (1.2.13) zjednodušit na

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r-\rho)\,, \tag{1.2.14}$$

čímž získáme podmínku optimality.

Podmínka transverzality Podle (1.2.9) hodnota aktiv domácností konverguje k nule. Kladná hodnota aktiv v nekonečném časovém horizontu by pro domácnosti nebyla optimální, protože spotřebováním těchto aktiv by došlo ke zvýšení užitku domácnosti. Řešením diferenciální rovnice (1.2.8) získáme vyjádření velikosti stínové ceny spotřeby v čase

$$v(t) = v(0) \cdot e^{-\int_0^t r(v)-n\mathrm{d}v}\,. \tag{1.2.15}$$

V čase 0 platí $v(0) = u'[c(0)]$ a $v(0) > 0$, protože $c(0)$ je konečná. Pokud dosadíme (1.2.15) do (1.2.9), získáme

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ a(t) \cdot e^{-\int_0^t r(v)-n\mathrm{d}v} \right\} = 0. \tag{1.2.16}$$

Člen $r(v)$ převádí příjem v čase t do současné hodnoty. Z toho plyne, že množství aktiv na hlavu neroste rychlostí r, protože je snižováno tempem růstu populace n.

Spotřební funkce Definujeme si průměrnou úrokovou míru $\bar{r}(t)$ vztahem

$$\bar{r}(t) = \frac{\int_0^t r(v)\mathrm{d}v}{t} \tag{1.2.17}$$

Rovnici (1.2.4) můžeme vyřešit jako lineární diferenciální rovnici 1. řádu pomocí metody variace konstanty. Řešením získáme

$$a(T) \cdot e^{-[\bar{r}(T)-n]T} + \int_0^T c(T)c(t) \cdot e^{-[\bar{r}(T)-n]t}\mathrm{d}t = a(0) + \int_0^T w(t)e^{-r[\bar{r}(t)-n]t}\mathrm{d}t\,. \tag{1.2.18}$$

Uvažujme $T \to \infty$

$$\int_0^\infty c(t)e^{-[\bar{r}(T)-n]t}\mathrm{d}t = a(0) + \int_0^\infty w(t)e^{-[\bar{r}(t)-n]t}\mathrm{d}t = a(0) + \tilde{w}(0)\,, \tag{1.2.19}$$

kde $\tilde{w}(0)$ je současná hodnota mzdových příjmů a $a(0)$ je počáteční hodnota vlastněných aktiv. Řešením diferenciální rovnice (1.2.14) získáme

$$c(t) = c(0) \cdot e^{\frac{1}{\theta}[\bar{r}(t)-\rho]t} . \tag{1.2.20}$$

Upravíme rovnici podle (1.2.19)

$$c(0) = \mu(0)[a(0) + \tilde{w}(0)] \tag{1.2.21}$$

kde $\mu(0)$ je sklon ke spotřebě vzhledem k bohatství:

$$\frac{1}{\mu(0)} = \int_0^\infty e^{[\frac{\bar{r}(t)(1-\theta)}{\theta} - \frac{\rho}{\theta} + n]t} \, \mathrm{d}t . \tag{1.2.22}$$

Uvažujme nyní efekt zvýšení průměrné úrokové míry. Dojde-li k růstu ceny současné spotřeby vzhledem k budoucí spotřebě, subjekty začnou preferovat zvýšení budoucí spotřeby. Díky tomu dojde k růstu příjmu a také spotřeby v budoucnosti. Pro $\theta < 1$ převažuje substituční efekt. Pro $\theta > 1$ je substituční efekt relativně malý, převažuje důchodový efekt. Pro $\theta = 1$ se oba efekty vyrovnají.

Výrobci

Druhou část ekonomiky Ramseyova modelu tvoří výrobci. Výrobci produkují zboží, vyplácejí mzdy a úroky. Produkční funkce výrobců je funkcí množství kapitálu K, množství práce L a času t (tj. $Y = F(K, L, t)$). Využíváme produkční funkci s konstantními výnosy z rozsahu[6]. Podmínku konstantních výnosů z rozsahu lze pro libovolné $a > 0$ vyjádřit vztahem

$$F(a \cdot K, a \cdot L, t) = a \cdot F(K, L, t) = a \cdot Y \tag{1.2.23}$$

Uvažujeme klesající mezní výnosy z K a L a technologický pokrok, který ovlivňuje pouze produktivitu práce. Technologický pokrok navíc roste konstantní rychlostí x. Pak lze definovat úroveň technologického pokroku v čase t jako

$$A(t) = e^{x \cdot t} . \tag{1.2.24}$$

[6]Při rostoucích nebo klesajících výnosech z rozsahu by se při změně počtu firem v ekonomice (ceteris paribus) změnilo množství a cena vyráběného zboží. Při klesajících výnosech z rozsahu by firmy v nekonečném časovém horizontu maximalizovala svůj zisk snižováním své velikosti, až by se velikost firmy limitně blížila k nule. Při rostoucích výnosech z rozsahu by v ekonomice po čase existovala právě jedna firma, která by vyráběla veškeré zboží. Z toho důvodu je předpoklad konstantních výnosů z rozsahu v ekonomických růstových modelech běžný.

Pak můžeme definovat množství efektivní práce jako

$$\hat{L} = L \cdot A(t)\,. \tag{1.2.25}$$

Dále můžeme definovat relativní produkt na jednotku efektivní práce jako

$$\hat{y} = \frac{Y}{\hat{L}} \tag{1.2.26}$$

a kapitálovou vybavenou na jednotku efektivní práce jako

$$\hat{k} = \frac{K}{\hat{L}} \tag{1.2.27}$$

Produkční funkci F lze vyjádřit jako

$$Y = F(K, \hat{L}) \tag{1.2.28}$$

a produkční funkci v intenzivní formě f jako

$$\hat{y} = f(\hat{k})\,. \tag{1.2.29}$$

Platí, že $f(0) = 0$. Mezní produktivita kapitálu je dána jako parciální derivace produkční funkce podle K

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = f'(\hat{k}) \tag{1.2.30}$$

a mezní produktivita práce jako parciální derivace produkční funkce podle L

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \left[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})\right] e^{xt}\,. \tag{1.2.31}$$

Při zavedení pojmu produkční funkce bychom měli uvažovat Inadovy podmínky, které se týkají mezní produktivity kapitálu $f'(\hat{k})$. Podle Inadových podmínek by pro produkční funkci mělo platit

$$\lim_{k \to \infty} f'(\hat{k}) = 0 \text{ a } \lim_{k \to 0} f'(\hat{k}) = \infty\,. \tag{1.2.32}$$

Dále lze definovat rentu na jednotku kapitálu jako $R = r + \delta$, přičemž δ je míra depreciace kapitálu. Jednotkou směny v ekonomice je jednotka spotřebního zboží. Transakční náklady jsou nulové a veškeré náklady firmy tvoří náklady na výrobní faktory. Zisk firmy π je rozdílem mezi objemem produkce a platbou za výrobní faktory:

$$\pi = F(K, \hat{L}) - (r + \delta) \cdot K - w \cdot L\,. \tag{1.2.33}$$

Velikost zisku lze určit i na základě intenzivních veličin jako

$$\pi = \hat{L}[f(\hat{k}) - (r + \delta) \cdot \hat{k} - w \cdot e^{-xt}]\,, \tag{1.2.34}$$

kde $w \cdot e^{-xt}$ označuje mzdu přepočtenou na fyzickou jednotku práce.
Firma v Ramseyově modelu je dokonale konkurenční, je tedy příjemcem cen r a w. Firma maximalizuje zisk při daném $\hat{L}$ při rovnosti

$$f'(\hat{k}) = r + \delta \,. \tag{1.2.35}$$

Tržní rovnováha nastává v okamžiku, kdy je zisk firmy nulový. Současně se mzda w bude rovnat meznímu produktu práce při dané vybavenosti kapitálem $\hat{k}$

$$w = \left[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k}) \right] e^{xt} \,. \tag{1.2.36}$$

Rovnováha

Domácnosti se stejně jako firmy pohybují v dokonale konkurenčním prostředí a jsou tedy příjemcem cen výrobních faktorů r a w. Dále platí, že každý kapitálový statek musí být někým vlastněn ($k = a$, $\hat{k} = k \cdot e^{-xt}$). Úpravou vztahu (1.2.4) získáme rovnici růstu kapitálu na jednotku efektivní práce jako

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta)\hat{k} \tag{1.2.37}$$

a ze vztahu (1.2.14) získáme rovnici tempa růstu spotřeby na jednotku efektivní práce

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{c}}{c} - x = \frac{1}{\theta}[f'(k) - \delta - \rho - \theta x] \tag{1.2.38}$$

Rovnice (1.2.37) a (1.2.38) tvoří soustavu 2 diferenciálních rovnic. Podmínku transverzality lze přepsat jako

$$\lim_{t \to \infty} \left\{ \hat{k} \cdot e^{-\int_0^1 f'(\hat{k}) - \delta - x - n \mathrm{d}v} \right\} = 0 \,. \tag{1.2.39}$$

Ve steady-state je hodnota kapitálové vybavenosti na jednotku efektivní práce konstantní a má hodnotu $\hat{k^\star}$. Podmínka (1.2.39) vyžaduje, aby úroková míra ve steady-sate $r^\star = f'(\hat{k}) - \delta$ byla vyšší než míra růstu celkového objemu kapitálu K, která je dána jako $x + n$.

Steady-state

Označme si růst kapitálové vybavenosti na jednotku efektivní práce ve steady-state jako $\gamma^\star_{\hat{k}}$ a růst spotřeby na jednotku efektivní práce ve steady-state jako $\gamma^\star_{\hat{c}}$. Z rovnice (1.2.37) plyne

$$\hat{c} = f(\hat{k}) - (x + n + \delta) \cdot \hat{k} - \hat{k} \cdot \gamma^\star_{\hat{k}} \,. \tag{1.2.40}$$

Rovnost (1.2.40) derivujeme podle času

$$\dot{\hat{c}} = \dot{\hat{k}} \cdot \left\{ f'(\hat{k}) - \left[x + n + \delta + \gamma_{\hat{k}}^{\star} \right] \right\} . \tag{1.2.41}$$

Pokud by $\gamma_{\hat{k}}^{\star} > 0$, pak by podle (1.2.38) muselo platit $\gamma_{\hat{c}}^{\star} < 0$, což je v rozporu s tím, že obě tempa by měla mít stejné znaménko. V případě $\gamma_{\hat{k}}^{\star} < 0$ by došlo k analogickému sporu. Musí tedy platit, že $\gamma_{\hat{k}}^{\star} = \gamma_{\hat{c}}^{\star} = 0$. Ve steady-state roste množství kapitálu $\hat{k}$, spotřeby $\hat{c}$ a produktu $\hat{y}$ na jednotku fyzické práce tempem x. Růst životní úrovně populace je tedy ve steady-state determinován exogenním tempem růstu produktivity práce v důsledku technologického vývoje. Celkové množství kapitálu v ekonomice K, celková spotřeba C a celkem vyrobený produkt Y rostou tempem $x + n$.
Při nulovém tempu růstu spotřeby na jednotku efektivní práce platí $\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = 0$. Pak z rovnice (1.2.38) můžeme určit mezní produktivitu kapitálu ve steady-state jako

$$f'(\hat{k}^{\star}) = \delta + \rho + \theta \cdot x \, . \tag{1.2.42}$$

Úroková míra ve steady-state, která je dána rozdílem mezi mezní produktivitou kapitálu a mírou amortizace $(f'\left(\hat{k}^{\star}\right) - \delta)$, je tedy rovna efektivní diskontní míře $\rho + \theta \cdot x$. Protože mezní produktivita kapitálu je monotónně klesající funkce, platnosti Inadových podmínek (1.2.32) lze jednoznačně určit kapitálovou vybavenost na jednotku efektivní práce ve steady-state $\hat{k}^{\star}$. Protože ve steady-state neporoste kapitálová vybavenost na jednotku efektivní práce, pak můžeme rovnici (1.2.37) položit rovno nule, protože $\dot{\hat{k}} = 0$. Při znalosti $\hat{k}^{\star}$ lze úpravou rovnice (1.2.37) určit spotřebu na jednotku efektivní práce jako

$$\hat{c}^{\star} = f(\hat{k}^{\star}) - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}^{\star} \, . \tag{1.2.43}$$

Hodnota produkční funkce v intenzivní formě ve steady-state $f(\hat{k}^{\star})$ je rovna produkci na jednotku efektivní práce ve steady-state $\hat{y}^{\star}$. Ze vztahu (1.2.42) lze odvodit, že

$$\rho > n + (1 - \theta) \cdot x \, . \tag{1.2.44}$$

Pokud tedy nebude diskontní míra užitku dostatečně vysoká, pak ekonomika nebude konvergovat do steady-state. Subjekty v takové ekonomice by byly „příliš trpělivé“, což by způsobilo trvalý růst spotřeby na jednotku efektivní práce. Pro $t \to \infty$ by tedy $\hat{c} \to \infty$.

1.3 Moderní teorie ekonomického růstu

Ramsey zemřel necelé dva roky po vydání článku, tj. v roce 1930 v nedožitých 30 letech. To byl nepochybně jeden z důvodů, proč dalším ekonomům trvalo více než 20

let, než navázali na jeho dílo. Jedním z dalších důvodů bylo použití příliš sofistikovaného matematického aparátu, především dynamické optimalizace, jehož znalost nebyla v té době mezi ekonomy rozšířená. [15]
Za další důvod lze považovat ekonomickou situaci krátce v období po publikování článku. V důsledku hospodářské krize, která začala v roce 1929, došlo k významným změnám ve vývoji ekonomické teorie. Hlavní z nich byl vznik nového paradigmatu, keynesiánské ekonomie. Ta se zaměřovala především na studium krátkodobých cyklických výkyvů ekonomiky namísto dlouhodobého vývoje. [35]

Harrodův model

V roce 1939 vydal americký ekonom Roy Forbes Harrod článek *An Essay in Dynamic Theory*, který se zabýval růstem ekonomiky. Jednalo se však spíše o dynamickou verzi keynesiánské ekonomie, v níž byla zaměřena pozornost na rozdíly mezi očekávanou a skutečnou úrovní agregátní poptávky. Harrod se nevěnoval problematice dlouhodobého růstu ekonomiky a operoval s rozdílem mezi optimálním a skutečným tempem růstu ekonomiky. Tyto rozdíly byly právě způsobeny krátkodobými výkyvy ekonomiky. [1]

Solowův model

Solowův model bývá někdy označován jako neoklasický růstový model. Publikován byl v roce 1956 Robertem Mertonem Solowem v článku A *Contribution to the Theory of Economic Growth*. Model bývá někdy označován jako Solowův-Swanův model, protože Trevor Swan publikoval stejný model nezávisle na Solowovi v roce 1956.
Navzdory datu publikace je méně pokročilým růstovým modelem, především z důvodu chybějícího mikroekonomického základu. Solow a Swan však částečně navázali na Harrodův model a především odbourali předpoklad fixního množství kapitálu v ekonomice.
Protože popis Solowova modelu je součástí většiny učebnic pokročilého kurzu makroekonomie, v této práci se jeho odvození věnovat nebudeme. Relativně důležité je ale tzv. zlaté pravidlo, které se týká úrokové míry ve stálém stavu Solowova modelu. Uvažujme, že v ekonomice roste populace tempem n a technologický pokrok je dán konstantním tempem x, míra depreciace kapitálu je δ. V Solowově modelu opět můžeme určit množství kapitálu na jednotku efektivní práce jako $\hat{k}$. Ve steady-state je kapitál na jednotku efektivní práce konstantní na úrovni $k^\star$. Mezní produktivita kapitálu je opět derivací produkční funkce f podle množství kapitálu $\hat{k}$. Úroková míra r je rozdílem mezi mezní produktivitou kapitálu a mírou depreciace kapitálu. Podle zlatého pravidla Solowova modelu by měla být míra úspor v ekonomice taková, aby „čistý“ mezní produkt na

jednotku efektivní práce ve stálém stavu $\hat{k^\star}$ byl dán součtem tempa růstu populace a tempa růstu technologického pokroku, tj. platí rovnost [16]

$$r = f'(k^\star) - \delta = n + x \,. \tag{1.3.1}$$

Další modifikace Ramseyova modelu

Po oživení zájmu o teorii ekonomického růstu, které následovalo vydání Solowova článku, došlo ke „znovuobjevení“ Ramseyova modelu. Ten se dočkal řady modifikací a postupně se stal základem dalších ekonomických růstových modelů. Cass a Samuelson provedli řešení modelu pro konečný časový horizont, dále byly vydány na například modifikace s více druhy spotřebního zboží, vládními zásahy a otevřenou ekonomikou. [8]

Postupem času se začala objevovat řada nových růstových modelů, které se zakládaly především na zobecňování předpokladů a nahrazování exogenních veličin endogenními.

Překrývající se generace a Ramseyův model

V závěru svého článku Ramsey sám navrhl některá rozšíření pro svůj model. Uvědomoval si, že současná generace může přikládat menší váhu užitku dosahovanému budoucí generací než svému vlastnímu a sám navrhl modifikaci modelu s použitím užitkové funkce s diskontním faktorem. [31] První růstový model se zapracovaným problémem překrývajících se generací však vytvořil až Peter Diamond. [12]

Lucasova kritika

Velmi důležitým konceptem v moderní ekonomii se stala Lucasova kritika. Tento koncept formuloval americký ekonom a nositel Nobelovy ceny za ekonomii[7] v článku [21]. Lucas poukázal na problém, že v řadě ekonomických modelů není počítáno s reakcí subjektů na hospodářskou politiku státu. [30]

Mezi tyto modely patří i Solowův model, který kompletně postrádá mikroekonomický základ. Lucas prosazoval používání tzv. *deep parameters*[8], které popisují chování jednotlivců. Například Auerbachův-Koflikoffův model popisovaný v kapitole 3 popisuje

[7]Oficiální název tohoto ocenění je Cena Švédské národní banky za rozvoj ekonomické vědy na památku Alfreda Nobela. Cena nebyla zmíněna v Nobelově závěti, nejedná se tedy fakticky o Nobelovu cenu, ačkoli je tak zcela běžně označována.

[8]Vzhledem k tomu, že pro pojem *deep parameters* neexistuje ustálený český ekvivalent, budeme používat původní anglický termín.

chování subjektů na základě míry časových preferencí a intertemporální elasticity substituce, která popisuje preference subjektů obecně bez vazby na konkrétní hospodářskou politiku. Tento model je tedy z hlediska Lucasovy kritiky vhodný pro studium vlivu hospodářské politiky na ekonomiku.

Milton Friedman a metodologie pozitivní ekonomie

Z hlediska metodologie obsahuje ekonomie řadu různých směrů, mezi kterými existují významné metodologické rozdíly. Tyto rozdíly jsou pak jedním z hlavním důvodů, proč se různé ekonomické teorie liší svými teoretickými i praktickými implikacemi. Ekonomie hlavního proudu (někdy označovaná původním anglickým výrazem *mainstream*) je dnes založena především na používání modelů, často založených na pokročilých matematických metodách.

Kritika a obhajoba modelů Používání modelů je ekonomy z jiných směrů často kritizováno. Jednotlivé modely jsou pak nejčastěji kritizovány z důvodu jejich předpokladů, které nejsou v souladu s realitou a jsou (dle názoru kritiků) značně zjednodušující. Odpovědí na tuto kritiku byl článek Miltona Friedmana *Metodologie pozitivní ekonomie*. V něm Friedman vysvětluje, že neexistuje objektivní měřítko toho, *jak moc* jsou předpoklady v souladu s realitou. Naopak samotnou podstatou modelu je určití zjednodušení reality a zásadní objevy ve vědě by měly spočívat v tom, že vysvětlují *mnoho* pomocí *mála*, nikoli *mnoho* pomocí *mnoha*.

Měřítko kvality modelu Friedman navrhuje jiné měřítko kvality modelu, a to schopnost modelu poskytovat kvantitativní predikce. Modely lze mezi sebou objektivně porovnávat pomocí jejich schopnosti predikovat ekonomické jevy. Doplňujícím měřítkem je pak složitost modelu a především nákladnost získání potřebných dat. Z alternativních modelů může být zvolen ten s méně přesnými predikcemi, pokud dodatečné „náklady“ na používání druhého modelu nevyvažují zpřesnění predikcí.
Friedman ve svém článku uvádí dnes již legendární příklad s hráčem biliáru. Podle Friedmana by bylo možné na základě fyzikálního modelu určit optimální „tah“ a na jeho základě predikovat příští „tah“ profesionálního biliárového hráče. Tento přístup by generoval „dostatečně dobré“ predikce, ačkoli profesionální hráč se rozhoduje čistě na základě svojí intuice. [17]

Další modifikace teorie ekonomického růstu

Solowův model, který jsme popsali na straně 14 poskytoval v 50. a 60. letech relativně přijatelné prognózy ekonomického růstu. Později se však objevil problém s pomalejší konvergencí rozvojových a rozvinutých ekonomik. Řada ekonomů se začala zabývat analýzou technologického růstu a zapracovala technologický růst do modelu jako jeho endogenní součást.
Někteří ekonomové dávali technologický rozvoj do přímé souvislosti s množstvím kapitálu v ekonomice. Do svých kalkulací zahrnuli i lidský kapitál. Tím se snažili vysvětlit pomalý rozvoj rozvojových ekonomik, který souvisel i s emigrací vzdělané části obyvatelstva. Další ekonomové se pak soustředili na rostoucí produktivitu práce. [11]
V literatuře věnující se ekonomickému růstu lze v dnešní době najít obrovské množství modelů. K jejich pochopení je však ve většině případů nutné pochopení Ramseyova modelu, který jsme si právě z tohoto důvodu popsali.

1.4 OLG modely v kontextu ekonomického vývoje

Zatím jsme se zabývali vývojem teorie ekonomického růstu a začleněním OLG modelů do této teorie. Vývoj OLG modelů a jejich používání ale souvisí s problémy ekonomické reality. Jedním z nejčastěji diskutovaných dlouhodobých ekonomických problémů je stárnutí populace a s tím rostoucí nároky na penzijní systém.
Stárnutí populace je relativně novým fenoménem, za jehož hlavní příčiny lze považovat klesající porodnost a zvyšující se délka života. Tento problém se týká v současné době většiny zemí rozvinutého světa, s jistým „předstihem“ oproti ostatním zemím se objevil v Japonsku. Z demografické struktury populace České republiky z roku 2010 (obr. 1) a prognózy demografické struktury v roce 2066 (obr. 2) je patrné, že ke stárnutí populace bude docházet i v České republice.

Typy financování důchodového systému

Existují dva druhy financování důchodových systémů: průběžně financované a fondové penzijní systémy. [9]

Průběžně financované systémy Většina ekonomik rozvinutých zemí používá tzv. průběžně financovaný důchodový systém[9], který je založený na jednoduchém principu: penze spotřebitelů, kteří jsou v současnosti v post-produktivním věku, jsou financovány

[9] Označovaný často zkratkou PAYG – Pay as you go.

Obrázek 1: Demografická struktura obyvatelstva v roce 2010 (zdroj: [10])

z odvodů spotřebitelů, kteří jsou v současnosti v produktivním věku. Tito mladí spotřebitelé pak po dosažení důchodového věku budou dostávat penze financované z odvodů osob, které budou v té době v produktivním věku atd.
Zřejmou nevýhodou PAYG systému (kterou budeme podrobněji teoreticky diskutovat v subkapitole 2.3 na straně 26) je závislost na demografickém vývoji. Vlády se snaží pomocí různých „reforem“ upravit důchodový systém tak, aby byla zajištěna dostatečná výše starobních penzí i při klesajícím počtu spotřebitelů, kteří do systému aktivně přispívají.

Fondové systémy Alternativní metodou je tzv. fondové financování, kdy penze jedince je čerpána z vkladů, které do systému uložil v produktivním věku. Systém nefunguje na principu mezigenerační solidarity. Tento systém je méně závislý na demografickém vývoji, protože nedochází k přímému přerozdělování prostředků. Nelze jej však obecně považovat za zcela nezávislý, protože snižující se počet osob v produktivním věku vede (za jinak stejných okolností) ke snížení nabídky práce a tím pádem růstu její ceny, což se může promítnout i do nabídky zboží a služeb. Tento vývoj může nega-

Obrázek 2: Demografická struktura obyvatelstva v roce 2066 (zdroj: [10])

tivně ovlivnit i reálnou hodnotu úspor osob v post-produktivním věku[10]. Samozřejmě v podmínkách otevřené ekonomiky je situace nesrovnatelně komplikovanější.

Důvody aplikace OLG modelů

Úpravy důchodového systému jsou však zásahy do fungování ekonomiky. Jak již ukázal Lucas, v ekonomické analýze dopadů státních zásahů na ekonomiku je potřeba počítat s přizpůsobením subjektů, které nastane po aplikaci určité konkrétní hospodářské politiky. Především zvyšování mezní míry zdanění může vést subjekty (výrobce i spotřebitele) ke snižování své ekonomické aktivity.

Proto se v diskusi o ekonomických dopadech stárnutí populace stále častěji objevují studie, které hodnotí dopad vládních zásahů do ekonomiky pomocí OLG modelů, které jsou robustní vůči Lucasově kritice. Smysl těchto studií bývá provedení predikce vývoje při zachování současných parametrů penzijního systému a predikce při změně nastavení hospodářské politiky. To umožňuje zhodnocení dopadů připravovaných reforem na

[10]Tuto variantu lze snadno simulovat s využitím popisovaných modelů a nastavení nulové výše penzí.

ekonomiku.

2 Diamondův model

Diamond publikoval svůj model v článku [12]. Svým modelem navázal na Solowův a Ramseyův model. Jednalo se o první model se zahrnutím překrývajících se generací. Logický a metodologický přístup, který Diamond k modelování překrývajících se generací využil, je stále přítomný v moderních OLG modelech.
Popis modelu vychází z učebnice [11]. V popisu nebudeme zavádět existenci vlády a zdanění, soustředíme se pouze na rozdíl mezi fondovým a průběžně financovaným penzijním systémem a výhodnost obou systémů pro různé ekonomické situace.

2.1 Předpoklady modelu

Stejně jako v Ramseyově modelu, tak i v Diamondově modelu dochází k populačnímu růstu. V Ramseyově modelu se spotřebitel rozhodoval v nekonečném časovém horizontu. Neuvažovali jsme, že jedinci po určitém věku umírají. V Diamondově modelu se objevují noví jedinci, zatímco staří umírají. Subjekty neprovádějí maximalizaci v užitku v nekonečném časovém horizontu, ale v časovém horizontu omezeném délkou jejich života. Čas v Daimondově modelu budeme považovat za diskrétní.
Život každého spotřebitele se dělí na dvě etapy: *mládí* (lidé v produktivním věku) a *stáří* (lidé v post-produktivním věku). V každém období se tedy populace skládá ze dvou skupin spotřebitelů. Uvažujme shodnou délku produktivní a post-produktivní části života a tuto délku normujme na hodnotu 1. Rozdílnou délku produktivní a post-produktivní části života, která je v praxi běžná, budeme analyzovat kapitole 3.
Tempo růstu populace je konstantní a označíme jej opět jako n. Stejně jako v Ramseyově modelu uvažujeme exogenní nabídku práce, užitková funkce závisí na množství spotřeby v daném období.
V produktivním věku každý jedinec nabízí jednu jednotku práce. Získanou mzdu rozděluje na úspory a spotřebu. Ve post-produktivním věku utrácí své úspory a získané úroky. Označme $C_{1,t}$ spotřebu jedince v produktivním věku v čase t a $C_{2,t}$ spotřebu jedince v post-produktivním věku v čase t.
Produkční funkce ekonomiky je definována analogicky jako v Ramseyově modelu na straně 10. Uvažujme produkční funkci závislou na množství kapitálu v ekonomice, velikosti pracovní síly a technologického pokroku. Tempo technologického růstu je konstantní a označíme si jej opět jako x. Označme si opět množství kapitálu v ekonomice v čase t jako K_t a množství efektivní práce v ekonomice v čase t jako $\hat{L}_t$. Pak produkční funkce je definovaná analogicky jako v Ramseyově modelu (vztah (1.2.28) na straně 11)

vztahem

$$Y = F(K, \hat{L})\,. \tag{2.1.1}$$

Množství produkce vyrobené v čase t je pak závislé na množství kapitálu, pracovní síly a technologickému pokroku v čase t, tedy $Y_t = F(K_t, \hat{L}_t) = F(K_t, L_t \cdot A_t)$. Produkční funkce F má stejně jako v Ramseyově modelu konstantní výnosy z rozsahu.

Logickou změnou oproti Ramseyově modelu je, že velikost populace není rovná velikosti pracovní síly, protože populace se skládá z pracovní síly a ze spotřebitelů v post-produktivním věku, kteří již na trh práce nevstupují.

Stejně jako v Ramseyově modelu zavedeme produkční funkci v intenzivní formě f. Zachován zůstane i neoklasický předpoklad o úrokové míře dané čistým výnosem z kapitálu, tj. rozdílem mezi mezní výnosností kapitálu $f'(k)$ a mírou depreciace kapitálu δ. Protože míra depreciace kapitálu není rozhodujícím faktorem pro porovnání fondového a penzijního systému v Diamondově modelu, můžeme pro zjednodušení uvažovat $\delta = 0$ a tedy

$$r_t = f'(k_t)\,. \tag{2.1.2}$$

Rovněž mzda na jednotku efektivní práce w_t odpovídá mezní produktivitě jednotky efektivní práce při dané vybavenosti kapitálem (vztah (1.2.36) na straně 12).

2.2 Popis subjektů

Spotřebitel

Užitek reprezentativního jedince je závislý na jeho spotřebě, do užitkové funkce tedy vstupuje jeho spotřeba v produktivním věku C_1 a spotřeba v post-produktivním věku C_2. V produktivním věku jedinec spotřebuje část svého příjmu ze mzdy, část uspoří. V post-produktivním věku jedinec spotřebuje své úspory, které jsou navýšeny o příjem z úroků. Protože v této fázi neuvažujeme přítomnost vlády, je jedinec „odkázán" jen na své úspory a nedostává žádné transfery ze státního rozpočtu. V produktivním i post-produktivním věku není jeho mzda ani spotřeba nijak daněna.

Rozpočtové omezení spotřebitele Uvažujme rozpočtové omezení jedince v post-produktivním věku. Jedinec v post-produktivním věku spotřebuje své úspory z produktivního věku zhodnocené o úrokovou míru. Uvažujme, že úspory jsou zhodnoceny úrokovou mírou v době post-produktivního věku jedince. Velikost spotřeby jedince v post-produktivním věku je dána vztahem

$$C_{2,t+1} = (1 + r_{t+1})(w_t - C_{1,t})\,. \tag{2.2.1}$$

Užitek jedince za obě období je váženým součtem užitků za jednotlivá období. Uvažujme analogický tvar užitkové funkce jako v rovnici (1.2.13) na straně 9. Označme si θ opět jako reciprokou hodnotu k elasticitě intertempolární substituce. Platí omezení, že $\theta > 0$. Uvažujme hodnotu vzhledem k času t. Spotřeba v post-produktivním věku je opět diskontována individuální diskontní mírou ρ. Hodnota užitku jedince v čase t, který je v čase t v produktivním věku, je dána vztahem

$$U_t = \frac{C_{1,t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho} \cdot \frac{C_{2,t+1}^{1-\theta}}{1-\theta}\,. \tag{2.2.2}$$

Musí platit $1 + \rho > 0$, tedy $\rho > -1$. Dále musí platit $\rho \neq 0$. Pokud $\rho \in (-1, 0)$, pak jedinec klade vyšší váhu spotřebě v post-produktivním věku, pokud $\rho > 0$, pak preferuje spotřebu v produktivním věku.

Řešení úlohy spotřebitele Jednotlivec maximalizuje svoji užitkovou funkce (2.2.2) volbou velkosti spotřeby v obou obdobích. Úlohu spotřebitele lze řešit jednodušším způsobem, než v případě Ramseyova modelu, a to metodou Lagrangeových multiplikátorů. Omezující podmínka je dána rovnicí (2.2.1). Lagrangeova rovnice má tedy tvar

$$\mathcal{L} = \frac{C_{1,t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{1}{1+\rho} \cdot \frac{C_{2,t+1}^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda \left[C_{2,t+1} - (1 + r_{t+1})(w_t - C_{1,t})\right] \tag{2.2.3}$$

Určíme parciální derivace rovnice (2.2.3) podle $C_{1,t}$ a $C_{2,t+1}$ a položíme je rovny nule:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{1,t}} = C_{1,t}^{-\theta} + \lambda \cdot (1 + r_{t+1}) = 0\,, \tag{2.2.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{2,t+1}} = \frac{C_{2,t+1}^{-\theta}}{1+\rho} + \lambda = 0. \tag{2.2.5}$$

Vyjádříme-li z obou rovnic λ, získáme rovnost

$$\frac{C_{t,1}^{-\theta}}{1 + r_{t+1}} = \frac{C_{t,1}^{-\theta}}{1+\rho}\,, \tag{2.2.6}$$

což lze přepsat jako

$$\frac{C_{1,t}}{C_{2,t+1}} = \left(\frac{1+\rho}{1 + r_{t+1}}\right)^{\frac{1}{\theta}}\,. \tag{2.2.7}$$

Pokud tedy bude spotřebitel maximalizovat svůj užitek daný funkcí (2.2.2) při rozpočtovém omezení (2.2.1), bude poměr jeho spotřeby v produktivním a post-produktivním věku záviset na poměru velikosti úrokové míry a individuální diskontní míry spotřebitele.

Velikost úspor spotřebitele Z řešení problému spotřebitele (2.2.7) lze odvodit vyjádření velikosti spotřeby v produktivním věku v závislosti na parametrech r_{t+1} a ρ a reálné mzdě na jednotku efektivní práce w_t. Z rozpočtového omezení spotřebitele (2.2.1) pak odvodíme vztah

$$C_{1,t} = \frac{(1+\rho)^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}} w_t \tag{2.2.8}$$

Z rovnice (2.2.8) můžeme odvodit podíl úspor na příjmu ze mzdy. Jednotlivec vydává na spotřebu část mzdy, která je daná zlomkem

$$\frac{C_{1,t}}{w_t} = \frac{(1+\rho)^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}} \,. \tag{2.2.9}$$

Zbylá část příjmu je vynaložena na úspory. Část důchodu, kterou jednotlivec uspoří, je tedy dána jednotkovým doplňkem ke zlomku (2.2.9). Podíl úspor na příjmu ze mzdy $s_t = 1 - \frac{C_{1,t}}{w_t}$ je funkcí úrokové míry r_{t+1} a individuální diskontní míry ρ a lze jej snadno odvodit jako

$$s_t(r_{t+1}) = \frac{(1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\theta}} + (1+r_{t+1})^{\frac{1-\theta}{\theta}}} \,. \tag{2.2.10}$$

Kapitál v ekonomice

Kapitál v ekonomice v čase $t+1$ je tvořen úsporami osob, které byly v produktivním věku v čase t. Jedinci žijící v dřívějších generacích totiž veškeré své úspory utratili v post-produktivním věku. Celkové množství kapitálu v ekonomice lze určit na základě úspor reprezentativního jedince. Reprezentativních jedinců je v čase t v ekonomice L_t. Kapitálová zásoba v ekonomice je dána vztahem

$$K_{t+1} = s_t \cdot L_t \cdot w_t \,. \tag{2.2.11}$$

Kapitál na jednotku efektivní práce je dán vztahem

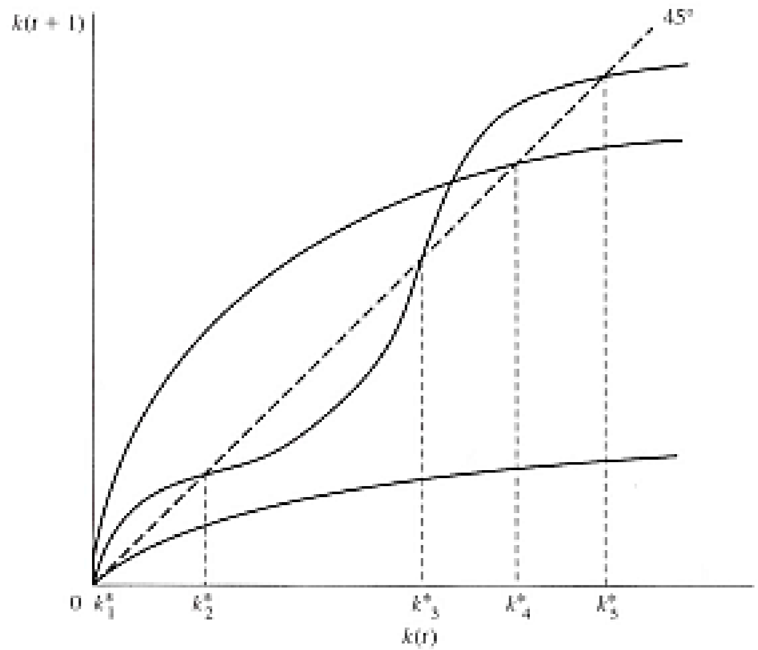
$$\hat{k}_{t+1} = \frac{s_t \cdot w_t}{(1+n)(1+g)} \,. \tag{2.2.12}$$

Do rovnice (2.2.12) můžeme dosadit vztah pro úrokovou míru a mzdu na jednotku efektivní práce. Získáme vyjádření kapitálu na jednotku efektivní práce v závislosti na parametrech n, x a kapitálu na jednotku efektivní práce v čase t:

$$\hat{k}_{t+1} = \frac{s\left[f'(k_{t+1})\right]\left[f(k_t) - k_t \cdot f'(k_t)\right]}{(1+n)(1+x)} \,. \tag{2.2.13}$$

Pro steady-state Diamondova modelu platí, že $k_t = k_{t+1}$, tj. nemění se množství kapitálu na jednotku efektivní práce. Tempo růstu kapitálu poroste pouze v důsledku růstu velikosti populace a růstu efektivity práce.

Obrázek 3: Steady-state v Diamondově modelu (zdroj: [18])



Steady-state

Pro obecně definované parametry modelu a užitkové funkce modelu není zajištěna existence jediného steady-state. Pro jiné kombinace parametrů a užitkové funkce zase steady-state existovat nemusí. Obě situace spolu s existencí jednoho steady-state jsou na obrázku 3.

Vzhledem k rozsahu práce budeme hledat steady-state pouze pro případ $\theta \to 1$. Nejprve si určíme limitu užitkové funkce jako

$$\lim_{\theta \to 1} U_t = \ln C_{1,t} + \frac{\ln C_{2,t+1}}{1+\rho}\,. \tag{2.2.14}$$

Míra úspor je pak nezávislá na úrokové míře a je dána vztahem

$$s_t = \frac{1}{2+\rho}\,. \tag{2.2.15}$$

Dále uvažujme Cobb-Douglasovu produkční funkci definovanou vztahem

$$F(K,L) = K^{\alpha} \cdot (A \cdot L)^{1-\alpha}\,. \tag{2.2.16}$$

Nyní lze určit množství kapitálu na jednotku efektivní práce v čase $t+1$ jako

$$k_{t+1} = \frac{(1-\alpha) \cdot k_t^{\alpha}}{(1+n)(1+x)(2+\rho)}\,. \tag{2.2.17}$$

V případě splnění daných předpokladů existuje právě jeden steady-state, ke kterému bude ekonomika konvergovat. Ekonomika konverguje k danému steady-state bez ohledu na počáteční hodnotu k_0.

2.3 Penzijní systém v Diamondově modelu

Spolu s možností existence více steady-state existuje v Diamondově modelu oproti Ramseyově další komplikace. Ve steady-state nemusí být maximalizován užitek dané populace. Míra úspor ve steady-state může být odlišná od té, která by maximalizovala součet užitku obou generací.

Lze dokázat, že společenský užitek je maximalizován při úrokové míře shodné jako u zlatého pravidla Solowova modelu (viz rovnice (1.3.1) na straně 15). Pokud tedy ve steady-state platí $r < n+x$, není užitek obou generací maximalizován a navíc lze užitek jednotlivých generací zvýšit současně. Spotřebitel za každou uspořenou jednotku zboží v produktivním věku získává spotřebu $1+r$ v post-produktivním věku. Uvažujme ale, že tento spotřebitel by se namísto úspory jedné jednotky zboží rozhodl tuto jednotku darovat osobě v post-produktivním věku. Této jednotky by se dobrovolně vzdal, protože by mu bylo přislíbeno třetí stranou, že spotřebitelé, kteří budou v čase $t+1$ v produktivním věku, se vzdají části svého příjmu ve prospěch spotřebitelů v post-produktivním věku. Uvažujme, že příjem přepočtený na jednotku efektivní práce, kterého se vzdají spotřebitelé v obou generacích, je ekvivalentní. Víme, že populace roste konstantním tempem n. Protože do systému vždy přispívá celá generace a celý vklad do systému v čase t jedinci v produktivním věku je v čase t ihned předán jedincům v produktivním věku, obdrží každý spotřebitel v post-produktivním věku za každou jednotku, které se dříve vzdal, celkem $1+n+x$ jednotek spotřebního zboží. S přesunem jedné jednotky současně dojde ke snížení kapitálu ve výrobě, což zvýší mezní produktivitu kapitálu a tím i úrokovou míru. Při zavedení tohoto systému „darování“ by se snížila úroveň úspor až na takovou, kdy bude platit $r = n+g$, tj. vložení další jednotky do obou systémů je stejně výhodné.

Tedy pokud platí, že $r < n+x$, pak $1+r < 1+n+x$ a systém je pro spotřebitele ve všech generacích výhodnější než fondový systém. V opačném případě by bylo pro spotřebitele výhodnější, kdyby do tohoto systému nevstupoval.

Popisovaný systém v principu odpovídá průběžnému systému (viz strana 17). Podle Diamondova modelu závisí je tedy výhodnost tohoto systém pro účastníky závislá na tempu růstu populace, tempu růstu produktivity práce a úrokové míře. Z modelu automaticky nevyplývá, že průběžný systém je nevýhodný při nízkém tempu růstu populace, protože to může být kompenzováno dostatečně velkým tempem růstu produktivity práce. Kombinace nízkého (případně záporného) tempa růstu populace a nízkého tempa růstu produktivity práce však tento systém činí pro jeho účastníky nevýhodným.

3 Auerbachův-Kotlikoffův model

V kapitole 2 jsme si popsali Diamondův model. V modelu se život jednoho jedince dělil na dvě období – produktivní věk a post-produktivní věk. Tento přístup je však poměrně nerealistický, protože předpokládal stejnou délku obou částí života. V roce 1987 publikovali Auerbach a Kotlikoff v knize [2] OLG model, který rozšiřuje Diamondův model nejen o periodu o délce jednoho roku, model navíc uvažuje i endogenní nabídku práce, protože v užitkové funkci spotřebitele je kromě spotřeby i volný čas jednotlivce.

Důvody výběru modelu

Tento model byl od své první publikace mnohokrát použit, a to nejen v akademické sféře, ale i k tvorbě prognóz centrálních bank nebo OECD. Model je založený na konstrukci všeobecné rovnováhy mezi spotřebiteli, firmami a vládnou. V modelu je chování spotřebitele analyzováno s využitím *deep parametres*, které popisují chování spotřebitelů (viz diskusi k Lucasově kritice na straně 15).
Prezentovaný model má i nevýhody. Je to především nemožnost analytického odvození hodnot popisujících steady-state. Pro nalezení steady-state použijeme numerický algoritmus, který je popsán v subkapitole 4.1 na straně 45.

3.1 Spotřebitel bez existence státu

Model je opět založen na popisu chování reprezentativního jedince (viz strana 6 v subkapitole 1.2). Chování jedince se v průběhu jeho života mění, jedinci v jedné věkové skupině se však od sebe neliší.
Věk odchodu do důchodu není v původní verzi modelu pevně daný, ale závisí zcela na rozhodnutí subjektu. Věk odchodu do důchodu je tedy endogenní proměnnou modelu.

Životní cyklus spotřebitele

Model je zcela deterministický, délka života jedince je pevně daná a konstantní a známa všem spotřebitelům, kteří ji zahrnují do svých kalkulací. Mezi narozením a 20. rokem života aktivně nesledujeme chování spotřebitele. Uvažujeme, že v té době se subjekt samostatně nerozhoduje, nevolí si tedy svůj vlastní objem spotřeby ani nemůže nabízet práci na trhu práce. Spotřebitel začíná s nulovou hodnotou aktiv, tj. neuvažujeme dědictví ani jinou formu převodu majetku mezi generacemi. Z toho plyne, že subjekt na konci života umírá s nulovou hodnotou vlastněných aktiv. Mezi 21. rokem života a odchodem do penze spotřebitel aktivně nabízí práci na trhu práce a za tu získává mzdu. Část této mzdy vynaloží na spotřebu a zbytek uspoří. Po odchodu do penze už spotřebitel na trh práce aktivně nevstupuje. Stále ale nakupuje spotřební zboží, přičemž spotřební výdaje jsou financovány z vytvořených úspor a případně z peněžních transferů od státu.

Auerbach a Kotlikoff uvažovali, že v 75. roce života spotřebitel umírá a je nahrazen novým jedincem. V modelu tedy rovněž neexistují explicitně vyjádřené rodinné vztahy. Protože délka života spotřebitele se může lišit, označme si rok úmrtí spotřebitele jako i_d. Jedinec plánuje svou celoživotní spotřebu a množství volného času.

Užitková funkce spotřebitele

Funkce udávající současnou hodnotu užitku za celý život spotřebitele je váženým součtem užitků spotřebitele v jednotlivých letech života. Užitek v každém roce závisí na spotřebě a množství volného času. Množství volného času budeme definovat jako poměr mezi skutečně odpracovaným časem a disponibilním časem spotřebitele v daném roce.

Užitková funkce v modelu má konstantní elasticitu substituce mezi spotřebou a volným časem. Označme si nejprve užitek v i-tém roce života spotřebitele jako u_i, parametry užitkové funkce β, γ a α si vysvětlíme v následujícím odstavci. Užitek v i-tém roce vyjádříme vztahem

$$u_i = \left[c_t^{1-\frac{1}{\beta}} + \alpha \cdot l_t^{1-\frac{1}{\beta}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\beta}}} \tag{3.1.1}$$

kde

c_t je množství spotřebovaného zboží t-tém roce,

l_t je podíl volného čase na celkovém času v t-tém roce.

Současná hodnota užitku spotřebitele za celý jeho život U je pak dána diskontovaným součtem užitků

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{i_d} \frac{u_i^{1-\frac{1}{\gamma}}}{(1+\rho)^{i-1}}}{1 - \frac{1}{\gamma}} \tag{3.1.2}$$

Specifikce parametrů užitkové funkce Parametr γ označuje elasticitu intertemporální substituce, která je definována stejně jako při popisu Ramseyova modelu rovnicí (1.2.11) na straně 8. Parametr β určuje míru reakce individuální nabídky práce na změnu reálné mzdy a určuje velikost elasticity substituce mezi volným časem a spotřebou. Tato elasticita je definována jako změna poměru mezi c_i a l_i vzhledem ke změně reálné mzdy. Parametr α je mírou preference volného času před spotřebou, s růstem hodnoty parametru α individuální nabídka práce klesá. Při $\alpha = 0$ bychom opět získali model s exogenní nabídkou práce. Parametr ρ opět označuje diskontní faktor.

Rozpočtové omezení domácnosti

Spotřebitel maximalizuje svůj celoživotní užitek (3.1.2) vzhledem ke svému rozpočtovému omezení. Na konci života musí mít spotřebitel nulovou hodnotu vlastněných finančních aktiv, jiné omezení výdajů spotřebitele na spotřebu není uvažováno. Maximalizace užitku spotřebitele je optimalizační úlohou s jednou omezující podmínkou, přičemž optimalizaci je prováděna v diskrétním čase a konečném časovém horizontu.
Uvažujme nejprve rozpočtové omezení bez existence zdanění (tj. nejsou zdaňovány kapitálové příjmy, spotřeba ani mzdové příjmy). Úrokovou míru v i-tém roce si opět označme jako r_i. Dále si označme reálnou mzdu v i-tém roce jako w_i. Příjem spotřebitele se skládá z úroků z vlastněných aktiv a ze mzdových příjmů. Množství vlastněných aktiv je přitom závislé čistě na příjmu z dříve prodané práce, protože spotřebitel ukládá do finančních aktiv veškerý nespotřebovaný důchod.
Dále uvažujme, že může docházet ke změně výše mzdy spotřebitele v závislosti na aktuálním věku, například v důsledku růstu pracovních zkušeností. Abychom zachovali homogenitu práce a předpoklad dokonale konkurenčního trhu práce, nabízejí všichni spotřebitelé svoji práci na jednom trhu a tržní cena je pro všechny nabízející stejná. Uvažujme ale, že násobek mzdové sazby a množství odpracovaného času na trhu práce násobíme proměnnou e_i, která upravuje pracovní příjem vzhledem k věku spotřebitele. Hodnota e_i je i-tý rok exogenní, spotřebitel ji tedy nemůže ovlivnit. Dále uvažujme, že pro jedince různých generací dochází ke stejné relativní změně reálných mezd v důsledku růstu dosaženého věku. Součin $w_i \cdot e_i$ je analogií mzdy za jednotku efektivní práce, kterou jsme si definovali při popisu Ramseyova modelu (viz str. 12) a následně ji použili i v Diamondově modelu.
Podmínku nulové hodnoty aktiv na konci života spotřebitele tedy můžeme formálně zapsat jako

$$\sum_{i=1}^{i_d} \prod_{j=2}^{i} \frac{1}{1+r_j} \cdot [w_i \cdot e_i \cdot (1-l_i) - c_i] = 0\,. \tag{3.1.3}$$

Další podmínkou optimalizace je, že pro relativní poměr odpracované doby na délce časového období platí $l_i \in \langle 0, 1 \rangle$. Označme si množství vlastněných finančních aktiv spotřebitelem v i-tém roce opět jako a_i. Hodnota vlastněných finančních aktiv na začátku i na konci života spotřebitele je nulová. Podmínku (3.1.3) můžeme přepsat jako

$$a_1 = a_{i_d} = 0\,. \tag{3.1.4}$$

Protože spotřebitel rozkládá celý svůj příjem mezi spotřebu a finanční aktiva, velikost aktiv v i-tém roce života spotřebitele je dána vztahem

$$a_i = e_i \cdot w_i + (1 + r_i) \cdot a_{i-1} - c_i\,. \tag{3.1.5}$$

Ze vztahu vyplývá, že výše spotřebních výdajů spotřebitele není limitována příjmem spotřebitele z prodeje práce. Aby spotřebitel splnil podmínku (3.1.3), musí na konci svého života spotřebovávat nejen veškeré příjmy z úroků, ale postupně vkládá do spotřeby i dříve akumulované úspory (tj. pro některá i platí $e_i \cdot w_i + (1 + r_i) \cdot a_{i-1} < c_i$).

Optimalizace užitku bez existence vlády

Jak jsme již uvedli na začátku kaptoly, ptimalizační problém spotřebitele není analyticky řešitelný. Metodou Lagrangeových multiplikátorů lze ale získat soustavy rovnic, které někteří autoři navrhují využít při numerickém řešení. Ukažme si tedy tvar Lagrangeovy rovnice a její parciální derivace.
Tentokrát rovnice neobsahuje jen jeden Lagrangeův multiplikátor jako rovnice (2.2.3), ale Lagrangeovy multiplikátory λ_i pro $i = 1, 2, \ldots, i_d$. Řešením problému je nalezení optimálních hodnot c_i pro $i = 1, 2, \ldots, i_d$. Formulujme Lagrangeovu rovnici:

$$\mathcal{L} = \frac{\sum_{i=1}^{i_d} (1+\rho)^{-(i-1)} u_i^{1-\frac{1}{\gamma}}}{1 - \frac{1}{\gamma}} + \sum_{i=1}^{i_d} \prod_{j=2}^{i} \frac{1}{1 + r_j} \cdot \lambda_i \cdot [w_i \cdot e_i \cdot (1 - l_i) - c_i]\,. \tag{3.1.6}$$

Podmínky prvního řádu Uvažujme nyní podmínky prvního řádu pro optimální spotřebu a optimální množství volného času v i-tém roce. Nejprve určíme parciální derivaci rovnice (3.1.6) podle proměnné c_i a položíme ji rovnu nule. Po úpravě získáme rovnici

$$(1+\rho)^{-(t-1)} \cdot \Omega_i \cdot c_i^{-\frac{1}{\rho}} = \lambda_i \left[\prod_{j=2}^{i} (1 + r_j)^{-i} \right]. \tag{3.1.7}$$

Nyní spočítáme parciální derivaci rovnice (3.1.6) podle proměnné l_i a položíme ji rovnu nule. Po úpravě získáme rovnici

$$(1+\rho)^{-(i-1)} \cdot \Omega_i \cdot \alpha \cdot l_i^{-\frac{1}{\rho}} = \lambda_i \left[\prod_{j=2}^{i} (1 + r_j)^{-i} \right] \cdot w_i^{\star}\,. \tag{3.1.8}$$

Lagrangeův multiplikátor λ_i lze ekonomicky interpretovat jako stínovou cenu. Hodnota λ_i představuje zvýšení užitku při zvýšení příjmu o jednu jednotku diskontovanou pro i-tý rok. Dále proměnná Ω_i je definována jako

$$\Omega_i = \left[c_i^{1-\frac{1}{\beta}} + \alpha \cdot l_t^{1-\frac{1}{\beta}} \right]^{\frac{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}}{1-\frac{1}{\rho}}} \tag{3.1.9}$$

a $w_i^\star$ definována jako

$$w_i^\star = w_i \cdot e_i + \mu_i \,. \tag{3.1.10}$$

Proměnná μ_i označuje stínovou cenu práce v i-tém roce a je různá od nuly právě když subjekt volí odchod do důchodu v i-tém roce. Představuje zvýšení mzdy na jednotku efektivní práce $w_i \cdot e_i$, kterou bude subjekt vyžadovat, aby namísto odchodu do důchodu opět začal nabízet svoji práci na trhu práce.

Z rovnic (3.1.7) a (3.1.8) lze vyjádřit optimální množství relativního podílu volného času na disponibilním čase v čase t vztahem

$$l_t = (\frac{w_t^\star}{\alpha})^{-\rho} \cdot c_t \,. \tag{3.1.11}$$

Pokud je ρ fixní, zvýšení α zvýší poměr $\frac{l_i}{c_i}$ a subjekt bude méně pracovat a sníží svoji spotřebu.

Substitucí (3.1.11) do (3.1.9) získáme vyjádření Ω_i v závislosti na c_t. Následně můžeme tento tvar dosadit do (3.1.7) a získáme rovnici vývoje spotřeby spotřebitele v čase:

$$c_t = \left[\frac{(1+r_i)}{(1+\rho)} \right]^\gamma \cdot \left[\frac{\nu_i}{\nu_{i-1}} \right] \cdot c_{i-1} \,. \tag{3.1.12}$$

Proměnná ν_i vyjadřuje

$$\nu_i = \left[1 + \alpha \cdot \rho \cdot w_t^{\star 1-\rho} \right]^{\frac{\rho-\gamma}{1-\rho}} \,. \tag{3.1.13}$$

Proměnná ν_i je pomocnou proměnnou bez ekonomické interpretace. Obecně nelze formulovat závěr, zda zvýšení mzdy na jednotku efektivní práce $w_i^\star$ povede ke zvýšení nebo snížení odpracovaného volného času. To závisí na vzájemné velikosti parametrů ρ a γ. V mikroekonomii obecně zvýšení mzdy může vyvolat růst i pokles individuálního nabízeného množství práce. [37] Nyní je již jednoduché odvodit vývoj relativního množství volného času spotřebitele. Vyjdeme z rovnice (3.1.11), do které dosadíme za c_t tvar (3.1.12). Získáme tak rovnici

$$l_i = \left(\frac{1+r_i}{1+\rho} \right)^\gamma \cdot \left(\frac{\nu_i}{\nu_{i-1}} \right)^\rho \cdot \left(\frac{w_i^\star}{w_{i-1}^\star} \right)^\rho \cdot l_{t-1} \,. \tag{3.1.14}$$

Rovnice (3.1.12) a (3.1.14) tvoří soustavu diferenčních rovnic, které určují vývoj spotřeby a relativního množství volného času spotřebitele v průběhu jeho života. Konkrétní hodnoty c_i a l_i v průběhu života spotřebitele ale z rovnic bohužel nelze analyticky určit, proto musí být tato soustava řešena numericky.

3.2 Spotřebitel při existenci vlády

Nyní do ekonomiky zavedeme existenci státu. Rozšíření modelu o existenci státu zpracovali již Auerbach a Kotlikoff v knize [3], některé detaily rozpracoval Dybczak v práci [13]. Daň definujeme jako *„peněžní, povinné, nenávratné platby do veřejného rozpočtu, které se vybírají na základě mocenské povahy státu, tzn. na základě zákona. Daň je platba neúčelová, neekvivalentního charakteru, pravidelně se opakující, s přesně určenou výší sazby.“* [27, s. 65]

Uvažujme, že stát aplikuje tři druhy zdanění spotřebitele: daň ze mzdy, daň z výnosu z finančních aktiv a daň ze spotřeby. Uvažujme ve všech třech případech lineární sazbu daně, tj. výše zaplacené daně roste proporcionálně s výší daňového základu. Základem daně v případě daně ze mzdy budeme uvažovat mzdu na jednotku efektivní práce násobenou množství odpracovaného času, v případě spotřební daně je základem daně množství spotřebovaného zboží a pro daň z úrokových příjmů výše vyplacených úroků z vlastnictví finančních aktiv.

V případě lineární sazby daně rovněž platí, že mezní míra zdanění (tj. zvýšení zdanění při dodatečném zvýšení základu daně o jednotku) se rovná průměrné míře zdanění (tj. výše daně dělená výší daňového základu).

Hodnota finančních aktiv

Věk odchodu do důchodu budeme považovat za exogenní a pevně daný. Změna odchodu do důchodu je totiž poměrně často diskutovaným nástrojem vládní politiky pro udržitelnost důchodového systému. Změnou pevně daného věku odchodu do důchodu je pak možné simulovat vliv tohoto nástroje na vývoj ekonomiky. Označme si obecně rok smrti spotřebitele jako i_d a rok odchodu do starobní penze jako i_p. V modelu předpokládáme $i_d \in \mathbf{N}$, $i_p \in \mathbf{N}$ a $i_d > i_p$. V platnosti stále zůstává předpoklad, že spotřebitel začíná svůj život s nulovou hodnotou vlastněných aktiv a veškeré své úspory spotřebuje během svého života. O relativním podílu volného času na disponibilním času platí $l_i = 1$ pro $i = i_p, i_p + 1, \ldots, i_d - 1$.

Nejprve je potřeba si redefinovat vztah pro množství finančních aktiv vlastněných spotřebitelem a_i, který jsme si definovali ve vztahu (3.1.5). Označme si sazbu daně ze mzdy v i-tém roce života spotřebitele jako $\tau_{i,w}$, sazbu daně z příjmu z finančních aktiv $\tau_{i,a}$ a sazbu spotřební daně jako $\tau_{i,c}$. Uvažujme nejprve změnu hodnoty finančních aktiv v průběhu produktivního věku spotřebitele, kdy nabízí svoji práci na trhu práce a za to dostává mzdu.

Případ spotřebitele v produktivním věku Nyní můžeme vyjádřit hodnotu finančních aktiv spotřebitele v i-tém roce jeho života jako

$$a_i = (1-\tau_{i,w})e_i \cdot w_i \cdot (1-l_i) + [1 + r_i \cdot (1 - \tau_{a,w})] \cdot a_{i-1} - (1-\tau_{i,w})c_i \quad i = 1, 2, \dots, i_p - 1 \quad . \tag{3.2.1}$$

Jedinec nepobírá žádný transfer od státu. Protože trh práce je dokonale efektivní, neexistuje nedobrovolná zaměstnanost a stát tak nevyplácí žádnou náhradu za neodpracovaný čas v průběhu roku.

Případ spotřebitele v post-produktivním věku Nyní uvažujme situaci spotřebitele v post-produktivním věku. Spotřebitel dostává v i-tém roce života od státu penzi ve výši b_i. Tato penze není daněna, zdanění samozřejmě ale podléhají spotřební výdaje realizované z této mzdy. Současně již nemůže nabízet svoji práci na trhu práce, tj. neuvažujeme žádný příjem ze mzdy. Poslední dva členy rovnice (3.2.1) tedy zůstávají beze změny. Vývoj hodnoty finančních aktiv spotřebitele je tedy dán vztahem

$$a_i = b_i + [1 + r_i \cdot (1 - \tau_{a,w})] \cdot a_{i-1} - (1 - \tau_{i,w})c_i \quad i = i_p, i_p + 1, \dots, i_d \quad . \tag{3.2.2}$$

Stále platí podmínka nulové hodnoty aktiv v době úmrtí, tedy

$$a_1 = a_{i_d} = 0\,. \tag{3.2.3}$$

Užitková funkce

Užitková funkce spotřebitele není existencí státu ovlivněna. Obecná definice užitkové funkce pro velikost užitku v i-tém roce se nemění a je stále dána vztahem (3.1.1) (str. 29). Časové preference spotřebitele lze považovat za *deep parametrs* (viz diskuse k Lucasově kritice na straně 15). U subjektů v deterministickém prostředí sice dojde vlivem existence vlády ke změně absolutní velikosti spotřeby a volného času v průběhu jejich života, můžeme ale předpokládat, že jejich tendence k relativní velikosti užitků v jednotivých letech se nemění. Subjekty zahrnují existenci vlády, zdanění a transferů do svých kalkulací a změní své chování, nemění se však jejich preference volného času před spotřebou a ochota „odložit“ současný užitek do budoucnosti [11].

Maximalizace užitku spotřebitele

Spotřebitel stále usiluje o maximalizaci současné hodnoty svého celoživotního užitku. Funkce pro celoživotní užitek je analogická původní funkci (3.1.2):

$$U = \frac{\sum_{i=1}^{i_d} (1+\rho)^{-(i-1)} u_i^{1-\frac{1}{\gamma}}}{1-\frac{1}{\gamma}} \tag{3.2.4}$$

Optimalizační úloha spotřebitele je analogická k předchozí úloze a lze ji opět řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů.

3.3 Dědictví a explicitní rodinná struktura

Rozšíření o dědictví a explicitní vyjádření rodinné struktury navrhli Auerbach, Kotlikoff, Hagemann a Nicoletti v roce 1989 v článku [3]. V této verzi modelu neuvažujeme existenci zdanění.
Tato subkapitola především ukazuje možnosti rozšiřování původního Auerbachova-Kotlikoffova modelu o nové prvky. Model perfektně demonstruje obvyklý postup při rozšiřování stávajících ekonomických modelů o nové prvky.

Životní cyklus spotřebitele

V této subkapitole budeme nadále používat pojem spotřebitel (viz poznámka pod čarou na straně 6), protože rozhodování o množství odpracovaného času a spotřebě provádí stále jedna osoba. Na rozdíl od předchozích částí však je jeho užitek závislý nejen na jeho spotřebě, ale i na spotřebě jeho potomků. Dále pro větší přehlednost využijeme číselně zadané roky života, ve kterých spotřebitel zažívá níže definované události.
Délka života všech subjektů činí 75 let. Subjekty v ekonomice opět rozdělíme na skupiny se stejným věkem. Osoby od prvního do dvacátého roku života označíme jako děti a osoby ve věku od 21 do 75 let jako dospělé jedince. Subjekt tedy dospívá a stává se plně

[11] V prostředí nejistoty by do rozhodování subjektů mohlo vstoupit riziko. Pokud by se subjekty například měly důvod obávat, že budoucí vlády zvýší podstatným způsobem zdanění, mohly by začít upřednostňovat současnou jistou spotřebu před budoucí nejistou spotřebou. V deterministickém modelu jsou však budoucí daňové sazby spotřebitelům v současnosti známy.

samostatným ve 21 letech. Samostatně rozhodující se subjekty jsou pouze subjekty ve věku od 21 do 75 let.
Subjekt se ve 21 letech současně stává rodičem a má vlastní děti. Počet dětí spotřebitele označíme jako M. Spotřebitel se stará o svoje děti od 21 do 40 let, protože poté, co spotřebitel dosáhne věku 40 let, jeho děti dospívají. V 75 letech subjekt umírá a zanechává svým dětem dědictví. Jeho potomek získává dědictví ve věku 55 let.

Definice užitku spotřebitele

Užitek spotřebitele je součtem následujících tří proměnných:

- užitku spotřebitele z vlastní spotřeby zboží v dospělém věku,
- užitku dětí spotřebitele ze spotřeby zboží a
- užitku z pozůstalosti spotřebitele, kterou zanechává svým potomkům.

Celoživotní užitek spotřebitele budeme opět označovat jako U. Dále si označme užitek spotřebitele v průběhu jeho života z vlastní spotřeby a z vlastního volného času jako V_p. Dále si označme užitek jednoho dítěte ze spotřeby jako V_{ch} a užitek rodiče z dědictví, které přenechal jednomu ze svých potomků jako B. Celkový užitek spotřebitele za celý jeho život je tedy dán vztahem

$$U = V_p + M \cdot V_{ch} + M \cdot B \quad . \tag{3.3.1}$$

Funkce užitku pro daný rok Uvažujme, že definice užitkové funkce pro užitek ze spotřeby a volného času v daném roce je dána stále funkcí (3.1.1) (str. 29). Využijeme tuto užitkovou funkci pro určení užitku dospělých jedinců i dětí. Členy V_p a V_{ch} vycházejí ze spotřeby a volného času v průběhu života spotřebitele. Součet prvních dvou členů z pravé části rovnice (3.3.1) můžeme tedy vyjádřit jako

$$V_p + M \cdot V_{ch} = \frac{\sum_{i=21}^{75} (1+\rho)^{-(j-21)} \cdot u_{j,p} + M \cdot \sum_{i=21}^{40} (1+\delta)^{-(j-21)} u_{i,ch}}{1 - \frac{1}{\gamma}} \tag{3.3.2}$$

Proměnná ρ opět označuje míru časové preference a γ je elasticita intertemporální substituce.

Určení velikosti dědictví V modelu je použita užitková funkce pro užitek rodiče z dědictví přenechaného svým potomkům. Nejprve si označme velikost dědictví odkázaného jednomu potomkovi jako b. Velikost odkázaného dědictví je závislá na parametru preference odkázaného dědictví ϑ. Užitek spotřebitele z dědictví odkázaného svému potomku je pak dána funkcí

$$B = \frac{\vartheta}{(1+\rho)^{54}} \cdot b^{1-\frac{1}{\gamma}} \quad . \tag{3.3.3}$$

Trajektorie spotřeby a volného času spotřebitele, která je daná maximalizací funkce (3.3.1), dokáže aproximovat mnohem více empirických průběhů funkcí spotřeby a užitku. Empirické odhady parametrů, především pak parametru ϑ, jsou ale mnohem komplikovanější a není pro ně k dispozici ani dostatek dat.

Rozpočtové omezení spotřebitele

V závěru subkapitoly ještě určíme rovnici rozpočtového omezení spotřebitele. Výdaje spotřebitele nyní zahrnují kromě výdajů na jeho vlastní spotřebu i výdaje na spotřebu jeho dětí. Příjmy spotřebitele pak tvoří příjmy z prodeje práce na trhu práce a dědictví, které on sám získal v 55 letech od jeho rodičů. Platí, že se hodnota celoživotních příjmů spotřebitele diskontovaná do 21. roku života spotřebitele musí rovnat diskontované hodnotě celoživotních výdajů spotřebitele a jeho odkazu potomkům.

$$\sum_{i=1}^{54} \prod_{s}^{i} \frac{w_i \cdot e_i \cdot (1-l_i) - c_i}{1+r_s} + M \sum_{i=1}^{20} \prod_{s=1}^{i} \frac{w_i \cdot e_i \cdot (1-l_i) - c_i}{1+r_s} = M \cdot b \prod_{s=1}^{54} \frac{1}{1+r_s} - b \prod_{s=1}^{34} \frac{1}{1+r_s} \tag{3.3.4}$$

3.4 Výrobci

V této části budeme analyzovat chování firem. Reprezentativní firma používá jako výrobní faktory práci a kapitál. Firma je opět producentem jednoho druhu spotřebního zboží a jednoho druhu kapitálového zboží, přičemž oba druhy zboží jsou dokonalými výrobními substituty. Protože modelujeme systém všeobecné rovnováhy, množství práce využité firmami je rovno množství práce, které nabízejí spotřebitelé v dané ekonomice. Množství zboží, které firmy prodají, je rovno množství zboží, které spotřebitelé v ekonomice nakoupí.

Množství kapitálu, který má firma v čase t k dispozici, označíme opět K_t. V Ramseyově i Diamondově modelu jsme uvažovali exogenní nabídku práce, tedy neexistoval rozdíl mezi množstvím dostupných pracovních sil a množstvím pracovních sil, které se skutečně zapojily do výroby. Jelikož ve výkladu Auerbachova-Kotlikoffova modelu uvažujeme endogenní nabídku práce (pro $\alpha > 0$), existuje v ekonomice určitá dobrovolná nezaměstnanost. Pro zachování konzistence s dřívějším značením si označme $L_{t,i}$ počet jedinců v ekonomice ve věku i v čase t. Množství pracovní síly, které je v daném roce skutečně zapojeno do výroby, pak označíme N_t.

Produkční funkce

Nyní si definujeme produkční funkci. Auerbach a Kotlikoff použili ve svém modelu produkční funkci s konstantní elasticitou substituce, tedy funkci stejného typu jako je užitková funkce (viz (3.1.1) na straně 29). Stejně jako v případě Ramseyova modelu uvažujeme konstantní výnosy z rozsahu (definovány vztahem (1.2.23) na straně 10). Produkční funkce je dána výrazem

$$Y_t = A \cdot \left[\epsilon \cdot K_t^{1-\frac{1}{\theta}} + (1-\epsilon) \cdot N_t^{1-\frac{1}{\theta}}\right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\theta}}} \quad . \tag{3.4.1}$$

Parametr ϵ je mírou intenzity využití kapitálu ve výrobě a platí $\epsilon \in \langle 0, 1 \rangle$. Parametr θ je mírou elasticity substituce ve výrobě a určuje změnu poměru $\frac{K_t}{L_t}$ při změně poměru cen výrobních faktorů $\frac{w}{r}$. Člen A je úrovňová konstanta, která udává produktivitu obou faktorů současně. Parametr A může být v čase konstantní nebo může označovat technologický pokrok, jako jsme to viděli v Ramseyově i Diamondově modelu.

Mezní produktivita výrobních faktorů Na základě produkční funkce (3.4.1) můžeme určit mezní produktivitu výrobních faktorů. Mezní produktivita výrobního faktoru je zvýšení objemu produkce při zapojení dodatečné jednotky výrobního faktoru (a konstantnímu množství ostatních faktorů) a lze ji určit jako parciální derivaci produkční funkce podle množství daného výrobního faktoru. Mezní produktivita práce je tedy

$$MP_{L_t} = \frac{\partial Y_t}{\partial N_t} = A\left[\epsilon \cdot K_t^{1-\frac{1}{\theta}} + (1-\epsilon) \cdot N_t^{1-\frac{1}{\theta}}\right]^{\frac{1}{\theta-1}} \cdot (1-\epsilon) \cdot N_t^{-\frac{1}{\theta}} \tag{3.4.2}$$

a mezní produktivita kapitálu

$$MP_{K_t} = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = A\left[\epsilon \cdot K_t^{1-\frac{1}{\theta}} + (1-\epsilon) \cdot N_t^{1-\frac{1}{\theta}}\right]^{\frac{1}{\theta-1}} \cdot \epsilon \cdot K_t^{-\frac{1}{\theta}} \tag{3.4.3}$$

Rovnovážná cena práce

Uvažujeme, že množství práce ve výrobě lze měnit bez dodatečných nákladů. Vzhledem k předpokladu dokonale konkurenčního trhu práce je rovnovážná mzda rovná mezní produktivitě práce. Pak při rovnováze na trhu práce musí platit rovnost

$$w_t = (1-\epsilon) \cdot A \cdot \left[\epsilon \cdot K_t^{1-\frac{1}{\theta}} + (1-\epsilon) \cdot N_t^{1-\frac{1}{\theta}}\right]^{\frac{1}{\theta-1}} \cdot L_t^{-\frac{1}{\theta}} \quad . \tag{3.4.4}$$

Rovnovážná cena kapitálu

V případě kapitálu lze uvažovat dvě alternativy:

- Množství kapitálu ve výrobě je možné měnit bez dodatečných nákladů.
- Změna množství kapitálu ve výrobě způsobuje dodatečné náklady.

Popíšeme si nyní oba tyto možné případy.

Změna množství kapitálu bez dodatečných nákladů V tomto případě firma mění množství kapitálu ve výrobě stejným způsobem jako mění množství práce. Firma dokupuje (nebo prodává) kapitál do té doby, dokud marginální výnos z kapitálu není roven ceně kapitálu. Protože trh kapitálu je opět dokonale konkurenční, je cena kapitálu rovná úrokové míře, tj. platí vztah:

$$r_t = \epsilon \cdot A \cdot \left[\epsilon \cdot K_t^{1-\frac{1}{\rho}} + (1-\epsilon) \cdot N_t^{1-\frac{1}{\rho}}\right]^{\frac{1}{\rho-1}} \cdot K_t^{-\frac{1}{\rho}} \quad . \tag{3.4.5}$$

Dodatečné náklady při změně množství kapitálu Podle tvrzení řady autorů je změna množství kapitálu firem spojena s dodatečnými náklady. S pořízením nového kapitálového vybavení jsou totiž spojeny náklady na jeho instalaci, uvedení do provozu, zaškolení pracovníků atd. Samotná změna velikosti firmy pak přináší administrativní a provozní náklady. Tyto náklady jsou tím vyšší, čím je vyšší množství nakupovaného kapitálu. Funkce ceny dodatečně instalovaného kapitálu by tedy měla být konvexní. Tento předpoklad je v souladu s teorií řízení firmy, která předpokládá dlouhodobé plánování a snížení nákladu na investiční projekty jejich rozložením do delšího časového období. [28] Rovněž bude změna množství kapitálu firmy ve výrobě reprezentativní firmy relativně menší než v případě změny množství práce, protože firma bude optimalizovat celkové náklady na změnu množství kapitálu ve výrobě. Dále by náklady na změnu množství kapitálu ve výrobě měly být kladné v případě zvyšování i snižování množství kapitálu ve výrobě, protože prodej kapitálu je rovněž svázán s dodatečnými náklady.
Je zřejmé, že vzhledem k těmto předpokladům nebude tržní cena kapitálu dána vztahem (3.4.5). Auerbach a Kotlikoff ve svém modelu aplikují funkci dodatečných nákladů definovanou Hayashim a Summersem. Označme si změnu množství kapitálu firmy jako

I_t a funkci celkových nákladů firmy jako $C(I_t)$. Celkovou cenu investic firmy vyjádříme vztahem

$$C(I_t) = I_t + \frac{z \cdot I_t^2}{2 \cdot K_t} \quad , \tag{3.4.6}$$

kde z je parametr definující velikost dodatečných nákladů na investici.

Změna množství kapitálu Firma začíná s počáteční hodnotou kapitálu K_0. Množství kapitálu firmy se mění v čase. Zvyšuje se díky investicím firmy I_t a snižuje vlivem opotřebení nebo zastarání dříve pořízeného kapitálu. V každém čase t se hodnota kapitálu firmy sníží o parametr opotřebení kapitálu δ, absolutní hodnota snížení kapitálu firmy v čase t je $\delta \cdot K_t$. Množství kapitálu v čase $t+1$ můžeme vyjádřit vztahem

$$K_{t+1} = (1-\delta) \cdot K_t + I_t \quad . \tag{3.4.7}$$

Maximalizace zisku firmy

Nejprve si vyjádříme funkci zisku firmy. Zatímco spotřebitel maximalizoval svůj užitek v horizontu omezeném délkou jeho života, u firmy budeme předpokládat, že firma maximalizuje svůj zisk v nekonečném časovém horizontu. Chování firmy v Auerbachově-Kotlikoffově modelu je tedy bližší Ramseyově modelu. Modely se však liší existencí nákladů na přizpůsobení.

Funkce zisku firmy Označme si zisk firmy v čase t jako π_t. Zisk v čase t je rozdílem mezi množstvím vyrobeného zboží Y_t a náklady na práci nakoupenou v čase t a celkovou cenou investic v čase t. Zisk firmy je formálně zapsán jako

$$\pi_t = Y_t - w_t \cdot N_t - \left(I_t + \frac{z}{2} \cdot \frac{I_t^2}{K_t} \right) \tag{3.4.8}$$

Optimalizační úloha firmy Firma maximalizuje současnou hodnotu zisku v nekonečném časovém horizontu. Na rozdíl od užitku spotřebitele, který byl diskontován individuálním diskontním faktorem, je zisk firmy v čase t diskontován úrokovou mírou r_t.

Firma maximalizuje svůj zisk volbou množství nakupované práce N_t a množství vlastněného kapitálu K_t $(t = 1, 2, \ldots)$. Omezující podmínka je dána rovnici (3.4.7), protože množství kapitálu K_{t+1} je přesně omezeno velikostí investic I_t a množstvím kapitálu v předchozím čase K_t. Firma tedy maximalizuje funkci

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{Y_t - w_t \cdot N_t - \left(I_t + \frac{b}{2} \cdot \frac{I_t^2}{K_t}\right)}{\prod_{i=2}^{t} 1 + r_i} \tag{3.4.9}$$

za podmínky

$$K_{t+1} = (1-\delta) \cdot K_t + I_t \quad . \tag{3.4.10}$$

Protože pro každé t maximalizujeme zisk volbou dvou proměnných, K_t a N_t, jedná se o dynamickou verzi jednostupňové neoklasické optimalizační úlohy. [37]

Řešení optimalizačního problému Optimalizační problém firmy lze opět řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova rovnice má tvar

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{\infty} \prod_{i=2}^{t} \frac{1}{1+r_i} \left[A \cdot \left[\epsilon \cdot K_t^{1-\frac{1}{\theta}} + (1-\epsilon) \cdot N_t^{1-\frac{1}{\theta}} \right]^{\frac{1}{1-\frac{1}{\theta}}} - w_t \cdot N_t - \left(I_t + \frac{z}{2} \cdot \frac{I_t^2}{K_t} \right) \right] \\ - \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t \cdot \prod_{i=2}^{t} \frac{1}{1+r_i} \left[K_{t+1} - (1-\delta) \cdot K_t - I_t \right] \tag{3.4.11}$$

Nejprve určíme parciální derivaci Lagrangeovy rovnice podle N_t a položíme ji rovnu 0:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{N_t} = \frac{\partial Y_t}{N_t} - w_t = 0 \quad . \tag{3.4.12}$$

Marginální produkt práce $\frac{\partial \mathcal{L}}{N_t}$ (vyjádřený vztahem (3.4.2) na straně 38) tedy musí být při optimálním zisku firmy roven mzdě w_t.
Dále určíme parciální derivaci Lagrangeovy rovnice podle I_t

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_t} = -1 - \frac{b \cdot I_t}{K_t} + \lambda_t = 0 \,, \tag{3.4.13}$$

a podle K_{t+1}

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}} = MP_{K_{t+1}} + \frac{b}{2} \cdot \frac{I_{t+1}^2}{K_{t+1}^2} - (1 + r_{t+1}) \cdot \lambda_t + (\delta - 1) \cdot \lambda_{t+1} = 0 \,. \tag{3.4.14}$$

Podmínky maximalizace zisku Z rovnice (3.4.12) plyne, že firma maximalizuje zisk, pokud je mezní produktivita práce MP_{N_t} rovná mzdě w_t. Z rovnic (3.4.13) a (3.4.14) pak lze odvodit vztah pro velikost úrokové míry v závislosti na mezní produktivitě kapitálu a parametrech modelu jako

$$r_t = \frac{MP_{K_t} + \frac{z}{2} \cdot \frac{I_t^2}{K_t^2} + (1 + \frac{z \cdot I_t}{K_t} \cdot (1-\delta) - (1 + \frac{z \cdot I_{t-1}}{K_{t-1}}}{1 + \frac{z \cdot I_t}{K_t}} \,. \tag{3.4.15}$$

Problematika daně ze zisku firmy

Firma rovněž odvádí ze svého zisku daň. V rámci české legislativy je tato daň označována jako daň z příjmu právnických osob. [27] Daň ze zisku zasahuje do rozhodování firmy, do modelu ji ovšem lze jednoduše zapracovat. Uvažujme, že sazba daně je dána $\tau_{t,\pi}$. Auerbach a Kotlikoff navrhli změnu úrovňové konstanty A tak, aby reflektovala daň z příjmu. Označme si původní hodnotu úrovňové konstanty (která neuvažuje daň ze zisku firmy) jako $\hat{A}$. Pak lze do modelu zapracovat sazbu daně ze zisku úpravou úrovňové konstanty dle vztahu

$$A_t = \hat{A}_t \cdot (1 - \tau_{t,\pi}) \, . \tag{3.4.16}$$

3.5 Vláda

Posledním sektorem ekonomiky, který budeme analyzovat, je vláda. Vláda získává prostředky zdaněním ekonomických subjektů.

Rozpočtové omezení vlády

Vlády světových zemí ve většině případů hospodaří s nevyrovnaným rozpočtem, tj. příjmy vlády se nerovnají výdajům. V řadě zemí pak veřejné výdaje převyšují příjmy z daní. Vláda si musí na část svých výdajů půjčit. Zadlužení z aktuálního roku se pak přenáší do dalších let a je samozřejmě úročeno. Označme si deficit vládního rozpočtu v čase t jako D_t. Deficit rozpočtu v čase $t + 1$ má velikost

$$D_{t+1} = G_t + (1 + r_t) \cdot D_t - T_t \quad . \tag{3.5.1}$$

Jednoduchou úpravou rovnice vyjádříme, že příjmy vlády se musejí rovnat výdajům vlády, deficitu navýšeného o úroky a deficitu vlády v příštím období:

$$T_t = G_t + (1 + r_t) \cdot D_t - D_{t+1} \quad . \tag{3.5.2}$$

Tato rovnice pak musí platit nejen pro jedno období t, ale i pro $N \in \mathbf{N}$ období. Rozpočtové omezení vlády je pak dáno vztahem

$$\sum_{t=1}^{N} \frac{T_t}{\prod_{i=1}^{t}(1 + r_i)} = \sum_{t=1}^{N} \frac{G_t}{\prod_{i=1}^{t}(1 + r_i)} + D_1 - \frac{D_{N+1}}{\prod_{i=1}^{t}(1 + r_i)} \quad . \tag{3.5.3}$$

Proměnná D_N označuje hodnotu vládního dluhu za N období. Budeme předpokládat, že není možné, aby se vláda zadlužovala donekonečna, tj. musí platit

$$\lim_{N \to \infty} D_{N+1} = 0 \quad . \tag{3.5.4}$$

Pro $N \to \infty$ bude tedy mít rozpočtové omezení tvar

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{T_t}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_i)} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{G_t}{\prod_{i=1}^{t}(1+r_i)} + D_1 \quad . \tag{3.5.5}$$

3.6 Podmínky tržní rovnováhy

Protože se jedná o model všeobecné rovnováhy, je nutné určit podmínky rovnováhy v modelu. Rovnováha na trhu práce znamená rovnost nabízeného a poptávaného množství práce ve výrobě. Množství nabízené práce nezávisí pouze na preferencích jednoho spotřebitele, ale i na počtu spotřebitelů. Navíc je nutné uvažovat věkovou strukturu spotřebitelů, protože individuální nabízené množství práce se liší pro spotřebitele v různém věku. Uvažujme tedy proměnnou $L_{i,t}$, která určuje počet jedinců v ekonomice, kteří jsou v čase t ve věku i (pro $i = 1, 2, \ldots i_d$). Jednotlivé hodnoty $L_{i,t}$ pak tvoří vektor $\mathbf{L_t} = (L_{1,t}, L_{2,t}, L_{i_d,t})$. Rovnováhu na trzích práce pak můžeme vyjádřit vztahem

$$N_t = \sum_{i=1}^{i_p} L_{i,t} \cdot n_i \,. \tag{3.6.1}$$

Agregátní výše soukromého bohatství v čase t, kterou si označíme jako Γ_t je součtem aktiv vlastněných spotřebiteli, přičemž analogicky využijeme výše definované proměnné $L_{i,t}$:

$$\Gamma_t = \sum_{i=1}^{i_d} L_{i,t} \cdot a_i \,. \tag{3.6.2}$$

Otevřená a uzavřená ekonomika

V uzavřené ekonomice jsou držiteli veškerého bohatství spotřebitelé. Z bohatství spotřebitelů jsou pak financovány investice výrobců a vládní deficity. V otevřené ekonomice dochází k přílivu nebo odlivu kapitálu mezi domácí ekonomikou a zahraničním. Investiční pozice země je obecně závislá na výnosnosti investic v domácí ekonomice ve srovnání se zahraničními[12], rizikovostí investic, institucionálními faktory apod. V případě malé otevřené ekonomiky se pak v ekonomických modelech běžně pracuje s předpokladem, že země je pouze příjemcem výše úrokové míry, která je determinována na světovém trhu.

[12] V literatuře se často používá pojem diferenciál úrokových měr nebo úrokový diferenciál.

Popis analyzovaného případu V našem případě budeme uvažovat, že Česká republika je příjemcem úrokové míry, která je determinována na světovém trhu. Domácí firmy tedy mohou dokupovat kapitál na domácím i světovém trhu a v poptávce po kapitálu nejsou limitovány úsporami domácích spotřebitelů. Na druhou stranu je rovněž možné, že spotřebitelé mohou investovat své úspory do zahraniční a získávat za ně konstantní úrok, i když jejich nabídka úspor pro danou úrokovou míru převyšuje poptávku po úsporách domácích firem. Obecně tedy povolujeme přesuny kapitálu mezi domácí ekonomikou a zahraničím. Tento přístup může způsobit nevyrovnaný finanční účet platební bilance dané země. Obecně se však u OLG modelů ukazuje špatná schopnost analyzovat a predikovat salda běžného či finančního účtu platební bilance, protože jsou z velké části způsobovány i krátkodobými ekonomickými jevy. [13] Navíc může být deficit finančního účtu platební bilance kompenzován přebytkem běžného účtu platební bilance (či naopak), analýza běžného účtu platební bilance je ale mimo rozsah OLG modelů. Proto od analýzy vlivu světové úrokové míry a domácí poptávky po kapitálu na deficit finančního účtu platební bilance abstrahujeme.

Vývoj demografické struktury

Koncept steady-state je pro Auerbachův-Kotlikoffův model relativně komplikovanější než pro Ramseyův a Diamondův model. Důvodem je, že neuvažujeme konstantní tempo růstu populace, ale využíváme predikci věkové struktury obyvatelstva. Po dosažení steady-state v něm tedy ekonomika nezůstává „věčně“, ale pod vlivem dalších demografických změn se přesune do dalšího steady-state. Demografické změny totiž přímo ovlivňují cenu práce a přeneseně se mohou projevit i v dalších proměnných. Příkladem přenosu do dalších proměnných je změna výše daňových sazeb, která je reakcí vlády na změnu v daňových výnosech.

Výpočet steady-state je však velice užitečný v tom, že ukazuje udržitelnost penzijního systému pro jeho dané parametry, především výši penzí a daňových sazeb, a pro určitou demografickou strukturu. Dále je v simulacích často analyzována změna steady-state v reakci na změnu parametrů systému. Modely s deep parameters totiž dávají lepší přehled o tom, jaká je účinnost konkrétní vládní politiky na celý systém. Vypočtený steady-state totiž zahrnuje informaci, jak budou na změnu hospodářské politiky reagovat spotřebitelé, a jak změna chování spotřebitelů ovlivní celý systém.

4 Praktická aplikace Auerbachova-Kotlikoffova modelu

V této kapitole využijeme Auerbachův-Kotlikoffův model prakticky. Určíme steady-state na základě hodnot parametrů, které vycházejí ze statistických dat České republiky.

4.1 Výpočet steady-state

Existuje několik algoritmů, pomocí kterých lze provést výpočet steady-state.

Heerův-Maußnerův algoritmus

Heer a Maußner navrhují v knize [19] pro řešení problému následující algoritmus:

1. Urči odhady počátečních hodnot kapitálové zásoby a zaměstnanosti ve steady-state.
2. Vypočítej rovnovážnou úrokovou míru r a mzdu w.
3. Urči optimální trajektorii spotřeby, úspor a relativního množství odpracovaného času pomocí zpětné indukce.
4. Na základě této optimální trajektorie přepočítej agregátní velikost kapitálu ve výrobě a zaměstnanost. Pokud není absolutní hodnota rozdílu pod zadanou tolerancí, jdi do kroku 2. Pokud ano, pak KONEC.

Algoritmus je založený na numerickém řešení soustavy diferenčních rovnic, kde se na základě hodnot c_{i+1}, l_{i+1} a a_{i+1} určují hodnoty c_i, l_i a a_i, přičemž je požadováno, aby numerická aproximace splňovala podmínku nulové hodnoty vlastněných aktiv na začátku i na konci aktivního života spotřebitele, tj.

$$a_1 = a_{i_d} = 0\,. \tag{4.1.1}$$

Algoritmus je založený na principu zpětné indukce, tj. postupujeme v řešení soustavy rovnic od konce života spotřebitele na jeho začátek. Určitou nevýhodou algoritmu je nutnost exogenně zadaného odhadu množství aktiv spotřebitele v posledním roce jeho života, protože tuto hodnotu nelze ze soustavy vyřešit. Dále se během simulací ukázalo, že výpočetní algoritmus je silně závislý na počátečních hodnotách agregátních veličin a při špatně zadaných počátečních hodnotách nemusejí ceny výrobních faktorů konvergovat k rovnovážné ceně.

Algoritmus založený na numerické optimalizaci

Další možností řešení modelu je algoritmus založený na numerické optimalizaci diskontovaného užitku v prostředí aplikace Matlab[13]. Velikost diskontované hodnoty užitku spotřebitele je závislá na trajektorii velikosti spotřeby, množství volného času a množství vlastněných finančních aktiv. Protože spotřebitel rozkládá veškerý svůj příjem na spotřebu a nákup finančních aktiv[14], lze jeho chování zcela popsat pouze dvěma z těchto tří trajektorií.
Maximalizace užitku spotřebitele spočívá v nalezení optimálních trajektorií, které maximalizují hodnotu užitkové funkce (3.2.4) (str. 35) při splnění podmínky (4.1.1) a podmínek hodnoty aktiv determinovaných spotřebou a volným časem (3.2.1) a (3.2.2) (str. 34).
Pro zjednodušení definice funkce můžeme tyto podmínky sloučit pomocí proměnné e_i, která určuje individuální produktivitu spotřebitele ve věku i let (poprvé jsme ji použili ve vztahu (3.1.3) na straně 30). Pro zjednodušení kalibrace modelu budeme předpokládat, že individuální produktivita jedince se v průběhu produktivního věku nemění, v post-produktivním věku pak spotřebitel nemůže pracovat. Pak hodnoty proměnné e_i jsou $e_i = 1$ pro $i = 1, 2, \dots, i_p$ a $e_i = 0$ pro $i = i_p + 1, i_p + 2, \dots, i_d$.

Numerická optimalizace užitku K numerické optimalizaci celkového užitku lze v aplikaci Matlab použít optimalizační toolbox, který obsahuje funkce pro numerickou optimalizaci funkcí. V našem případě pak využijeme funkci `fmincon`, protože ta umožňuje optimalizovat funkce na omezeném definičním oboru. Definujme si vektor $\mathbf{l}$ jako vektor hodnot l_i pro $i = 1, 2, \dots, i_{i_d}$, tj. $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_{i_r}, 1, 1, \dots 1)^\intercal$, vektor $\mathbf{a}$ jako vektor hodnot a_i pro $i = 1, 2, \dots, i_{i_d}$, tj. $\mathbf{a} = (0, a_2, \dots, a_{i_d-1}, 0)^\intercal$ a vektor $\mathbf{c}$ jako vektor hodnot c_i pro $i = 1, 2, \dots, i_{i_d}$, tj. $\mathbf{a} = (c_1, c_2, \dots, c_{i_d-1}, c_{i_d})^\intercal$. Dále si pro přehlednější zápis definujeme pomocný vektor $\mathbf{n}$ jako $\mathbf{n} = (1 - l_1, 1 - l_2, \dots, 1 - l_{i_p}, 0, 0, \dots 0)^\intercal$. Funkce, kterou budeme v Matlabu optimalizovat, je funkcí vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{l}$. Jednotlivé složky vektoru $\mathbf{c}$ určíme jako

$$c_i = \frac{b_i + (1 - \tau_w) \cdot w \cdot e_i \cdot n_i + [1 + (1 - \tau_a)r] \cdot a_i - a_{i+1}}{1 + \tau_c}, \tag{4.1.2}$$

[13]Vzhledem k použití tohoto software je k popisu algoritmu použit vektorový zápis, který usnadní orientaci v kódu.

[14]Spotřebitel dále vynakládá část svých příjmů na platbu daní, ale velikost daňových odvodů je funkčně závislá na specifikovaných trajektoriích.

kde jsme využili výše popsanou proměnnou e_i. Proměnná b_i označuje velikost penze vyplácené osobě v i-tém věku, přičemž samozřejmě platí $b_i = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, i_p$. Vztah (4.1.2) tedy platí pro osoby v produktivním i post-produktivním věku.

Pro každý rok života spotřebitele určíme velikost jeho užitku z užitkové funkce (3.1.1) (str. 29). Tím získáme vektor užitků pro jednotlivé roky života spotřebitele $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{i_d})^\intercal$. Úloha maximalizace užitku spotřebitele pak spočívá v nalezení vektorů $\mathbf{l}$ a $\mathbf{a}$ takových, pro které je současná hodnota užitku spotřebitele maximální. Vektory $\mathbf{n}$ a $\mathbf{c}$ jsou dopočteny z vektorů $\mathbf{l}$ a $\mathbf{a}$.

Tento problém je pro zadanou funkci řešitelný pomocí funkce `fmincon`, přičemž omezující podmínky jsou dány jako $a_i \in \langle 0, \infty)$ pro $i = 1, 2, \ldots, i_d$ a $l_i \in \langle 0, 1\rangle$ pro $i = 1, 2, \ldots, i_r$. Danou funkcí jsou pak získány aproximace vektorů $\mathbf{l}$ a $\mathbf{a}$, které maximalizují užitek spotřebitele pro dané hodnoty w a r.

Nyní na základě vektorů $\mathbf{l}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{n}$ a $\mathbf{a}$ určíme agregátní množství finančních aktiv vlastněných domácími spotřebiteli jako

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{i_d} L_i \cdot n_i \,, \tag{4.1.3}$$

agregátní nabízené množství práce jako

$$N = \sum_{i=1}^{i_d} L_i \cdot a_i \,, \tag{4.1.4}$$

celkové výdaje vlády na starobní penze jako

$$E = \sum_{i=1}^{i_d} L_i \cdot b_i \,, \tag{4.1.5}$$

agregátní realizovanou poptávku po spotřebním zboží jako

$$C = \sum_{i=1}^{i_d} L_i \cdot c_i \tag{4.1.6}$$

a celkové příjmy vlády ze zdanění spotřeby, mezd a úroků jako

$$R = \tau_w \cdot w \cdot N + \tau_c \cdot wC + \tau_a \cdot r \cdot \Gamma \,. \tag{4.1.7}$$

Z vládních příjmů a výdajů můžeme určit velikost deficitu státního rozpočtu jako

$$D = R - E \,. \tag{4.1.8}$$

Dále je potřeba určit množství kapitálu, který budou domácí firmy poptávat za fixní úrokovou míru r a mzdovou sazbu v domácí ekonomice w. Pro určení mzdové sazby můžeme využít vztah převzatý z [13]:

$$w = A\left[\epsilon \cdot K^{1-\frac{1}{\theta}} + (1-\epsilon)N^{1-\frac{1}{\theta}}\right]^{\frac{1}{\theta-1}} \cdot (1-\epsilon) \cdot N^{-\frac{1}{\theta}} \,. \tag{4.1.9}$$

Realizovanou poptávku po kapitálu domácích firem určíme opět numericky pomocí optimalizačního toolboxu aplikace Matlab. Vyjdeme z rovnice pro rovnovážnou úrokovou míru, která byla převzatá z [13]:

$$r = \frac{A\left[\epsilon \cdot K^{1-\frac{1}{\theta}} + (1-\epsilon)N^{1-\frac{1}{\theta}}\right]^{\frac{1}{\theta-1}} \cdot \epsilon \cdot K^{-\frac{1}{\theta}} - \frac{b}{2\cdot\delta^2} - \delta}{1 + b\cdot\delta} \,. \tag{4.1.10}$$

Funkci přepíšeme do implicitního tvaru a za r dosadíme úrokovou míru na světovém trhu. Poté pomocí funkce `fzero` určíme hodnotu K takovou, pro kterou bude přibližně platit

$$0 \cong \frac{A\left[\epsilon \cdot K^{1-\frac{1}{\theta}} + (1-\epsilon)N^{1-\frac{1}{\theta}}\right]^{\frac{1}{\theta-1}} \cdot \epsilon \cdot K^{-\frac{1}{\theta}} - \frac{b}{2\cdot\delta^2} - \delta}{1 + b\cdot\delta} - r \,. \tag{4.1.11}$$

Tento postup pro zajištění konvergence několikrát opakujeme. Počet opakování algoritmu lze volit pevně nebo na základě procentní změny mezi starou a novou hodnotou w a K. Pro usnadnění numerického výpočtu jsou numerické aproximace optimálních vektorů $\mathbf{l}$ a $\mathbf{a}$ použity jako výchozí hodnoty pro funkci `fmincon` v další iteraci.

4.2 Kalibrace modelu

V této části shrneme dosavadní postup v kalibraci parametrů modelu a aplikujeme vhodné hodnoty parametrů pro provedení simulace. V literatuře [34], [4] a [13] lze najít odhady deep parameters pro Auerbachův-Kotlikoffův model pro Českou republiku. Budeme čerpat z článku [4], protože tyto odhady jsou nejvíce aktuální. Hodnoty parametrů jsou: $\gamma = 0{,}8$, $\beta = 0{,}7$, $\rho = 0{,}01$, $\alpha = 1{,}54$, $\theta = 1{,}10$, $i_p = 40$ a $i_d = 60$. Odhady parametru δ pro Českou republiku nejsou k dispozici, musíme tedy použít odhady pro jiné ekonomiky rozvinutého světa. Takový odhad parametru lze nalézt v článku [25] a na jeho základě volíme $\delta = 0,14$. Dále musíme určit hodnotu úrovňové konstanty A. Vyjdeme z průměrného tempa růstu produktivity práce v České republice od roku 2001 do roku 2011 ze zdroje a stanovíme $x = 2{,}5$. [26] Technologický pokrok zavedeme tedy stejným způsobem, jako v Ramseyově i Diamondově modelu. Konstantu A dále

upravíme tak, aby reflektovala sazbu daně z příjmu pro právnické osoby, která je 19 %. Další úpravy úrovňové konstanty provádět nebudeme, abychom v modelu zachovali současnou cenovou hladinu.
Praktická aplikace bude spočítat ve výpočtu steady-state pro nejvzdálenější časový horizont, pro který existuje predikce demografické struktury, tj. pro rok 2065. [10] Ve steady-state v takto vzdáleném časovém horizontu budeme analyzovat vyrovnanost státního rozpočtu a strukturu daňových příjmů – tedy objem daňových výnosů z daní ze spotřeby, daní ze mzdy a daní z výnosu z finančních aktiv.

Problematika státního rozpočtu

V námi prezentovaném modelu jsme uvažovali, že státní rozpočet je používán pouze pro výplatu starobních penzí. Namísto „státního rozpočtu“ bychom tedy spíše měli používat termín důchodový účet[15]. V analýze ale uvažujeme i vliv daňových sazeb na chování spotřebitele. Je zřejmé, že chování spotřebitelů ovlivňují veškeré daně, nikoli pouze odvody na důchodový účet. Platby starobních penzí patří mezi tzv. mandatorní výdaje a jejich vyplácení je pro stát povinné ze zákona. [27] Proto uvažujme, že přebytek státního rozpočtu po vyplacení starobních penzí jsou prostředky, které budou použity na další veřejné výdaje (především další mandatorní výdaje, případně vládní spotřebu atd.). Vyšší přebytky státního rozpočtu umožňují financovat rozsáhlejší vládní výdaje, naopak deficitní modelový vládní rozpočet znamená, že stát má při současných parametrech problémy s vyplácením starobních penzí a tím pádem i z financováním svých dalších výdajů. Taková situace je pak řešitelná pouze vládním deficitem. Veřejné zadlužování ve steady-state ale signalizuje závažný problém, protože pro danou demografickou strukturu a podmínky na světovém kapitálovém trhu není vládní politika „trvale“ udržitelná.
Stát má dále k dispozici výnosy z daně ze zisku firem, kterou jsme diskutovali na straně 42. Výnos z této daně explicitně v analýze uvažovat nebudeme. Uvažujeme však vliv daně ze zisku firem na cenu práce a množství kapitálu ve výrobě pomocí úpravy úrovňové konstanty A.

Problematika daní a pseudodaní Pro simulace je rovněž vhodné nalezení vhodného nastavení daňového systému. Daňový systém se v realitě neomezuje jen na stanovení sazeb daní, ale daňové zákony obsahují velkou řadu daňových výjimek, slev,

[15]V textu budeme dále používat pojem státní rozpočet, nicméně z tohoto důvodu není „státní rozpočet“ v tomto modelu ekvivalentem skutečného státního rozpočtu.

bonusů a dalších atributů, v jejichž důsledku je výše daňové zátěže spotřebitele odlišná od pevně dané sazby.
V případě daně z příjmu narážíme na problém sociálního a zdravotního pojištění, která (i přes své označení) jsou mnohem blíže daním (viz definice v subkapitole 3.2 na straně 33), především protože jsou závislá na mzdě spotřebitele a nikoli na běžných principech pojistné matematiky. Proto lze zdravotní a sociální pojištění označit jako „pseudodaň“, které ovlivňuje chování spotřebitelů obdobným způsobem jako daně.

Problematika veřejných výdajů Demografická struktura ovlivňuje vládní výdaje i mimo penzijní systém. Například výdaje na zdravotní a vzdělávací systém jsou závislé na počtu obyvatel v jednotlivých věkových skupinách. Bouzahzah, Croix a Docquier v článku [7] publikovali upravenou verzi Auerbachova-Kotlikoffova modelu se zahrnutím veřejných výdajů na jednotlivé věkové skupiny a provedli simulaci vývoje ekonomiky Spojených států amerických. V článku je také kromě reformy penzijního systému simulován vliv reformy vzdělávacího systému na veřejné rozpočty. V našich simulacích ale pro zjednodušení uvažujeme, kolik zbývá z daňových výnosů na další vládní výdaje po vyplacení starobních penzí.

Důchody osob starších než 80 let V simulaci uvažujeme deterministickou délku života, která je dána hodnotou parametru i_d. Dle prognózy demografické struktury ale budou v populaci žít osoby i ve vyšším věku. V simulovaném roce 2065 tato skupina obsahuje 1,6 milionu osob. Stát tedy bude muset ještě vyplácet penze těmto spotřebitelům. Vzhledem k tomuto počtu je potřeba jejich chování do simulace zahrnout. Budeme uvažovat, že tito spotřebitelé každý rok svého života spotřebují celý svůj důchod. Tito spotřebitelé tedy netvoří žádné nové úspory ani nemají žádné úspory z předchozího života. Spotřebitelé samozřejmě platí ze svých nákupů spotřebního zboží spotřební daň. Do simulace tedy zahrneme objem penze vyplacený těmto spotřebitelům i jejich platby spotřební daně. Vzhledem k tomu, že tito spotřebitelé nevytvářejí žádné úspory, nedochází k ovlivnění jiných agregátních veličin.

Výše důchodu

Jedním z nejdůležitějších nástrojů státní penzijní politiky je stanovení výše penzí. Výše starobní penze se v realitě odvíjí od konkrétní výše mzdy spotřebitele v průběhu jeho života. V případě reprezentativního spotřebitele lze výši penze b_i určit v závislosti na výši ceny práce w.

Protože neuvažujeme změnu produktivity práce spotřebitele v průběhu jeho života, je cena práce w stejná pro všechny jedince v produktivním věku. Určíme si tedy výši penzí na základě průměrné vyplacené mzdy.
Penzi nebudeme fixovat přímo na cenu práce w, ale na skutečně vyplácenou průměrnou mzdu. Rozdíl je v tom, že průměrně vyplácená mzda je závislá i na množství volného času spotřebitele. Cena práce w je cenou za jednu jednotku práce, tj. odpovídá situaci, kdy spotřebitel vložil veškerý svůj disponibilní čas do výroby a měl nulové množství volného času. Dále budeme uvažovat, že penze je vázána na mzdu spotřebitele po zdanění. Tím zvýšíme přehlednost výsledků simulace. Mzda je tedy vázána na průměrnou čistou mzdu.
Označme si průměrnou čistou mzdu jako $\bar{w}$. Průměrná čistá mzda je závislá na celkovém množství disponibilního času spotřebitelů a množstvím skutečně odpracovaného času a lze ji určit ze vztahu

$$\bar{w} = \frac{w \cdot (1 - \tau_w) \cdot N}{\sum_{i=1}^{i_d} e_i \cdot L_i} \tag{4.2.1}$$

Definujme si nyní parametr χ, který určuje poměr mezi cenou práce a výší starobní penze, tj.

$$b_i = \chi \cdot \bar{w}\,, \quad i = i_p, i_p + 1, \ldots\,. \tag{4.2.2}$$

Tento přístup je značným zjednodušením oproti skutečnému systému výpočtu penzí. Z hlediska našeho přístupu a modelování pomocí reprezentativního spotřebitele je důležitý především celkový objem mezd, který může tímto způsobem být aproximován.

4.3 Provedené simulace a interpretace výsledků

V této části budeme provádět simulace nakalibrovaného modelu a budeme věcně a kriticky interpretovat výsledky simulací, především v kontextu ekonomické teorie.

Sledované veličiny

Pro každou simulaci budeme sledovat následujících šest veličin:

1. množství finančních aktiv vlastněných reprezentativním spotřebitelem v průběhu jeho života,
2. množství spotřebovaného zboží reprezentativním spotřebitelem v průběhu jeho života,

3. rozdíl mezi příjmy a výdaji reprezentativního spotřebitele do vládního rozpočtu v průběhu jeho života,
4. relativní množství odpracovaného času reprezentativním spotřebitelem v průběhu jeho života,
5. podíl výdajů na penze na celkovém výběru z daní z příjmu, úroků a spotřeby,
6. absolutní objem vybraných prostředků z daně ze mzdy, daně ze spotřeby a daně z výnosů z finančních aktiv.

První čtyři hodnoty se tedy týkají individuálního chování spotřebitele, další dvě analyzují výsledné hospodaření státu na základě chování celé populace. Výsledky jednotlivých simulací jsou pak uspořádány jako podgrafy.

Analýza vlivu úrokové míry

Nejprve budeme analyzovat vliv úrokové míry na vývoj ekonomiky. Výsledky simulace na obrázku 4 jsou založeny na parametrech: $\tau_w = 0{,}31$, $\tau_a = 0{,}15$ a $\tau_c = 0{,}175$, $\chi = 0{,}5$, $i_p = 40$, $i_d = 60$, $\epsilon = 0,,5$, $\theta = 1{,}10$, $\delta = 0{,}14$, $b = 1$, $\gamma = 0{,}7$, $\beta = 0{,}8$. Úroková míra je zřejmě důležitým determinantem vývoje ekonomiky.

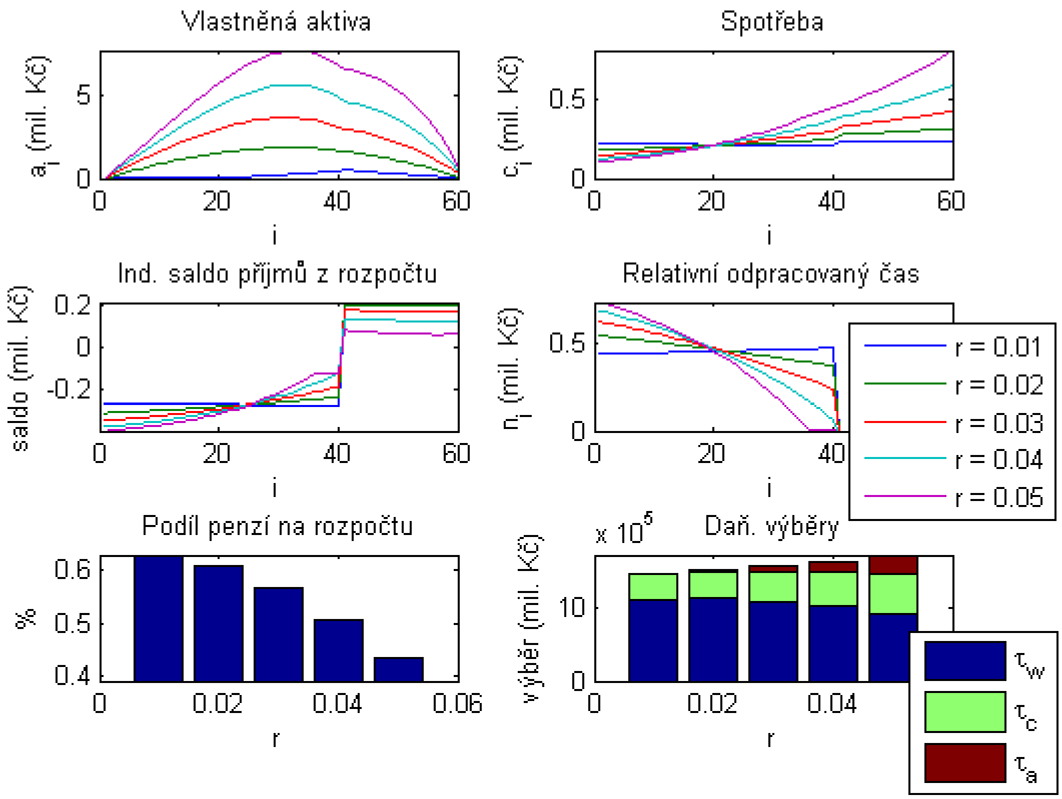
Z obrázku je patrné, že u úrokové míry převažuje mikroekonomický substituční efekt na důchodovým. Podle substitučního efektu při růstu úrokové míry zvyšují spotřebitelé své úspory, protože jsou lákáni vyššími výnosy z úroků. Důchodový efekt naopak znamená, že subjekty budou při růstu úrokové míry snižovat své úspory, protože k získání stejného absolutního úrokového výnosu postačuje menší objem úspor.

Při úrokové míře $r = 0,01$ spotřebitelé nevytvářejí téměř žádné úspory a jejich spotřeba ve stáří je závislá na penzích od státu. Tato závislost může být relativně nebezpečná. Protože subjekty nevytvářejí úspory, nedochází k průběhu života spotřebitele k výrazným změnám v poměru práce a volného času.

Na úrokové míře je závislá i bilance státního rozpočtu. Na obrázku 4 vidíme, že při vyšší úrokové míře roste objem spotřeby, což zvyšuje výnosy ze spotřební daně. Dále v důsledku růstu úspor roste i výnos z daně z úroku. Naopak výnos z daně z příjmu mírně klesá. Nižší úroková míra naopak snižuje úroky z případného rozpočtového deficitu, ke kterému by vládě v dané situaci zřejmě musela přistoupit.

Reálnou úrokovou míru na evropském trhu je pro českou vládu prakticky nemožné ovlivnit. Dlouhodobě nízká úroková míra dle dané simulace snižuje úspory spotřebitelů a tím pádem značně komplikuje dopady demografických změn na ekonomiku.

Obrázek 4: Steady-state pro různé úrokové míry



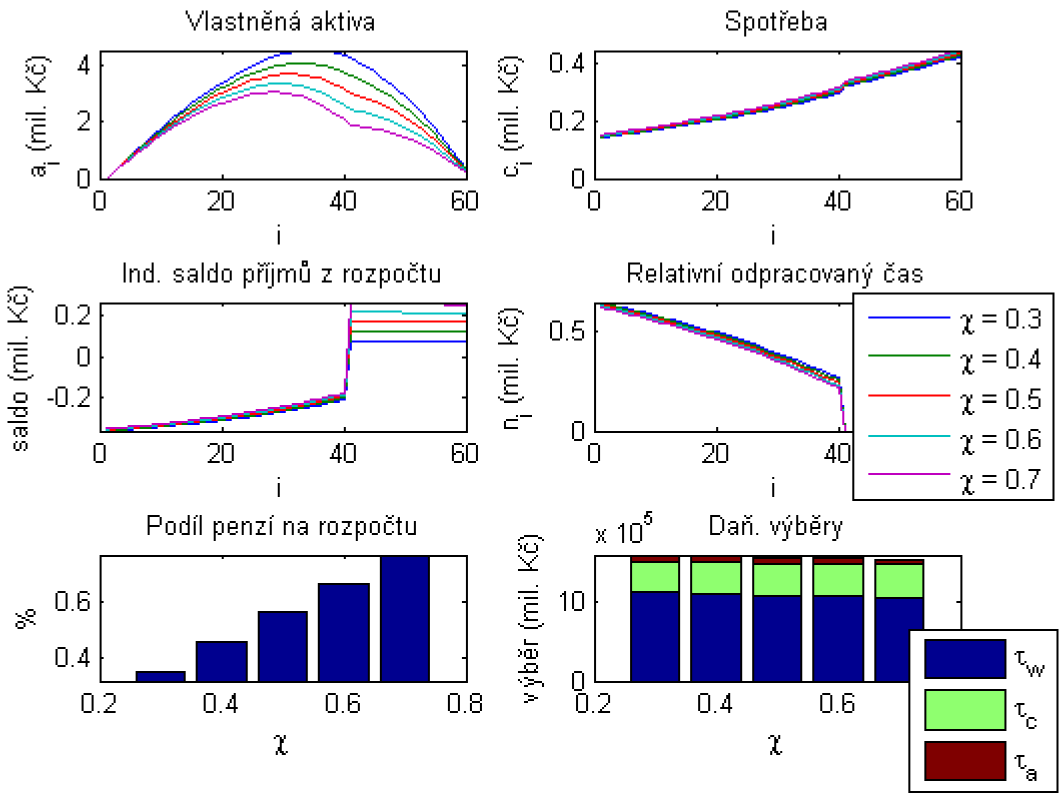
Analýza vlivu parametru χ

Zajímavé jsou závěry plynoucí z druhé simulace. Výsledky simulace jsou na obrázku 4. V simulaci provádíme změnu parametru χ a úrokovou míru stanovíme na $r = 0{,}03$, ostatní parametry oproti předcházející simulaci nemění. Z obrázku je patrné, že nejvýraznější rozdíly jsou v množství vlastněných aktiv. Při dané úrokové míře jsou subjekty „donuceny" k vyšším úsporám.

Účinků snížení penzí je několik. Asi nejvýznamnější je snížení životní úrovně spotřebitelů v post-produktivním věku, které je patrné z velikosti jejich spotřebních výdajů. Spotřebitelé při nižší hodnotě parametru χ více spoří, přičemž vyšších úspor dosahují spíše vyšší pracovní aktivitou než omezením spotřeby v produktivním věku. Dále vyšší vyplácené penze prohlubují rozpočtový deficit.

Jasný závěr této simulace je, že pro kompenzování demografických změn jsou důležitá především informovanost spotřebitelů o výši jejich budoucích penzí a možnostech úspor a tím pádem také stabilní právní a institucionální prostředí. Bohužel v realitě řada těchto předpokladů splněna není. Jedním z mnoha důvodů je, že výše vládních transferů

Obrázek 5: Steady-state pro různé hodnoty χ

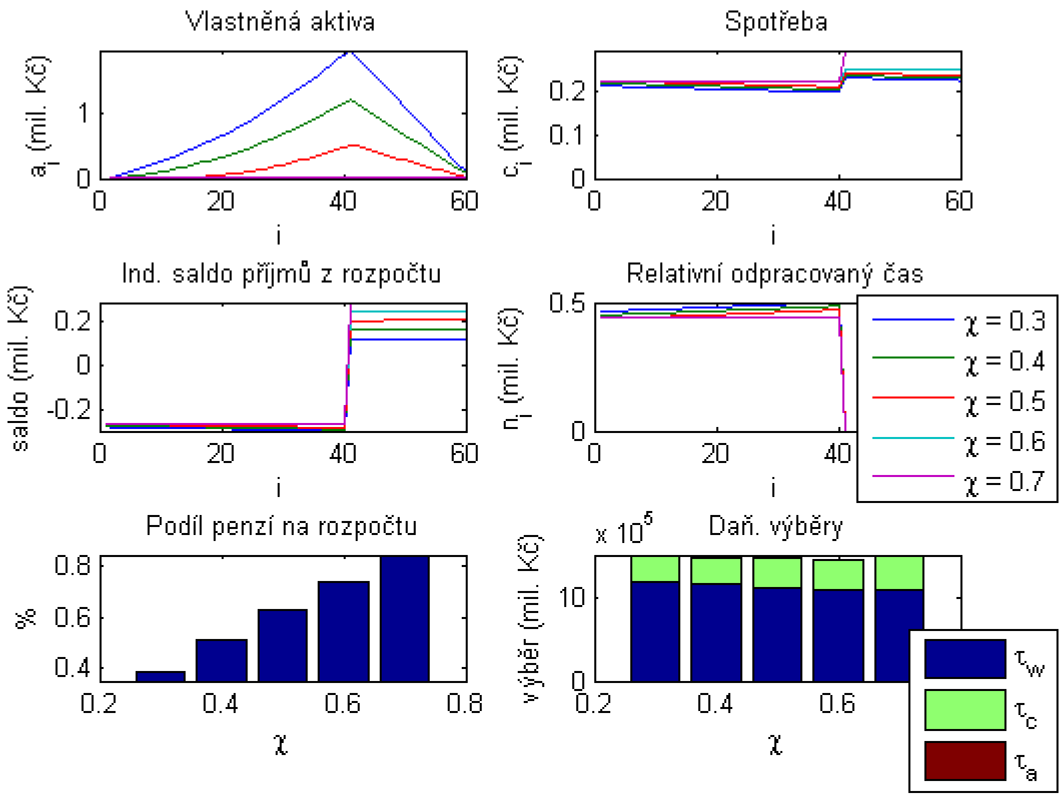


je relativně snadno použitelný nástroj pro získání voličské podpory. Dalším problémem je volatilita úrokových měr, které se mění v důsledku cyklického vývoje ekonomiky. To rovněž snižuje ochotu subjektů k úsporám.

Uvažujme nyní situaci, kdy je reálná úroková míra nižší, a to $r = 0,01$. Jak jsme viděli na grafu 4, při nízké úrokové míře roste závislost spotřebitelů na státem vyplácených penzích. Z grafu 6 je zřejmé, že při nízké úrokové míře nevytvářejí subjekty dostatečně velké úspory a tím pádem roste jejich závislost na státem vyplácených penzích. Politika nízkých úrokových sazeb, které jsou uměle udržovány centrálními bankami, tedy může vést k prohlubování problému deficitu veřejných rozpočtů, protože spotřebitelé při nízkých úrokových sazbách nevytvářejí dostatečně velké úspory a spoléhají na státní penze. Z dlouhodobého hlediska má tedy umělé snižování úrokových sazeb spíše negativní účinky na důchodový systém.

Oba grafy potvrzují závěry z Diamondova modelu, že důležitým determinantem pro vývoj penzijního systému je reálná úroková míra. Při nízké reálné úrokové míře je pro subjekty výhodnější nahradit soukromé úspory závislostí na státu. Naopak při vyšší úrokové míře je pro subjekty výhodné na vlastní důchod si spořit.

Obrázek 6: Steady-state pro různé hodnoty χ při $r = 0,01$



Analýza vlivu daňové sazby

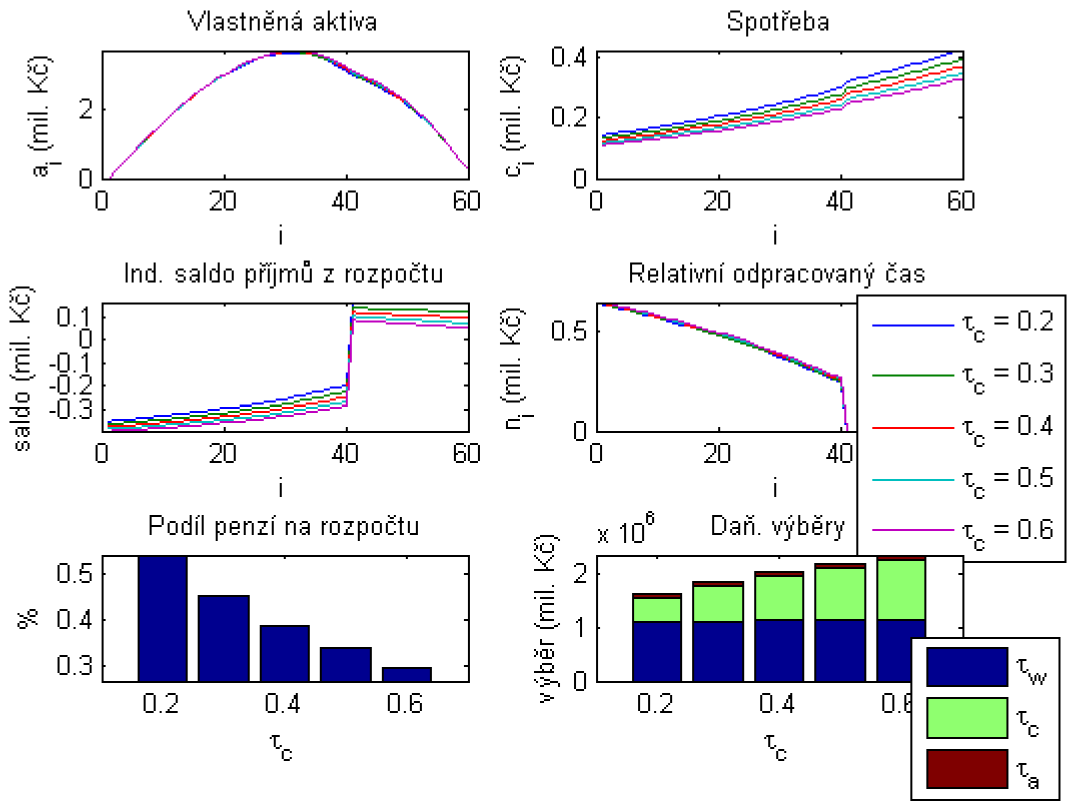
Velikost daňových sazeb přímo ovlivňuje velikost a strukturu příjmů státního rozpočtu. Změna daňových sazeb má ale celou řadu důsledků, mezi něž patří i přizpůsobení v chování spotřebitelů, který mohou v některých případech snižovat efekt vyšších daňových sazeb na daňové výnosy.

Na obrázku 7 vidíme efekt zvyšování sazby spotřební daně. Parametry simulace jsou stejné jako v předchozích dvou, úroková míra je stanovena na $r = 0{,}03$

Vidíme, že při zvyšování sazby spotřební daně dochází ke zvyšování daňových výběrů. Vyšší sazba spotřební daně vede spíše k nižší spotřebě subjektů, relativní odpracovaný volný čas se tak výrazně nemění. Vyšší výnos ze spotřební daně rovněž výrazně nemění výběry daně ze mzdy a daně z úroků.

Na obrázku 8 je provedena simulace zvýšení daně ze mzdy. Zvýšení daně z příjmu opět snižuje spotřebu a tím i životní úroveň spotřebitelů, současně se zvyšují daňové příjmy. Zvýšení daně z příjmů ovlivňuje strukturu daňových příjmů, protože v důsledku nižší spotřeby klesá výnos ze spotřební daně. Dalším negativním jevem je pokles vlastnictví finančních aktiv spotřebitelů. Ti opět snižují své úspory a tím roste jejich závislost

Obrázek 7: Steady-state pro různé hodnoty τ_c

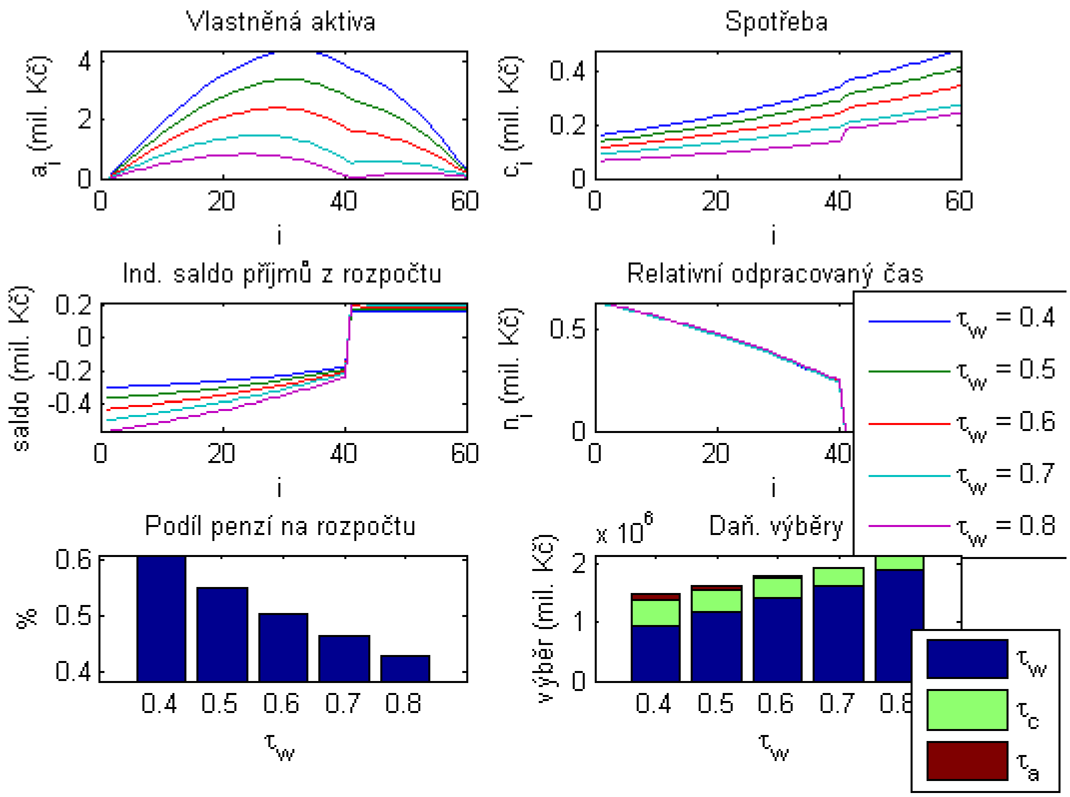


na státem vyplácených penzích. Zvyšování sazby daně ze mzdy zvyšuje daňové výnosy a opět dochází ke změně daňové struktury, která je způsobena poklesem spotřeby a poklesem výnosu ze spotřební daně.

Problematika Lafferovy křivky Lafferova křivka je koncept vyvinutý americkým ekonomem Arthurem Lafferem, předním představitelem ekonomického směru známého jako ekonomie strany nabídky. Podle Lafferovy teorie dochází při zvyšování daňové sazby od určitého bodu k poklesu daňových výnosu, které jsou způsobovány oslabováním ekonomické aktivity subjektů, případně přesunem do šedé ekonomiky atd. [38] Dle našich výpočtů vede zvyšování daňových sazeb ke zvyšování daňových příjmů, takže se efekt Lafferovy křivky neprojevuje. V opačném případě by existoval strop pro výši vládních příjmů, který by vláda nemohla překročil. V případě deficitního rozpočtu i při dosažení tohoto stropu by vláda musela přistoupit k omezování výše penzí, případně zvýšení sazby některé z dalších daní.

Teoreticky tedy vláda může řešit problém důchodového systému zvyšováním daňových sazeb, důsledkem ovšem bude pokles životní úrovně spotřebitelů a růst závislosti spo-

Obrázek 8: Steady-state pro různé hodnoty τ_c



třebitel v post-produktivním věku na státem vyplácených penzích.

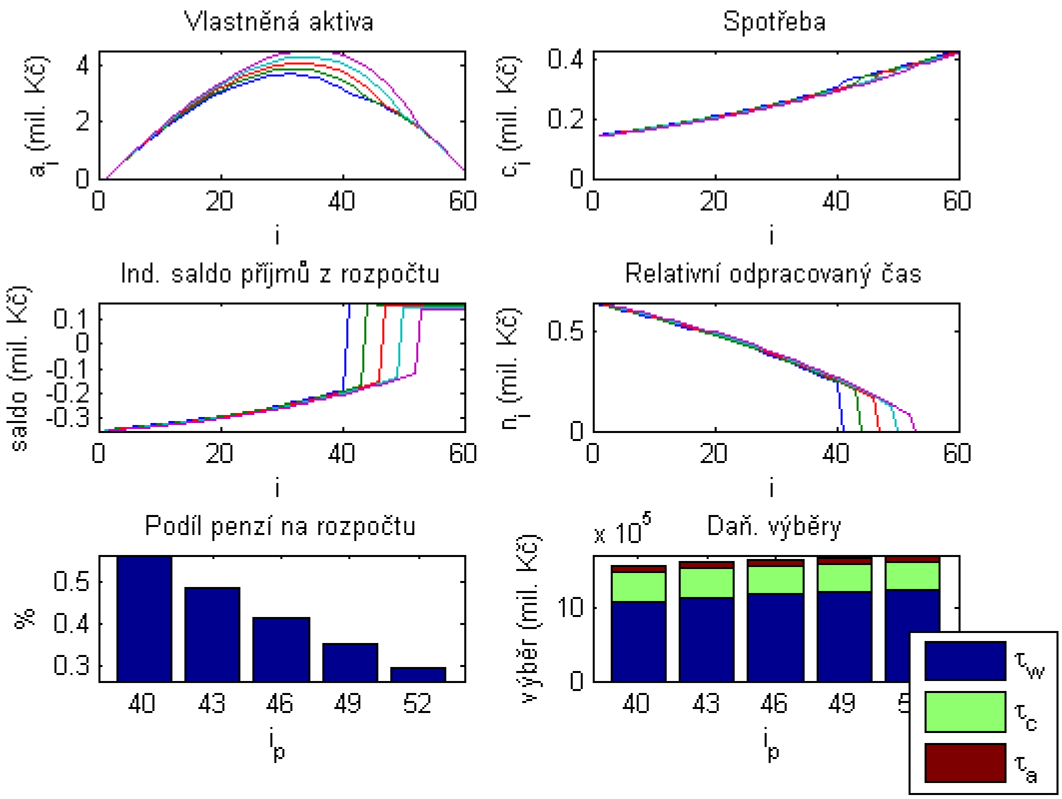
Analýza vlivu změny věku odchodu do penze i_p

Již v popisu Auerbachova-Kotlikoffova modelu jsme si uvedli, že věk odchodu do důchodu i_p je jedním z často měněných parametrů státní důchodové politiky. Budeme simulovat vliv této změny. Parametry simulace jsou opět stejné jako v předchozích simulacích. V simulaci jsou zobrazeny výsledky[16] pro hodnoty $i_p = 40$, $i_p = 43$, $i_p = 46$, $i_p = 49$, $i_p = 52$.

Z grafu 9 je zřejmé, že spotřebitelé při vyšším věku odchodu do důchodu pracují déle, jinak ale nedochází k výraznější změně chování spotřebitele v průběhu jeho života. Relativní množství odpracovaného času totiž s věkem reprezentativního spotřebitele klesá a klesání se projevuje i při vyšším věku odchodu do důchodu. Při nižším věku odchodu do důchodu je úroveň spotřeby spotřebitele v letech těsně po odchodu do

[16]Z proporčních důvodů v grafu není legenda pro jednotlivé hodnoty i_p, ale konkrétní hodnoty jsou zřejmé z grafu relativního množství odpracovaného času.

Obrázek 9: Steady-state pro různé hodnoty i_p



důchodu mírně vyšší.

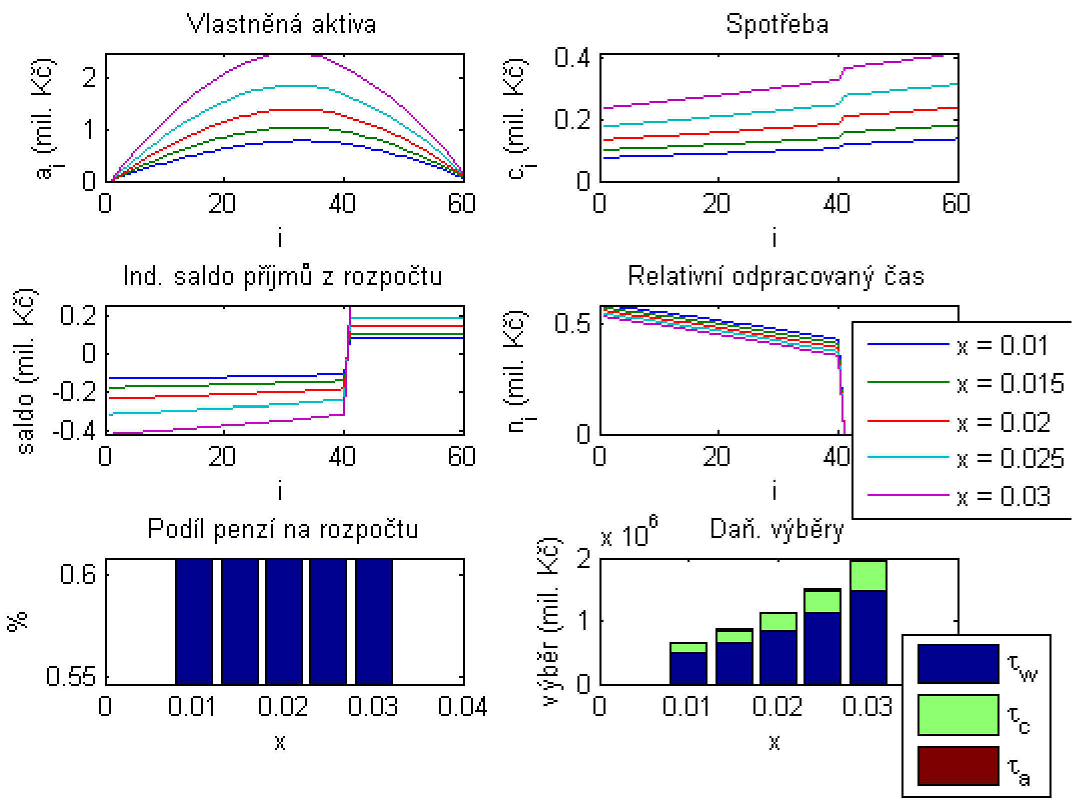
Pozitivní vliv má zvyšování parametru i_p na podíl penzí na daňových výběrech. Efekt spočívá především ve snížení výdajů na starobní penze ze státního rozpočtu, protože vzhledem k relativně nízkému relativnímu odpracovanému času výrazně neroste výběr daně ze mzdy.

Zvyšování věku odchodu do důchodu je tedy možností, jak zlepšit bilanci veřejných rozpočtů, z důvodu vyššího odpracovaného času však klesá životní úroveň spotřebitelů. Tato politika má v praxi celou řadu dalších komplikací, především zhoršující se zdravotní stav spotřebitelů a z toho plynoucí nižší produktivita práce. Tento problém by bylo možné řešit aplikací křivky individuální produktivity práce v závislosti na věku. Pro Českou republiku není její odhad zatím k dispozici, v případné simulaci by ale šlo vycházet např. z odhadu pro ekonomiku Spojeného království Velké Británie a Severního Irska, které lze najít v článku [24].

Analýza vlivu tempa růstu produktivity práce x

Posledním parametrem, který budeme měnit, je tempo růstu produktivity práce. Důležitost tohoto parametru jsme odvodili již z Diamondova modelu (viz subkapitola 2.3 na straně 26). Abychom se vrátili k diskusi v subkapitole 2.3, uvažujme v této simulaci reálnou úrokovou míru $r = 0{,}02$, abychom mohli analyzovat situace, kdy je úroková míra vyšší i nižší než tempo růstu produktivity práce x. Růst produktivity práce je velice komplikovanou otázkou a nelze jej dosáhnout úpravou parametrů vládní fiskální politiky.

Obrázek 10: Steady-state pro různé hodnoty i_p



Vyšší tempo produktivity práce zvyšuje životní úroveň spotřebitelů, protože se zvyšuje jejich spotřeba (v produktivním i post-produktivním věku) a současně klesá relativní množství odpracovaného času. Vyšší tempo růstu produktivity práce zvyšuje reálné mzdy, čímž se zvyšují daňové výběry z daně z příjmu. Samozřejmě roste i výběr daně ze spotřeby, vzhledem k vyšším úsporám při vyšší produktivitě práce rostou i výběry daně z výnosů z finančních aktiv.

Reálná mzda se pro jednotlivé varianty mění stejně jako produktivita práce. Protože výše penze je dána fixně v závislosti na průměrné mzdě, výrazně se nemění podíl penzí na daňových výběrech. Vyšší tempo růstu produktivity práce by tedy zvýšilo reálnou životní úroveň spotřebitelů i daňové výběry, výrazně se ale nemění podíl vyplacených penzí na daňových výběrech. Případné snížení vládního deficitu by muselo být realizováno snížením hodnoty parametru χ.

5 Závěr

V této práci jsme si popsali základní východiska teorie ekonomického růstu a popsali si základní myšlenku modelů s překrývajícími se generacemi. Dále jsme si podrobněji popsaly dva z OLG modely: Diamondův model a Auerbachův-Kotlikoffův model. Dospěli jsme k závěru, že pro praktickou aplikaci a kalibraci na základě empirických dat je vhodnější Auerbachův-Kotlikoffovův model. Tento model je však svou konstrukcí vzdáleně podobný prvnímu jmenovanému modelu.

Auerbachův-Kotlikoffův model je robustní vůči Lucasově kritice, a tak jej lze použít k analýze vlivu změny hospodářské politiky na vývoj ekonomiky. Vyšli jsme s demografické prognózy Českého statistického úřadu a provedli simulace steady-state Auerbachova-Kotlikoffova modelu pro rok 2065 pro Českou republiku. Sledovali jsme především to, jak změny parametrů modelu ovlivní steady-state. Z toho lze zjistit, jak budou na změnu podmínek v ekonomice reagovat spotřebitelé. Měnili jsme jak parametry přímo ovlivnitelné hospodářskou politikou vlády, tak i parametry částečně (nebo zcela) nezávislé na hospodářské politice naší vlády.

Na základě provedených simulací lze formulovat závěr, že budoucnost důchodového systému závisí nejen na demografickém vývoji, ale na celé řadě dalších parametrů. Životní situace spotřebitelů v produktivním i post-produktivním věku je závislá jak na výši penzí a výši zdanění, tak i na růstu produktivity práce a světové úrokové míry. Vyšší úroková míra zvyšuje motivaci spotřebitelů k úsporám a snižuje jejich závislost na státu. Vyšší produktivita práce zvyšuje reálnou mzdu a tím i životní úroveň osob v produktivním i post-produktivním věku. V dlouhodobém časovém horizontu by tedy vláda měla věnovat pozornost především hledání politik zajišťující růst produktivity práce zaměstnanců v České republice. Při vyšší produktivitě práce lze snáze financovat důchodový systém, současně díky vyšším mzdám rostou úspory spotřebitelů a klesá jejich závislost na státu. K řešení demografického problému by rovněž nepochybně přispěla vyšší institucionální a politická stabilita, srozumitelný systém výpočtu penzí a minimální změny v daňových sazbách.

Základní verze Auerbachova-Kotlikoffova modelu je deterministická. Vládní politika je přesně dána a známa všem spotřebitelům, nedochází k výkyvům úrokové míry a délka života je deterministicky daná. Úkolem dalšího výzkumu může být vývoj a kalibrace modelu, který uvolní některé z výše uvedených předpokladů. Lze analyzovat, jak budou subjekty reagovat na stochastickou délku života a stochastické šoky, které mohou představovat například změnu daňových sazeb nebo výkyvy na evropských kapitálových trzích. Další možností je zahrnout do modelu i další veřejné výdaje a veřejně financované služby, které jsou závislé na demografické struktuře, především školství a zdravotnictví.

Vzhledem ke stálému stárnutí populace lze předpokládat, že těmto výzkumům bude věnována stále větší pozornost. Námětem dalšího výzkumu rovněž může být analýza přesnosti prognóz Auerbachova-Kotlikoffova modelu a případné zkoumání faktorů, které tuto přesnost zvyšují. Jejich eliminací je pak možné zvýšit predikční schopnosti modelu.

Seznam obrázků

Reference

[1] ASIMAKOPULOS, A., WELDON, J. C. *A Synoptic View of Some Simple Models of Growth.* The Canadian Journal of Economics and Political Science, roč. 31, č. 1, únor 1965, s. 52-79 URL <http://www.jstor.org/discover/10.2307/139633?uid=3737856&uid=2129&uid=2&uid=70&uid=4&sid=21102200575211>

[2] AUERBACH, A. J., KOTLIKOFF, L. J. *Dynamic fiscal policy.* Cambridge: Cambridge University Press, 1987

[3] AUERBACH, A. J., KOTLIKOFF, L. J., HAGEMANN, R. P., NICOLETTI, G. *The Economic Dynamics of an Ageing Population.* OECD Economics Department: 1989 URL <http://www.oecd.org/economy/growth/2002305.pdf>

[4] BEBACKÝ, K., DYBCZAK, K. *The Impact of Population Ageing on the Czech Economy.* ČNB Working Papers Series. Praha: Česká národní banka, 34 s., 2009 URL <http://www.cnb.cz/miranda2/export/sites/www.cnb.cz/en/research/research_publications/cnb_wp/download/cnbwp_2009_01.pdf>

[5] BARRO, R. J., SALA-I-MARTIN, X. *Economic Growth.* New York: MIT Press, 1995, ISBN 9780262025539

[6] BLACK, J. *Optimum Savings Reconsidered, or Ramsey Without Tears.* The Economic Journal, ročník 72, č. 286, červen 1962, s. 360-366 URL <http://www.jstor.org/discover/10.2307/2228674?uid=3737856&uid=2129&uid=2&uid=70&uid=4&sid=21102200575211>

[7] BOUZAHZAH, M., CROIX, D., DOCQUIER, F. *Policy reforms and growth in computable OLG economies.* Journal of Economic Dynamics & Control, roč. 26, s. 2093–2113 URL <https://www.researchgate.net/publication/222834328_Policy_reforms_and_growth_in_computable_OLG_economies/file/d912f50c8bb8710658.pdf>

[8] BRITTO, R. *Some Recent Developments in the Theory of Economic Growth: An Interpretation.* Journal of Economic Literature, roč. 11, č. 4, prosinec 1973, s. 1343-1366 URL <http://www.jstor.org/discover/10.2307/2721785?uid=3737856&uid=2129&uid=2&uid=70&uid=4&sid=21102200575211>

[9] CIPRA, T. *Penze: kvantitativní přístup* Praha: Ekopress, 2012, ISBN: 978-80-86929-87-3

[10] Český statistický úřad. *Projekce obyvatelstva České republiky.* [Online] 13. 4. 2013. URL <http://www.czso.cz/csu/2009edicniplan.nsf/p/4020-09>

[11] ČIHÁK, M., HOLUB, T. *Teorie růstové politiky.* Praha: Vysoká škola ekonomická, Národohospodářská fakulta, 2000, ISBN 978-80-245-0126-0.

[12] DIAMOND, P. *National debt in a neoclassical growth model.* American Economic Review, ročník 55, č. 5, 1965, s. 1126–1150. URL <http://www.hss.caltech.edu/~camerer/SS280/DiamondAER65.pdf>

[13] DYBCZAK, K. *Vliv demografických změn na reálnou úrokovou míru a kapitálové toky.* Disertační práce. Praha: Fakulta financí a účetnictví VŠE v Praze, 106 s., 2008 URL <http://www.vse.cz/vskp/show_evskp.php?evskp_id=28053>

[14] DUARTE, P. G. *Frank P. Ramsey: A Cambridge Economist.* History of Political Economy, ročník 41, č. 3, s. 445-470, 2009.

[15] DUARTE, P. G. *The Growing of Ramsey's Growth Model.* History of Political Economy, ročník 41, č. 1, 2009, s. 161-181

[16] DORNBUSCH, R., FISCHER, S. *Makroekonomie.* Praha: SPN, 1994, ISBN 978-80-042-5556-5.

[17] FRIEDMAN, M. *Metodologie pozitivní ekonomie.* Praha: Grada, 1997

[18] GIRI, R. *Growth Model with Endogenous Savings: Diamond Model* [Online] URL <http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/diamond_model.pdf>

[19] HEER, B., MAUßNER, A. *Dynamic general equilibrium modeling: computational methods and applications.* Springer, 2009.

[20] HOLMAN, R. a kol. *Dějiny ekonomického myšlení.* 3. vydání. Praha: C H Beck, 2005, ISBN 807-17-9380-9.

[21] LUCAS, R. *Econometric Policy Evaluation: A Critique* Carnegie-Rochester conference series on public policy. 1976. s. 19-46. URL <http://pareto.uab.es/mcreel/reading_course_2006_2007/lucas1976.pdf>

[22] MARTINČÍK, D. *Transmisní mechanismy AD* Materiál k předmětu KEM/SEMEK [online]. s. 8 [cit. 2013-03-17]. URL <http://home.zcu.cz/~martinci/Vyuka/Semek/Klasicka\%20dichotomie.PDF>

[23] MARTINČÍK, D., PEŠÍK, J. *Frank Plumpton Ramsey: The Economic Phenomenon Who Died Prematurely.* Acta FF ZČU. V tisku. Plzeň: 2013

[24] MILES, D. *Modelling the Impact of Demographic Change upon the Economy.* The Economic Journal, ročník 109, č. 452, leden 1999, s. 1-36

[25] NADIRI, M., I., PRUCHA, I. R. *Estimation of the Depreciation Rate of Physical and R&D Capital in the U.S. Total Manufacturing Sector* New York, C.V. Starr Center for Applied Economics. URL <http://www.econ.nyu.edu/user/nadiri/pub86.PDF>

[26] OECD. *Labour productivity growth in the total economy.* [Online] 23. 4. 2013. URL <http://stats.oecd.org/Index.aspx?DatasetCode=PDYGTH>

[27] PAVLÁSEK, V., KUNEŠOVÁ, H., HEJDUKOVÁ, P.: *Veřejné finance a daně.* Plzeň: NAVA, 2009, ISBN 978-80-7211-329-3.

[28] PLEVNÝ, M., ŽIŽKA, M. *Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování.* 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2007. 298 s. ISBN 978-80-7043-435-2

[29] POLÍVKA, M. *Malthus Thomas Robert.* [online] 17. 11. 2012 URL <http://fek.zcu.cz/kalendarium/EKONOM/Malthus_t_r.pdf>

[30] POTŘEBUJEŠ, O. *Popis vývoje české ekonomiky v letech 1993-2008 pomocí modelu IS-LM-BP.* Diplomová práce. Plzeň: Fakulta ekonomická ZČU v Plzni, 68 s., 2011 URL <https://portal.zcu.cz/wps/PA_StagPortletsJSR168/KvalifPraceDownloadServlet?typ=1&adipidno=41131>

[31] RAMSEY, F. P. *A Mathematical Theory of Saving.* The Economic Journal, ročník 38, č. 152, 1928, s. 543–559, ISSN 00130133. URL <http://folk.uio.no/gasheim/zRam1928.pdf>

[32] ROTHBARD, M. N.: *Zásady ekonomie: od lidského jednání k harmonii trhů.* Praha: Liberální institut, 2005, ISBN 978-80-863-8927-1

[33] SAMUELSON, P. A., NORDHAUS, W. D.: *Ekonomie.* 18. vydání. Praha: Nakladatelství Svoboda, 2007, ISBN 802-05-0590-3

[34] SCHNEIDER, O. *Dynamický model důchodové reformy v ČR.* Finance a úvěr, ročník 48, č. 1, 1998, s. 55–65, URL <http://ideas.repec.org/a/fau/fauart/v48y1998i1p55-65.html>

[35] SOJKA, M.: *Dějiny ekonomických teorií*. Praha: SPN, 2000, ISBN 80-7184-991-X.

[36] TURNER, G. *A Comparsion of the Limits to Growth With Thirty Years of Reality* [online] 18. 11. 2012 <http://www.csiro.au/files/files/plje.pdf>

[37] VARIAN, M. *Mikroekonomie: Moderní přístup*. Praha: Victoria Publishing, 1995, ISBN 8085865254.

[38] WANNISKI, J. *Taxes, Revenues, and the „Laffer Curve"*. The Public Interest, ročník 50, prosinec 1978 URL <http://www.nationalaffairs.com/doclib/20080528_197805001taxesrevenuesandthelaffercurvejudewanniski.pdf>